

INTERNATIONAL STANDARD

NORME INTERNATIONALE

Mathematical expressions for reliability, availability, maintainability and maintenance support terms

Expressions mathématiques pour les termes de fiabilité, de disponibilité, de maintenabilité et de logistique de maintenance

IECNORM.COM : Click to view the full PDF of IEC 61703:2016



THIS PUBLICATION IS COPYRIGHT PROTECTED

Copyright © 2016 IEC, Geneva, Switzerland

All rights reserved. Unless otherwise specified, no part of this publication may be reproduced or utilized in any form or by any means, electronic or mechanical, including photocopying and microfilm, without permission in writing from either IEC or IEC's member National Committee in the country of the requester. If you have any questions about IEC copyright or have an enquiry about obtaining additional rights to this publication, please contact the address below or your local IEC member National Committee for further information.

Droits de reproduction réservés. Sauf indication contraire, aucune partie de cette publication ne peut être reproduite ni utilisée sous quelque forme que ce soit et par aucun procédé, électronique ou mécanique, y compris la photocopie et les microfilms, sans l'accord écrit de l'IEC ou du Comité national de l'IEC du pays du demandeur. Si vous avez des questions sur le copyright de l'IEC ou si vous désirez obtenir des droits supplémentaires sur cette publication, utilisez les coordonnées ci-après ou contactez le Comité national de l'IEC de votre pays de résidence.

IEC Central Office
3, rue de Varembe
CH-1211 Geneva 20
Switzerland

Tel.: +41 22 919 02 11
Fax: +41 22 919 03 00
info@iec.ch
www.iec.ch

About the IEC

The International Electrotechnical Commission (IEC) is the leading global organization that prepares and publishes International Standards for all electrical, electronic and related technologies.

About IEC publications

The technical content of IEC publications is kept under constant review by the IEC. Please make sure that you have the latest edition, a corrigenda or an amendment might have been published.

IEC Catalogue - webstore.iec.ch/catalogue

The stand-alone application for consulting the entire bibliographical information on IEC International Standards, Technical Specifications, Technical Reports and other documents. Available for PC, Mac OS, Android Tablets and iPad.

IEC publications search - www.iec.ch/searchpub

The advanced search enables to find IEC publications by a variety of criteria (reference number, text, technical committee,...). It also gives information on projects, replaced and withdrawn publications.

IEC Just Published - webstore.iec.ch/justpublished

Stay up to date on all new IEC publications. Just Published details all new publications released. Available online and also once a month by email.

Electropedia - www.electropedia.org

The world's leading online dictionary of electronic and electrical terms containing 20 000 terms and definitions in English and French, with equivalent terms in 15 additional languages. Also known as the International Electrotechnical Vocabulary (IEV) online.

IEC Glossary - std.iec.ch/glossary

65 000 electrotechnical terminology entries in English and French extracted from the Terms and Definitions clause of IEC publications issued since 2002. Some entries have been collected from earlier publications of IEC TC 37, 77, 86 and CISPR.

IEC Customer Service Centre - webstore.iec.ch/csc

If you wish to give us your feedback on this publication or need further assistance, please contact the Customer Service Centre: csc@iec.ch.

A propos de l'IEC

La Commission Electrotechnique Internationale (IEC) est la première organisation mondiale qui élabore et publie des Normes internationales pour tout ce qui a trait à l'électricité, à l'électronique et aux technologies apparentées.

A propos des publications IEC

Le contenu technique des publications IEC est constamment revu. Veuillez vous assurer que vous possédez l'édition la plus récente, un corrigendum ou amendement peut avoir été publié.

Catalogue IEC - webstore.iec.ch/catalogue

Application autonome pour consulter tous les renseignements bibliographiques sur les Normes internationales, Spécifications techniques, Rapports techniques et autres documents de l'IEC. Disponible pour PC, Mac OS, tablettes Android et iPad.

Recherche de publications IEC - www.iec.ch/searchpub

La recherche avancée permet de trouver des publications IEC en utilisant différents critères (numéro de référence, texte, comité d'études,...). Elle donne aussi des informations sur les projets et les publications remplacées ou retirées.

IEC Just Published - webstore.iec.ch/justpublished

Restez informé sur les nouvelles publications IEC. Just Published détaille les nouvelles publications parues. Disponible en ligne et aussi une fois par mois par email.

Electropedia - www.electropedia.org

Le premier dictionnaire en ligne de termes électroniques et électriques. Il contient 20 000 termes et définitions en anglais et en français, ainsi que les termes équivalents dans 15 langues additionnelles. Egalement appelé Vocabulaire Electrotechnique International (IEV) en ligne.

Glossaire IEC - std.iec.ch/glossary

65 000 entrées terminologiques électrotechniques, en anglais et en français, extraites des articles Termes et Définitions des publications IEC parues depuis 2002. Plus certaines entrées antérieures extraites des publications des CE 37, 77, 86 et CISPR de l'IEC.

Service Clients - webstore.iec.ch/csc

Si vous désirez nous donner des commentaires sur cette publication ou si vous avez des questions contactez-nous: csc@iec.ch.

INTERNATIONAL STANDARD

NORME INTERNATIONALE

Mathematical expressions for reliability, availability, maintainability and maintenance support terms

Expressions mathématiques pour les termes de fiabilité, de disponibilité, de maintenabilité et de logistique de maintenance

INTERNATIONAL
ELECTROTECHNICAL
COMMISSION

COMMISSION
ELECTROTECHNIQUE
INTERNATIONALE

ICS 03.120.30; 21.020

ISBN 978-2-8322-3558-4

Warning! Make sure that you obtained this publication from an authorized distributor.
Attention! Veuillez vous assurer que vous avez obtenu cette publication via un distributeur agréé.

CONTENTS

FOREWORD.....	6
INTRODUCTION.....	8
1 Scope.....	9
2 Normative references.....	10
3 Terms and definitions	10
4 Glossary of symbols and abbreviations	13
4.1 General.....	13
4.2 Acronyms used in this standard	13
4.3 Symbols used in this standard	15
5 General models and assumptions	18
5.1 Constituents of up and down times	18
5.2 Introduction to models and assumptions	19
5.3 State-transition approach	20
5.4 Model and assumptions for non-repairable individual items	22
5.5 Assumptions and model for repairable individual items.....	23
5.5.1 Assumption for repairable individual items	23
5.5.2 Instantaneous repair	24
5.5.3 Non-instantaneous repair	25
5.6 Continuously operating items (COI) versus intermittently operating individual items (IOI).....	26
6 Mathematical models and expressions	27
6.1 Systems.....	27
6.1.1 General	27
6.1.2 Availability related expressions	29
6.1.3 Reliability related expressions	36
6.1.4 Mean operating time between failures [192-05-13] and mean time between failures.....	40
6.1.5 Instantaneous failure rate [192-05-06] and conditional failure intensity (Vesely failure rate).....	41
6.1.6 Failure density and unconditional failure intensity [192-05-08].....	44
6.1.7 Comparison of $\lambda(t)$, $\lambda_V(t)$, $z(t)$ and $f(t)$ for high and small MTTRs	47
6.1.8 Restoration related expressions	47
6.2 Non-repairable individual items.....	49
6.2.1 General	49
6.2.2 Instantaneous availability [192-08-01].....	50
6.2.3 Reliability [192-05-05]	50
6.2.4 Instantaneous failure rate [192-05-06]	51
6.2.5 Mean failure rate [192-05-07]	52
6.2.6 Mean operating time to failure [192-05-11].....	53
6.3 Repairable individual items with zero time to restoration	54
6.3.1 General	54
6.3.2 Reliability [192-05-05]	54
6.3.3 Instantaneous failure intensity [192-05-08].....	56
6.3.4 Asymptotic failure intensity [192-05-10]	58
6.3.5 Mean failure intensity [192-05-09].....	59
6.3.6 Mean time between failures (see 3.3)	60

6.3.7	Mean operating time to failure [192-05-11].....	60
6.3.8	Mean operating time between failures [192-05-13]	61
6.3.9	Instantaneous availability [192-08-01], mean availability [192-08-05] and asymptotic availability [192-08-07]	61
6.3.10	Mean up time [192-08-09]	61
6.4	Repairable individual items with non-zero time to restoration.....	62
6.4.1	General	62
6.4.2	Reliability [192-05-05]	62
6.4.3	Instantaneous failure intensity [192-05-08].....	64
6.4.4	Asymptotic failure intensity [192-05-10]	67
6.4.5	Mean failure intensity [192-05-09].....	68
6.4.6	Mean operating time to failure [192-05-11].....	69
6.4.7	Mean time between failures (see 3.3)	70
6.4.8	Mean operating time between failures [192-05-13]	71
6.4.9	Instantaneous availability [192-08-01].....	71
6.4.10	Instantaneous unavailability [192-08-04].....	73
6.4.11	Mean availability [192-08-05].....	74
6.4.12	Mean unavailability [192-08-06].....	76
6.4.13	Asymptotic availability [192-08-07]	78
6.4.14	Asymptotic unavailability [192-08-08].....	78
6.4.15	Mean up time [192-08-09]	79
6.4.16	Mean down time [192-08-10]	81
6.4.17	Maintainability [192-07-01]	82
6.4.18	Instantaneous repair rate [192-07-20].....	84
6.4.19	Mean repair time [192-07-21].....	86
6.4.20	Mean active corrective maintenance time [192-07-22]	87
6.4.21	Mean time to restoration [192-07-23]	88
6.4.22	Mean administrative delay [192-07-26]	89
6.4.23	Mean logistic delay [192-07-27].....	90
Annex A (informative)	Performance aspects and descriptors	91
Annex B (informative)	Summary of measures related to time to failure	92
Annex C (informative)	Comparison of some dependability measures for continuously operating items.....	95
Bibliography		97
Figure 1 – Constituents of up time		18
Figure 2 – Constituents of down time.....		19
Figure 3 – Acronyms related to failure times		19
Figure 4 – Simple state-transition diagram.....		21
Figure 5 – Sample realization (chronogram) related to the system in Figure 4		22
Figure 6 – State-transition diagram of a non-repairable individual item		22
Figure 7 – Sample realization of a non-repairable individual item		23
Figure 8 – State-transition diagram of an instantaneously repairable individual item		24
Figure 9 – Sample realization of a repairable individual item with zero time to restoration		25
Figure 10 – State-transition diagram of a repairable individual item.....		25

Figure 11 – Sample realization of a repairable individual item with non-zero time to restoration	26
Figure 12 – Comparison of an enabled time for a COI and an IOI	26
Figure 13 – Equivalent operating time for IOI items	27
Figure 14 – State-transition graph for a simple redundant system	27
Figure 15 – Markov graph for a simple redundant system	28
Figure 16 – Evolution of the state probabilities related to the Markov model in Figure 15	28
Figure 17 – Evolution of $A(t)$ and $U(t)$ related to the Markov model in Figure 15	29
Figure 18 – Evolution of the $Ast_i(0, t)$ related to the Markov model in Figure 15	31
Figure 19 – Instantaneous availability and mean availability of a periodically tested item	33
Figure 20 – Example of a simple production system	34
Figure 21 – Evolution of $A(t)$ and $K(t)$	35
Figure 22 – Illustration of a system reliable behaviour over $[0, t]$	36
Figure 23 – Illustration of a system reliable behaviour over time interval $[t_1, t_2]$	37
Figure 24 – State-transition and Markov graphs for reliability calculations	37
Figure 25 – Evolution of the state probabilities related to the Markov model in Figure 24	38
Figure 26 – Evolution of $R(t)$ and $F(t)$ related to the Markov model in Figure 24	39
Figure 27 – Evolution of $Ast_i(0, t)$ related to the Markov model in Figure 24	40
Figure 28 – Time between failures versus operating time between failures	40
Figure 29 – Comparison between $\lambda(t)$ and $\lambda_V(t)$ related to the model in Figure 24	43
Figure 30 – Comparison between $z(t)$ and $f(t)$	46
Figure 31 – Comparison of $\lambda(t)$, $\lambda_V(t)$, $z(t)$ and $f(t)$ for high and small values of MTTRs	47
Figure 32 – Illustration of reliable behaviour over $[t_1, t_2]$ for a zero time to restoration individual item	55
Figure 33 – Sample of possible number of failures at the renewal time t	56
Figure 34 – Illustration of reliable behaviour over $[t_1, t_2]$ for a non-zero time to restoration individual item	62
Figure 35 – Evolution of $R(t, t + 1/4)$	64
Figure 36 – Sample of possible number of failures at the renewal time t	64
Figure 37 – Evolution of the failure intensity $z(t)$	66
Figure 38 – Evolution of the mean failure intensity $z(t, t + 1/4)$	69
Figure 39 – Illustration of available behaviour at time t for a non-zero time to restoration individual item	71
Figure 40 – Evolution of the instantaneous availability $A(t)$	73
Figure 41 – Illustration of unavailable behaviour at time t for a non-zero time to restoration individual item	73
Figure 42 – Evolution of the instantaneous unavailability $U(t)$	74
Figure 43 – Evolution of the mean availability $\bar{A}(t, t + 1/4)$	76
Figure 44 – Evolution of the mean unavailability $\bar{U}(t, t + 1/4)$	77
Figure 45 – Sample realization of the individual item state	80
Figure 46 – Plot of the up-time hazard rate function $\lambda_U(t)$	80
Figure 47 – Evolution of the maintainability $M(t, t + 16h)$	84
Figure 48 – Evolution of the lognormal repair rate $\mu(t)$	86

Figure A.1 – Performance aspects and descriptors	91
Table B.1 – Relations among measures related to time to failure of continuously operating items	92
Table B.2 – Summary of characteristics for some continuous probability distributions of time to failure of continuously operating items	93
Table B.3 – Summary of characteristics for some probability distributions of repair time	94
Table C.1 – Comparison of some dependability measures of continuously operating items with constant failure rate λ and restoration rate μ_R	95

IECNORM.COM : Click to view the full PDF of IEC 61703:2016

INTERNATIONAL ELECTROTECHNICAL COMMISSION

MATHEMATICAL EXPRESSIONS FOR RELIABILITY, AVAILABILITY, MAINTAINABILITY AND MAINTENANCE SUPPORT TERMS

FOREWORD

- 1) The International Electrotechnical Commission (IEC) is a worldwide organization for standardization comprising all national electrotechnical committees (IEC National Committees). The object of IEC is to promote international co-operation on all questions concerning standardization in the electrical and electronic fields. To this end and in addition to other activities, IEC publishes International Standards, Technical Specifications, Technical Reports, Publicly Available Specifications (PAS) and Guides (hereafter referred to as "IEC Publication(s)"). Their preparation is entrusted to technical committees; any IEC National Committee interested in the subject dealt with may participate in this preparatory work. International, governmental and non-governmental organizations liaising with the IEC also participate in this preparation. IEC collaborates closely with the International Organization for Standardization (ISO) in accordance with conditions determined by agreement between the two organizations.
- 2) The formal decisions or agreements of IEC on technical matters express, as nearly as possible, an international consensus of opinion on the relevant subjects since each technical committee has representation from all interested IEC National Committees.
- 3) IEC Publications have the form of recommendations for international use and are accepted by IEC National Committees in that sense. While all reasonable efforts are made to ensure that the technical content of IEC Publications is accurate, IEC cannot be held responsible for the way in which they are used or for any misinterpretation by any end user.
- 4) In order to promote international uniformity, IEC National Committees undertake to apply IEC Publications transparently to the maximum extent possible in their national and regional publications. Any divergence between any IEC Publication and the corresponding national or regional publication shall be clearly indicated in the latter.
- 5) IEC itself does not provide any attestation of conformity. Independent certification bodies provide conformity assessment services and, in some areas, access to IEC marks of conformity. IEC is not responsible for any services carried out by independent certification bodies.
- 6) All users should ensure that they have the latest edition of this publication.
- 7) No liability shall attach to IEC or its directors, employees, servants or agents including individual experts and members of its technical committees and IEC National Committees for any personal injury, property damage or other damage of any nature whatsoever, whether direct or indirect, or for costs (including legal fees) and expenses arising out of the publication, use of, or reliance upon, this IEC Publication or any other IEC Publications.
- 8) Attention is drawn to the Normative references cited in this publication. Use of the referenced publications is indispensable for the correct application of this publication.
- 9) Attention is drawn to the possibility that some of the elements of this IEC Publication may be the subject of patent rights. IEC shall not be held responsible for identifying any or all such patent rights.

International Standard IEC 61703 has been prepared by IEC technical committee 56: Dependability.

This second edition cancels and replaces the first edition published in 2001. This edition constitutes a technical revision.

This edition includes the following significant technical changes with respect to the previous edition:

- a) standard made as self containing as possible;
- b) item split between individual items and systems;
- c) generalization of the dependability concepts for systems made of several components;
 - introduction of the conditional failure intensity (Vesely failure rate);
 - introduction of the state-transition and the Markovian models;

- generalization of the availability to production availability;
- d) introduction of curves to illustrate the various concepts.

The text of this standard is based on the following documents:

FDIS	Report on voting
56/1682/FDIS	56/1693/RVD

Full information on the voting for the approval of this standard can be found in the report on voting indicated in the above table.

This publication has been drafted in accordance with the ISO/IEC Directives, Part 2.

This International Standard is to be used in conjunction with IEC 60050-192:2015

The committee has decided that the contents of this publication will remain unchanged until the stability date indicated on the IEC website under "<http://webstore.iec.ch>" in the data related to the specific publication. At this date, the publication will be

- reconfirmed,
- withdrawn,
- replaced by a revised edition, or
- amended.

IECNORM.COM : Click to view the full PDF of IEC 61703:2016

INTRODUCTION

IEC 60050-192 provides definitions for dependability and its influencing factors, reliability, availability, maintainability and maintenance support, together with definitions of other related terms commonly used in this field. Some of these terms are measures of specific dependability characteristics, which can be expressed mathematically.

It is important for the users to understand the mathematical meaning of those expressions and how they are established. This is the purpose of the present International Standard which, used in conjunction with IEC 60050-192, provides practical guidance essential for the quantification of those measures. For those requiring further information, for example on detailed statistical methods, reference should be made to the IEC 60605 series [23]¹.

Annex A provides a diagrammatic explanation of the relationships between some basic dependability terms, related random variables, probabilistic descriptors and modifiers.

Annex B provides a summary of measures related to time to failure.

Annex C compares some dependability measures for continuously operating items.

The bibliography gives references for the mathematical basis of this standard, in particular, the mathematical material is based on references [2], [6], [8], [9], [13], [14] and [18]; the renewal theory (renewal and alternating renewal processes) can be found in [6], [8], [9], [10], [11], [13], [15], and [17]; and more advanced treatment of renewal theory can be found in references [1], [3], [12], [16], [19] and [20]. More information on the theory and applications of Markov processes can be found in references [3], [9], [10], [15], [16], [17] and [19].

¹ Numbers in brackets refer to the Bibliography.

MATHEMATICAL EXPRESSIONS FOR RELIABILITY, AVAILABILITY, MAINTAINABILITY AND MAINTENANCE SUPPORT TERMS

1 Scope

This International Standard provides mathematical expressions for selected reliability, availability, maintainability and maintenance support measures defined in IEC 60050-192:2015. In addition, it introduces some terms not covered in IEC 60050-192:2015. They are related to aspects of the system of item classes (see hereafter).

According to IEC 60050-192:2015, dependability [192-01-22] is the ability of an item to perform as and when required and an item [192-01-01] can be an individual part, component, device, functional unit, equipment, subsystem, or system.

To account for mathematical constraints, this standard splits the items between the individual items considered as a whole (e.g. individual components) and the systems made of several individual items. It provides general considerations for the mathematical expressions for systems as well as individual items but the individual items which are easier to model are analysed in more detail with regards to their repair aspects.

The following item classes are considered separately:

- Systems;
- Individual items:
 - non-repairable [192-01-12];
 - repairable [192-01-11]:
 - i) with zero (or negligible) time to restoration;
 - ii) with non-zero time to restoration.

In order to explain the dependability concepts which can be difficult to understand, keep the standard self-contained and the mathematical formulae as simple as possible, the following basic mathematical models are used in this standard to quantify dependability measures:

- Systems:
 - state-transition models;
 - Markovian models.
- Individual items:
 - random variable (time to failure) for non-repairable items;
 - simple (ordinary) renewal process for repairable items with zero time to restoration;
 - simple (ordinary) alternating renewal process for repairable items with non-zero time to restoration.

The application of each dependability measure is illustrated by means of simple examples.

This standard is mainly applicable to hardware dependability, but many terms and their definitions may be applied to items containing software.

2 Normative references

The following documents, in whole or in part, are normatively referenced in this document and are indispensable for its application. For dated references, only the edition cited applies. For undated references, the latest edition of the referenced document (including any amendments) applies.

IEC 60050-192:2015, *International electrotechnical vocabulary – Part 192: Dependability* (available at <http://www.electropedia.org>)

ISO 3534-1:2006, *Statistics – Vocabulary and symbols – Part 1: General statistical terms and terms used in probability*

3 Terms and definitions

For the purposes of this document, the terms and definitions given in IEC 60050-192:2015, ISO 3534-1 and the following apply.

NOTE To facilitate the location of the full definition, the IEC 60050-192 reference for each term is shown [in square brackets] immediately following each term, for example:

mean time to restoration [192-07-23]

The terms and definitions given in Clause 3, which do not appear in IEC 60050-192, are used in order to facilitate the presentation of mathematical expressions of some IEC 60050-192 terms. Some terms have been taken from IEC 60050-192 and modified for the needs of this standard.

3.1

instantaneous restoration intensity

restoration intensity

restoration frequency

$\nu(t)$

limit, if it exists, of the quotient of the mean number of restorations [192-06-23] of a repairable item [192-01-11] within time interval $[t, t + \Delta t]$, and Δt , when Δt tends to zero, given that the item is as good as new at $t = 0$

$$\nu(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0+} \frac{E[N_R(t + \Delta t) - N_R(t) | \text{as good as new at } t = 0]}{\Delta t}$$

where

$N_R(t)$ is the number of restorations in the time interval $[0, t]$;

E denotes the expectation.

Note 1 to entry: The difference between the restoration intensity and the repair rate comes from the conditions: the item is as good as new at time $t = 0$ for the restoration intensity and for the repair rate the repair starts at time $t = 0$. From a mathematical point of view, the restoration intensity is similar to the unconditional failure intensity (see 3.8).

Note 2 to entry: The unit of measurement of instantaneous restoration intensity is the unit of time to the power-1.

3.2

instantaneous repair rate

repair rate

$\mu(t)$

limit, if it exists, of the quotient of the conditional probability that the repair is completed within time interval $[t, t + \Delta t]$ and Δt , when Δt tends to zero, given that the repair started at $t = 0$ and had not been completed before time t

Note 1 to entry: The difference between the restoration intensity and the repair rate comes from the conditions: the item is as good as new at time $t = 0$ for the restoration intensity and for the repair rate the repair starts at time $t = 0$. From a mathematical point of view, the repair rate is similar to the failure rate (see 3.6).

[SOURCE: IEC 60050-192:2015, 192-07-20, modified — Note 1 to entry has been replaced and Note 2 to entry deleted]

3.3

mean time between failures

METBF

expectation of the time which elapses between successive failures

Note 1 to entry: The concept of mean time between failures has been omitted from IEC 60050-192. It was defined in IEC 60050-191 as “the expectation of time between failures”. The definition has been modified to explain the acronym METBF (mean elapsed time between failures) which is used in this standard to avoid any confusion between the mean time between failure (METBF) and the mean operating time between failures (MTBF or MOTBF).

[SOURCE: IEC 60050-191:1990, 191-12-08, modified — acronym and Note 1 to entry added]

3.4

up-time distribution function

function giving, for every value of t , the probability that an up-time will be less than, or equal to, t

Note 1 to entry: If the up-time is (strictly) positive and a continuous random variable, then $F_U(0) = 0$ and

$$F_U(t) = 1 - \exp\left(-\int_0^t \lambda_U(x) dx\right)$$

where

$\lambda_U(t)$ is the instantaneous up-time hazard rate function.

Note 2 to entry: The up-time distribution function is the general up-time distribution valid for both COI (continuously operating item) and IOI (intermittently operating item). For COIs, $F_U(t) = F(t)$

Note 3 to entry: If the up time is exponentially distributed, then

$$F_U(t) = 1 - \exp(-t/MUT)$$

where MUT is the mean up-time.

In this case, the reciprocal of MUT is denoted by λ_U and $\lambda_U = 1/MUT$

3.5

instantaneous up-time hazard rate function

up-time hazard rate function

$\lambda_U(t)$

limit, if it exists, of the quotient of the conditional probability that the up-time will end within time interval $[t, t + \Delta t]$ and Δt , when Δt tends to zero, given that the up-time started at $t = 0$ and had not been finished before time t

Note 1 to entry: The instantaneous up-time hazard rate function is expressed by the formula:

$$\lambda_U(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0^+} \frac{1}{\Delta t} \frac{F_U(t + \Delta t) - F_U(t)}{1 - F_U(t)} = \frac{f_U(t)}{1 - F_U(t)}$$

where $F_U(t)$ is the up-time distribution function and $f_U(t)$ is the probability density function of the up-time.

Note 2 to entry: $\lambda_U(t)$ is the general hazard rate for the up times valid for both COI and IOI. For COIs, $\lambda_U(t) = \lambda(t)$ (see 3.6).

Note 3 to entry: If the up time is exponentially distributed, then the instantaneous up-time hazard rate function is constant in time and is denoted by λ_U .

Note 4 to entry: The unit of measurement of instantaneous up-time hazard rate function is the unit of time to the power –1.

3.6

instantaneous failure rate failure rate

$\lambda(t)$

limit, if it exists, of the quotient of the conditional probability that the failure of an item occurs within time interval $[t, t + \Delta t]$, by Δt , when Δt tends to zero, given that failure has not occurred within time interval $[0, t]$

Note 1 to entry: The instantaneous failure rate is expressed by the formula:

$$\lambda(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0+} \frac{1}{\Delta t} \frac{F(t + \Delta t) - F(t)}{R(t)} = \frac{f(t)}{R(t)}$$

where $F(t)$ and $f(t)$ are, respectively, the distribution function and the probability density at the failure instant, and where $R(t)$ is the reliability function, related to the reliability $R(t_1, t_2)$ by $R(t) = R(0, t)$.

Note 2 to entry: The restriction to non-repairable items in the definition provided by IEC 60050-192 can be removed to generalize this definition for any kind of items i.e. systems or individual items, repairable or not.

Note 3 to entry: The instantaneous failure rate is the up-time hazard rate for COIs. In this case, $\lambda(t) = \lambda_U(t)$ (see 3.5).

Note 4 to entry: When $\Delta t \rightarrow 0+$, the failure rate is the conditional probability per unit of time that the item fails between t and $t + \Delta t$, given it is in up state all over the time interval $[0, t]$. It is usually assumed that the item is as good as new at time 0.

Note 5 to entry: The instantaneous failure rate may be also expressed by the formula:

$$\lambda(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0+} \frac{E[N(t + \Delta t) - N(t) | \text{up state over } [0, t]]}{\Delta t}$$

where $N(t)$ is the number of failures in the time interval $[0, t]$, where E denotes the expectation.

This form of the definitions allows comparisons of the failure rate to the conditional failure intensity and to the unconditional failure intensity.

[SOURCE: IEC 60050-192:2015, 192-05-06, modified — generalized to systems with repairable components and Notes to entry added]

3.7

conditional failure intensity Vesely failure rate

$\lambda_V(t)$

limit, if it exists, of the quotient of the mean number of failures of a repairable item within time interval $[t, t + \Delta t]$, by Δt , when Δt tends to zero, given that the item is in up state at time t and as good as new at time 0

Note 1 to entry: The instantaneous failure intensity is expressed by the formula:

$$\lambda_V(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0+} \frac{E[N(t + \Delta t) - N(t) | \text{up state at } t \text{ and as good as new at time } 0]}{\Delta t}$$

where $N(t)$ is the number of failures in the time interval $[0, t]$, where E denotes the expectation.

Note 2 to entry: When $\Delta t \rightarrow 0+$, the conditional failure intensity is the probability per unit of time that the item fails between t and $t + dt$, given it is in up state at time t and as good as new at time 0. In particular cases (quick restoration of failures), it provides good approximations of the failure rate. This parameter introduced in 1970 by W. E. Vesely [26] is also called Vesely failure rate.

Note 3 to entry: According to the definitions, $\lambda_V(t)$ and $z(t)$ are linked by the formula: $\lambda_V(t) = z(t)/A(t)$. where $A(t)$ is the item instantaneous availability at time t .

3.8**unconditional failure intensity
instantaneous failure intensity
failure intensity
failure frequency** $z(t)$

limit, if it exists, of the quotient of the mean number of failures of a repairable item within time interval $[t, t + \Delta t]$, by Δt , when Δt tends to zero, given that the item is as good as new at time $t = 0$

Note 1 to entry: The instantaneous failure intensity is expressed by the formula:

$$z(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0+} \frac{E[N(t + \Delta t) - N(t) | \text{as good as new at } t = 0]}{\Delta t}$$

where $N(t)$ is the number of failures in the time interval $[0, t]$, where E denotes the expectation and where the implicit condition that the item is as good as new at time $t = 0$ has been added.

Note 2 to entry: The unconditional failure intensity is the failure intensity as defined in IEC 60050-192:2015 [192-05-08]. It is also sometimes named ROCOF (rate of occurrence of failure).

Note 3 to entry: When $\Delta t \rightarrow 0+$, the unconditional failure intensity is the probability per unit of time that the item fails between t and $t + dt$ given that the item is in up state at time $t = 0$. Here the item may be in any state at time t and this is why the adjective unconditional is used.

Note 4 to entry: According to the definitions, $\lambda_v(t)$ and $z(t)$ are linked by the formula: $z(t) = A(t) \cdot \lambda_v(t)$ where $A(t)$ is the item instantaneous availability at time t .

[SOURCE: IEC 60050-192:2015, 192-05-08, modified — synonyms have been added and the entry has been revised]

3.9**continuously operating item
COI**

item for which operating time [192-02-05] is equal to its enabled time [192-02-17]

3.10**intermittently operating item
IOI**

item for which operating time [192-02-05] is less than its enabled time [192-02-17]

Note 1 to entry: In this case, the enabled time of the item is made of the sum of the times spent in the operating [192-02-04], idle [192-02-14] and standby [192-02-10] states.

4 Glossary of symbols and abbreviations**4.1 General**

The symbols and abbreviations given in Clause 4 are widely used and recommended, however, they are not mandatory. For consistency of presentation, the notation in this document may differ from that used in a referenced document.

4.2 Acronyms used in this standard

Acronym/abbreviation	Meaning
COI	Continuously operating item
IOI	Intermittently operating item
MACMT	Mean active corrective maintenance time, i.e. the expectation of the active corrective maintenance time

Acronym/abbreviation	Meaning
$\hat{MACMT}$	Point estimate of the mean active corrective maintenance time
MAD	Mean administrative delay
$\hat{MAD}$	Point estimate of the mean administrative delay
$MADT(t_1, t_2)$	Mean accumulated down time over the time interval $[t_1, t_2]$
$\hat{MADT}(t_1, t_2)$	Point estimate of the mean accumulated down time over the time interval $[t_1, t_2]$
$MAUT(t_1, t_2)$	Mean accumulated up time over the time interval $[t_1, t_2]$
$\hat{MAUT}(t_1, t_2)$	Point estimate of the mean accumulated up time over the time interval $[t_1, t_2]$
MDT	Mean down time
$\hat{MDT}$	Point estimate of the mean down time
METBF	Mean (elapsed) time between failures
MFDT	Mean fault detection time, i.e. the expectation of the fault detection time
MLD	Mean logistic delay
$\hat{MLD}$	Point estimate of the mean logistic delay
MMAT	Mean maintenance action time, i.e. the expectation of a given maintenance action time
MRT	Mean repair time
$\hat{MRT}$	Point estimate of the mean repair time
MOTBF	Mean operating time between failures
MTD	Mean technical delay, i.e. the expectation of the technical delay
MTTF	Mean time to failure
$\hat{MTTF}$	Point estimate of the mean time to failure
MTTR	Mean time to restoration
$\hat{MTTR}$	Point estimate of the mean time to restoration
MUT	Mean up time
$\hat{MUT}$	Point estimate of the mean up time
RT_i	Observed repair time of item i
TTF_i	Time to failure of item i
VRT	The variance of repair time, $VRT = Var[\zeta] = E[\zeta^2] - MRT^2$, where ζ is a random variable representing the repair time, Var denotes the variance and E denotes the expectation

4.3 Symbols used in this standard

Symbol	Meaning
$[t_1, t_2]$	Interval where t_1 is the lower bound and t_2 the upper bound ($t_1 < t_2$)
$Ast_i(t_1, t_2)$	Mean accumulated sojourn time in state i over the interval $[t_1, t_2]$
A	Asymptotic availability
$A(t)$	Instantaneous availability (availability function), i.e. the probability of the item being in an up state at the instant of time t
$\bar{A}(t_1, t_2)$	Mean availability for the time interval $[t_1, t_2]$
$\bar{A}$	Asymptotic mean availability
$\hat{A}(t_1, t_2)$	Point estimate of the mean availability for the time interval $[t_1, t_2]$
Δt	Small strictly positive increment of time. $\Delta t > 0$
dt	Infinitesimal strictly positive increment of time (i.e. Δt which tends to zero)
$E[.]$	Expectation
$F_U(t)$	Up time distribution function
$f_U(t)$	Probability density function of the up times
	NOTE For COIs, $f_U(t) = f(t)$.
$f(t)$	Probability density function of the (operating) times to failure
$\hat{f}(t)$	Point estimate at time t of the probability density function of the (operating) time to failure
$f_{R+U}(t)$	Probability density function of the sum of the time to restoration and the following up time
$G(t)$	Distribution function of the repair times
$G_{ACM}(t)$	Distribution function of the active corrective maintenance time
$G_R(t)$	Distribution function of the times to restoration
$g(t)$	Probability density function of the repair times
$\hat{g}(t)$	Point estimate at time t of the probability density function of the repair time
$g_{ACM}(t)$	Probability density function of the active corrective maintenance times
$g_{AD}(t)$	Probability density function of the administrative delays
$g_D(t)$	Probability density function of the down times
$g_{LD}(t)$	Probability density function of the logistic delays
$g_{MA}(t)$	Probability density function of the given maintenance action time
$g_R(t)$	Probability density function of the times to restoration
$h_{CTTF}^{(n)}(t)$	Probability density function of calendar time to the n th failure, $n \geq 1$
K_A, K_S, K_i	Nominal (production) capacity related to an item A, a system S or a state i
$K(t)$	Instantaneous (production) capacity related to a system
k	Number of repair times during a given period of observation

Symbol	Meaning
k_{ACM}	Number of active corrective maintenance times during a given period of observation
k_{AD}	Number of administrative delays during a given period of observation
k_D	Number of down times during a given period of observation
k_F	Number of failures during a given period of observation
k_{LD}	Number of logistic delays during a given period of observation
k_O	Number of failures while operating during a given period of observation
k_R	Number of times to restoration during a given period of observation
k_U	Number of up times during a given period of observation
λ	Constant failure rate, i.e. the reciprocal of mean time to failure (MTTF) when time to failure is exponentially distributed
$\lambda(t)$	Instantaneous failure rate
$\lambda(\infty)$	Asymptotic failure rate
$\hat{\lambda}$	Point estimate of the constant failure rate
$\hat{\lambda}(t)$	Point estimate of the instantaneous failure rate at time t
$\bar{\lambda}(t_1, t_2)$	Mean failure rate for the time interval $[t_1, t_2]$
λ_U	Constant up-time hazard rate function, i.e. the reciprocal of the mean up time (MUT) when up times are exponentially distributed NOTE 1 For COIs, $\lambda_U = \lambda$
$\lambda_U(t)$	The up-time hazard rate function NOTE 2 For COIs, $\lambda_U(t) = \lambda(t)$
$\lambda_V(t)$	Conditional failure intensity (Vesely failure rate)
$\lambda_V(\infty)$	Asymptotic conditional failure intensity (Asymptotic Vesely failure rate)
$M(t)$	Maintainability function, i.e. the probability of completing a given maintenance action within time t : $M(t) = M(t_1, t_2)$ for $t_1 = 0$ and $t_2 = t$
$\hat{M}(t)$	Point estimate at time t of the maintainability function
$M(t_1, t_2)$	Maintainability for the time interval $[t_1, t_2]$
m	Number of observed maintenance action times
$m_{MAT}(t)$	Number of maintenance action times with duration greater than t ($m_{MAT}(0) = m$)
μ	Constant repair rate, i.e. the reciprocal of the mean repair time (MRT) when the repair times are exponentially distributed
$\mu(t)$	Instantaneous repair rate
$\hat{\mu}(t)$	Point estimate at time t of the instantaneous repair rate
μ_{ACM}	Reciprocal of the mean active corrective maintenance time (MACMT) when the active corrective maintenance times are exponentially distributed

Symbol	Meaning
μ_{AD}	Reciprocal of the mean administrative delay (MAD) when the administrative delays are exponentially distributed
μ_D	Reciprocal of the mean down time (MDT) when the down times are exponentially distributed
μ_{LD}	Reciprocal of the mean logistic delay (MLD) when the logistic delays are exponentially distributed
μ_{MA}	Constant rate of the completion of a given maintenance action, when the maintenance action time is exponentially distributed
μ_R	Constant restoration rate, i.e. the reciprocal of the mean time to restoration (MTTR) when the times to restoration are exponentially distributed
$N(t)$	Number of failures occurring in the time interval $[0, t]$
$N_R(t)$	Number of restorations occurring in the time interval $[0, t]$
n	Number of items in the population
$n_D\{t\}$	Number of items that are in a down state at the instant of time t
$n_F(t, t + \Delta t)$	Number of failures observed during the time interval $[t, t + \Delta t]$, where the time scale includes both up and down times
$n_F(t_1, t_2)$	Number of failures observed during the time interval $[t_1, t_2]$, where the time scale includes both up and down times
$n_R(t)$	Number of repairable items that are still under repair at the instant of time t ($n_R(0) = n$)
$n_R(t + \Delta t) - n_R(t)$	Number of items with repair completed in the time interval $[t, t + \Delta t]$
$n_S(t)$	Number of (non-repairable) items that are still operational at the instant of time t ($n_S(0) = n$)
$n_S(t_1, t_2)$	Number of items that were operational at the instant of time t_1 and operated without failure in the time interval $[t_1, t_2]$
$n_S(t + \Delta t) - n_S(t)$	Number of items that fail in the time interval $[t, t + \Delta t]$
$n_U\{t\}$	Number of items that are in an up state at the instant of time t
$v(t)$	Instantaneous restoration intensity
$P(.)$	Probability. The dot stands for any relevant event or random variable
$P_i(t), P_i^{(av)}(t), P_i^{(rel)}(t)$	Probability of state i in state-transition models, probability of state i for an "availability" Markov graph (see 6.1.2.1), probability of state i for a "reliability" Markov graph (see 6.1.3.1)
$Prod(t)$	Instantaneous production at time t
$\overline{Prod(t_1, t_2)}$	Mean production availability over the time interval $[t_1, t_2]$
$R(t)$	Reliability function, i.e. the probability of survival until time t $R(t) = R(t_1, t_2)$ for $t_1 = 0$ and $t_2 = t$
$\hat{R}(t)$	Point estimate at time t of the reliability function
$R(t_1, t_2)$	Reliability for the time interval $[t_1, t_2]$
$\hat{R}(t_1, t_2)$	Point estimate for the time interval $[t_1, t_2]$ of the reliability function
$R(t, t + x t)$	Conditional reliability for the time interval $[t, t + x]$, assuming that the item is in up state at time t
ρ	Production per unit of time

Symbol	Meaning
t	Instant in time
T	Instant in time or duration depending on the context
$\overline{Tbf}(t)$	Mean elapsed time between the consecutive failures occurring over the time interval $[0, t]$
τ	Instant in time or tests interval depending on the context
U	Asymptotic unavailability
$U(t)$	Instantaneous unavailability (unavailability function)
$\overline{U}(t_1, t_2)$	Mean unavailability for the time interval $[t_1, t_2]$
$\overline{U}$	Asymptotic mean unavailability
$\hat{\overline{U}}(t_1, t_2)$	Point estimate of the mean unavailability for the time interval $[t_1, t_2]$
$V(t_1, t_2)$	Mean number of restorations over the time interval $[t_1, t_2]$
$Z(t)$	Expected number of failures in the time interval $[0, t]$ $Z(t) = E[N(t)]$, where E denotes the expectation
$z(t)$	Instantaneous failure intensity (failure frequency)
$z(\infty)$	Asymptotic failure intensity
$\hat{z}(t)$	Point estimate of the instantaneous failure intensity at time t
$\overline{z}(t_1, t_2)$	Mean failure intensity for the time interval $[t_1, t_2]$
$\hat{\overline{z}}(t_1, t_2)$	Point estimate of the mean failure intensity for the time interval $[t_1, t_2]$

5 General models and assumptions

5.1 Constituents of up and down times

In order to understand the mathematical expressions included in this standard, it is important to understand what constitutes up time and down time. IEC 60050-192 splits the up time (where the item performs as required) and down time (where the item does not perform as required) into their constituents. This is summarized in Figure 1 and Figure 2 in IEC 60050-192:2015 which also provides definitions of mean values for some of those constituents.

Figure 1 and Figure 2 (that have been adapted from IEC 60050-192) respectively summarize the constituents of up time and down time which are relevant to this standard. (Neither the “preventive maintenance time” nor the “externally disabled” time have been considered). The acronyms for the mean values included in this standard have been added in Figures 1 and 2.

Up time [192-02-02]		
Enabled time [192-02-17]		
Operating time [192-02-05]	Non operating time [192-02-07]	
	Idle time [192-02-15]	Standby time [192-02-13]
MUT [192-08-09]		

IEC

Figure 1 – Constituents of up time

Down time [192-02-21]						
Non-operating time [192-02-07]						
Time to restoration [192-07-06]						
Corrective maintenance time [192-07-07]					Fault detection time [192-07-11]	Administrative delay [192-07-12]
Logistic delay [192-07-13]	Active corrective maintenance time [192-07-10]					
	Technical delay [192-07-15]	Repair time [192-07-19]				
		Fault localization time [192-07-18]	Fault correction time [192-07-14]	Function checkout time [192-07-16]		
MLD [192-07-27]	MTD	MRT [192-07-21]			MFD	MAD [192-07-26]
	MACMT [192-07-22]					
MTTR [192-07-23]						
MDT [192-08-10]						

IEC

Figure 2 – Constituents of down time

IEC 60050-192 defines several acronyms for mean time related to the item failures occurring during the operating state. This is summarized in Figure 3.

Non-repairable item [192-01-12]			
Operating time to 1st failure [192-05-02]	Operating time to failure [192-05-01]	Operating time between failures [192-05-04]	(Elapsed) time between failures [192-05-03]
MTTFF [192-05-12]	MTTF [192-05-11]	MOTBF / MTBF [192-05-13]	METBF
Repairable item [192-01-11]			

IEC

Figure 3 – Acronyms related to failure times

NOTE In text books on the subject of reliability, the acronym MTBF is often used for the mean time between failures. According to IEC 60050-192, this acronym is used for the mean "operating" time between failures. Therefore to avoid any confusion, the acronym METBF (see 3.3) is used in this standard for the mean time between failures.

5.2 Introduction to models and assumptions

In order to derive correct mathematical expressions for selected dependability measures defined in IEC 60050-192, distinction is made between items considered as a whole (individual items) and items made of several individual items (systems). The following classes of items are considered separately in this standard:

- Systems;
- Individual items:
 - non-repairable items [192-01-12];
 - repairable items [192-01-11]:
 - i) with zero time to restoration;
 - ii) with non-zero time to restoration.

NOTE 1 The term "item" is used in this standard when it applies to systems and individual items.

NOTE 2 The term "non-repairable" item encompasses items which are either not repairable or are repairable but are not repaired when failed. The term "repairable" item encompasses only those items which are repairable and actually repaired when failed.

In order to keep the standard self-contained and the mathematical formulae as simple as possible, the following basic mathematical models are used to quantify dependability measures:

- state-transition models for systems;
- renewal processes for individual items.

The general way to model an item is to identify its various states and to analyse how it goes from state to state when the time is elapsing: this can be done by using state-transition models. Such models are useful in illustrating the development of the mathematical expressions for various dependability measures. When no particular assumptions are made regarding the probabilistic distributions, these models can be handled only in particular and simple cases using analytical calculations. Otherwise Monte Carlo simulation needs to be used. This is why, for systems, as well as individual items, the hypothesis of constant transition rates, is often made in order to use Markovian models which are well known and for which powerful analytical algorithms are available.

For individual items, under the assumption that they have only two states, the general formulae with non-constant transition rates can be derived to some extent. This is shown in 6.2, 6.3 and 6.4:

- non-repairable individual items: this is the simplest mathematical model as only one random variable applies: the time to failure of the item [192-05-01]. It can be characterized by its reliability $R(t)$, its instantaneous failure rate, $\lambda(t)$ [192-05-06], also referred to as the hazard rate associated with the time to failure distribution (i.e. the unreliability function) or its mean time to failure MTTF [192-05-11] which is also its mean time to first failure MTTF [192-05-12].
- repairable individual items: the basic model is a simple (ordinary) renewal process, when the time to restoration of the item may be neglected, or a simple (ordinary) alternating renewal process in which the time to restoration of the item is non-zero. In the latter case, the item alternates between an up state and a down state, and, in addition to the common dependability measures, a widely used measure of reliability of the item is the failure intensity [192-05-08], which, in this case, is equal to the renewal density.

To avoid improper use of these mathematical expressions, which could yield erroneous results, the specific assumptions detailed in 5.4 and 5.5 should be observed.

In order to allow for easy comprehension, some definitions have been repeated in different parts of this standard, as needed.

5.3 State-transition approach

A simple way to introduce the dependability concepts is to analyse the behaviour of an item (i.e. an individual item or a system) during its evolution between up and down states.

This can be done by using a state-transition graph such as the one presented in the right hand side of Figure 4. It is related to the system represented by the reliability block diagram (see IEC 61078 [25]) on the left hand side of the figure. This system is made of three similar blocks (A_i) organized in a two out of three architecture and of one block B in standby position which immediately takes over the function of the first of the blocks A_i going to its down state. The switching between A_i and B is considered to be perfect (i.e. instantaneous and without failure).

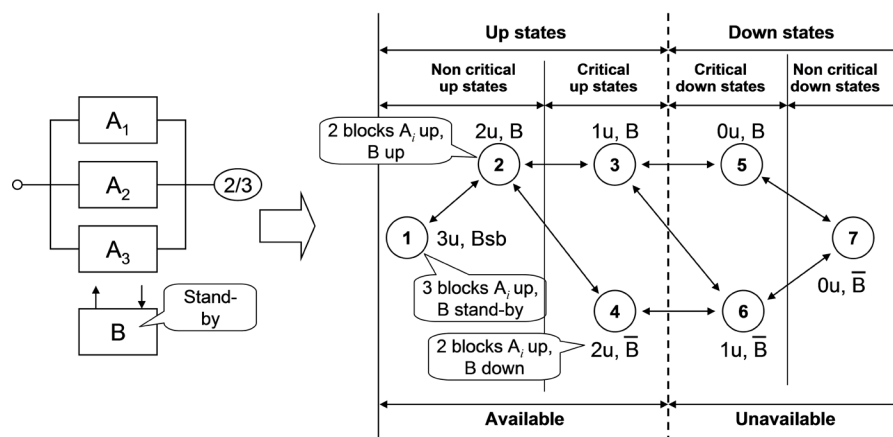


Figure 4 – Simple state-transition diagram

As the blocks (A_i) are similar, the similar states can be aggregated to obtain the state-transition diagram presented in the right hand side of Figure 4. It comprises seven states represented by circles and sixteen transitions represented by arrows. For example, the state 3 aggregates three similar states (A_1 and B in up states and other blocks in down states, A_2 and B in up states and other blocks in down states, A_3 and B in up states and other blocks in down states) and the line with arrows on each end between states 2 and 3 means that the system can have transitions from 2 to 3 and from 3 to 2.

This state-transition diagram is sufficient to identify the classes of states which are essential to define and understand the key dependability measures (e.g. availability, reliability, failure rate, failure intensities, failure density).

The states can be grouped into two main classes which can furthermore be subdivided in two sub classes:

- system up state class: states 1, 2, 3 and 4 (where at least 2 of the blocks are in up states). It is subdivided into:
 - non critical up state class: states 1 and 2 which are separated from the down state class by more than one transition;
 - critical up states class: states 3 and 4 which are separated from the down state class by only one transition;
- system down state class: 5, 6 and 7 (where less than 2 of the blocks are in up states). It is subdivided into:
 - non critical down state class: state 7 which is separated from the up state class by more than one transition;
 - critical down state class: states 5 and 6 which are separated from the up state class by only one transition.

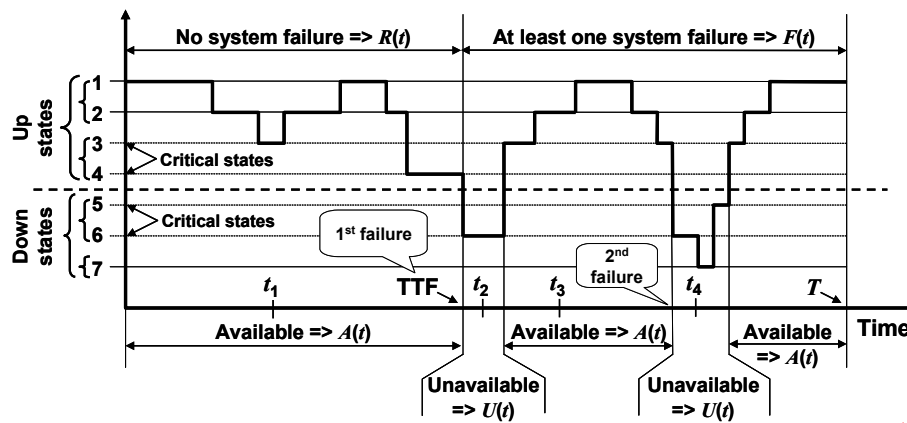


Figure 5 – Sample realization (chronogram) related to the system in Figure 4

When the transitions between the states occur randomly (e.g. according to failures and restorations of the various blocks) the behaviour of the system constitutes a stochastic process. One example of realization of this stochastic process (i.e. a trajectory of the process) over a time interval $[0, T]$ is illustrated in Figure 5:

- the system is in up state (i.e. available) at time t_1 , t_3 or T ;
- the system is in down state (i.e. unavailable) at time t_2 or t_4 ;
- the system has been continuously in up state (i.e. reliable) until the first failure at TTF (time to failure).

This example encompasses all the cases which can be encountered.

5.4 Model and assumptions for non-repairable individual items

This applies both to individual items alone and individual items that are a part of a system. This is the simplest particular example which can be derived from Figure 5 because only two states have to be considered (see Figure 6 and Figure 7).

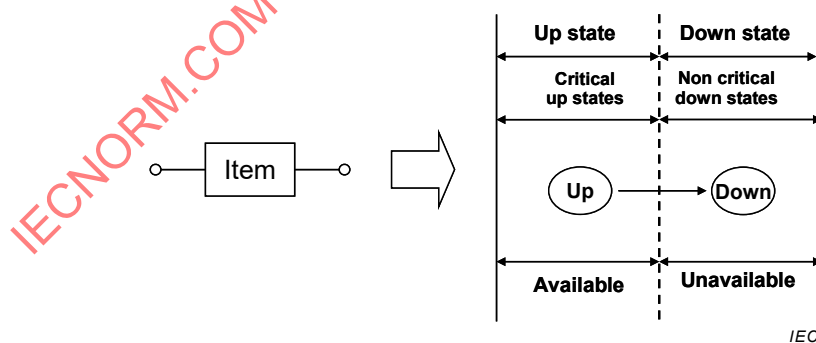
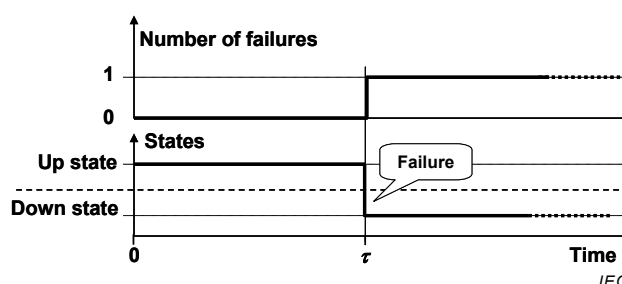


Figure 6 – State-transition diagram of a non-repairable individual item

At any instant of time, the non-repairable item will be either in:

- the up state from which the item can fail (i.e. goes to the down state) at time τ (time to failure);
- the down state where the item is failed and remains here for eternity.

Therefore in this simple case, the up state is also a critical up state and the down state is a non critical down state as no repair can occur. The behaviour of such an item is illustrated in Figure 7.

**Key**

τ Time to failure

Figure 7 – Sample realization of a non-repairable individual item

The number of observed failures, for this case, may be 0 or 1 and the number of repairs is equal to 0.

Unless otherwise stated, the assumptions used to derive the mathematical formulae are the following:

- When the item is in an up state, it is considered to be operating continuously.

NOTE The mathematical expressions given in 5.4 may not always be valid for IOIs.

- At time $t = 0$, the item is in an operating state, and is as good as new. Latent faults are not considered, which, if present, may invalidate some mathematical expressions.
- Preventive maintenance, or other planned actions that render the item incapable of performing a required function are not considered.
- The time to failure is a positive and continuous random variable with a probability density function and finite expectation.

5.5 Assumptions and model for repairable individual items

5.5.1 Assumption for repairable individual items

Unless otherwise stated, the assumptions used to derive the mathematical formulae are the following:

- At time $t = 0$, the item is in an up state and as good as new. Therefore, $R(0) = A(0) = 1$. Latent faults are not considered.
- When the item is in the up state, it is considered to be operating continuously.
- Consecutive up times of the item are statistically independent, identically distributed, positive, continuous random variables with a common probability density function and finite expectation.
- In the case of non-zero down-time duration, the consecutive down times of the item are statistically independent, identically distributed, positive, continuous random variables with a common probability density function and finite expectation.
- The up times are statistically independent of the down times.
- Preventive maintenance or other planned actions that render the item incapable of performing a required function are not considered.
- Unless otherwise stated, other random variables (e.g. time to failure, repair time, logistic delay) considered in the standard, are positive and continuous random variables with probability density functions and finite expectations.

In summary:

- any transition from an up state to a down state is a failure;
- any transition from a down state to an up state is a restoration;

- any down state is a fault and, in consequence, the down time is equal to the time to restoration;
- after each restoration an individual item is as good as new.

NOTE 1 With the last assumption, all mathematical expressions for the reliability measures relating to the time to failure of a non-repairable individual item can also be applied to each time to failure of a continuously operating repairable individual item.

NOTE 2 The components of a system are as good as new after restoration but the whole system becomes as good as new only when all the failed components have been restored.

5.5.2 Instantaneous repair

This applies both to individual items alone and individual items that are a part of a system and are independent of each other. This is another simple example which can be derived from Figure 5. Here also only two states have to be considered (see Figure 8 and Figure 9) but the down state is a zero-duration state because repairs are instantaneous.

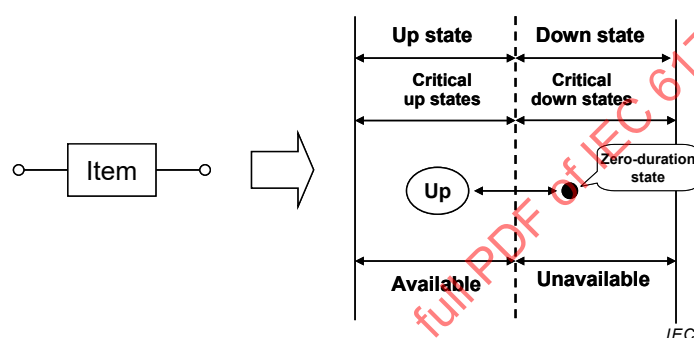


Figure 8 – State-transition diagram of an instantaneously repairable individual item

At any instant of time, the repairable item will be either in:

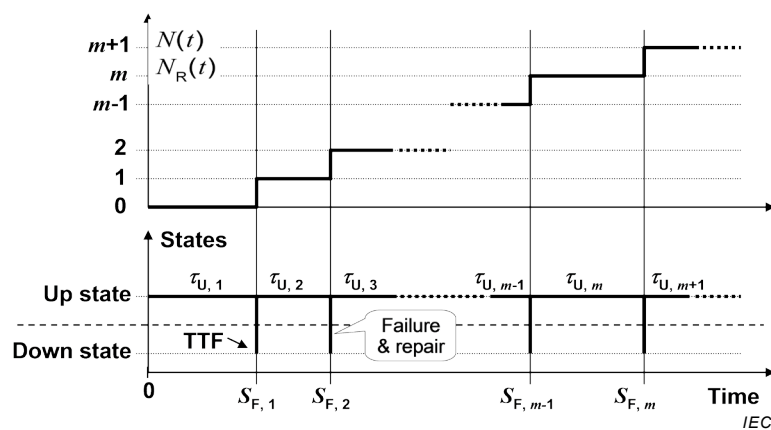
- the up state from which the item can fail (i.e. goes to the down state). In Figure 9, $S_{F,1}$, $S_{F,2}$, $S_{F,3}$... are instants of failure;
- the down state where the item is instantaneously repaired (i.e. goes to the up state). In Figure 9, $S_{F,1}$, $S_{F,2}$, $S_{F,3}$... are also instants of repairs.

The behaviour of such an item is illustrated in Figure 9. When the item is as good as new after repair, it can be modelled by a simple (ordinary) renewal process.

The repairable item being in up state at any instant of time, is available at any time. Therefore this model is mainly useful to count the number of failures occurring over a given time interval (see Figure 9).

When this approach is used to model an item without considering the times to restoration, the time considered in Figure 9 comprises only the operational times and this model allows to calculate the number of failures over a given accumulated duration of operational time.

When this approach is used to model an item where the times to restoration are small compared to the times to failures, the time considered in Figure 9 is the calendar time which encompasses both the operational and the restoration times. This calendar time overestimates the operational time and the calculated number of failures is conservative.

**Key**

$N(t)$	Number of failures during the time interval $[0, t]$
$N_R(t)$	Number of restorations during the time interval $[0, t]$
$S_{F,1}, S_{F,2}, S_{F,3}$	Consecutive instants of failure
$\tau_{U,1}, \tau_{U,2}, \tau_{U,3}$	Consecutive up times

Figure 9 – Sample realization of a repairable individual item with zero time to restoration

5.5.3 Non-instantaneous repair

This is the same case as in 5.5.2 except that the down state lasts for some time as the repairs are not instantaneous (see Figure 10 and Figure 11).

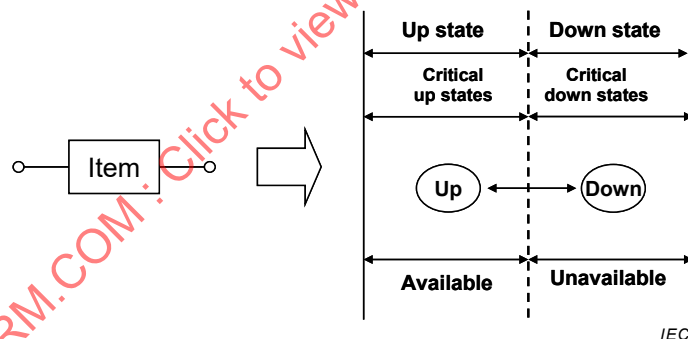
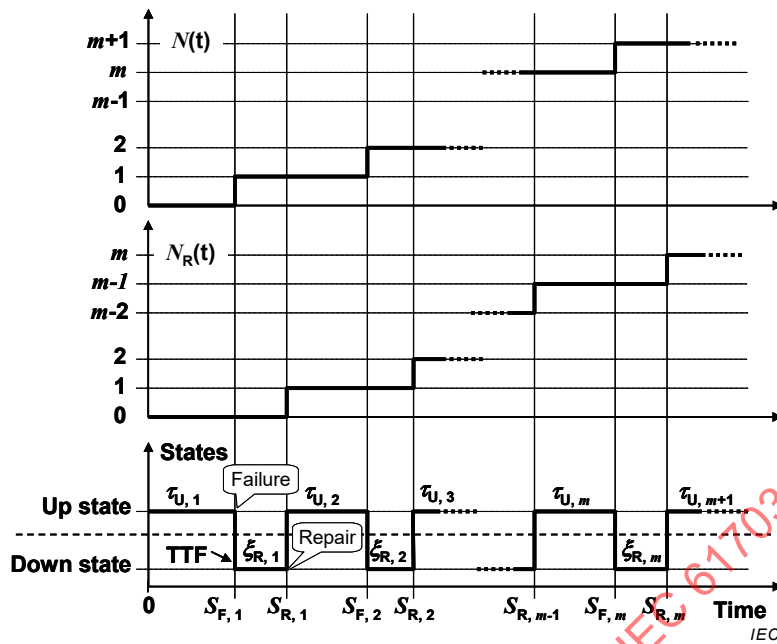


Figure 10 – State-transition diagram of a repairable individual item

At any instant of time, the repairable individual item will be either in:

- the up state from which the item can fail (i.e. can go to the down state). In Figure 11, $S_{F,1}, S_{F,2}, S_{F,3} \dots$ are instants of failure;
- the down state where the item can be repaired (i.e. can go to the up state). In Figure 11, $S_{R,1}, S_{R,2}, S_{R,3} \dots$ are instants of repairs;

The behaviour of such an item is illustrated in Figure 11. When the item is as good as new after repair it can be modelled by a simple (ordinary) alternating renewal process.



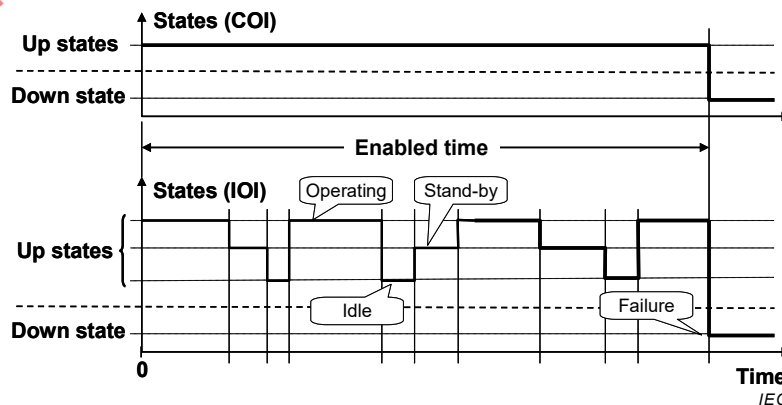
Key

$N(t)$	Number of failures during the time interval $[0, t]$
$N_R(t)$	Number of restorations during the time interval $[0, t]$
$S_{F,1}, S_{F,2}, S_{F,3}$	Consecutive instants of failure
$S_{R,1}, S_{R,2}, S_{R,3}$	Consecutive instants of restoration
$\tau_{U,1}, \tau_{U,2}, \tau_{U,3}$	Consecutive up times
$\xi_{R,1}, \xi_{R,2}, \xi_{R,3}$	Consecutive times to restoration

Figure 11 – Sample realization of a repairable individual item with non-zero time to restoration

5.6 Continuously operating items (COI) versus intermittently operating individual items (IOI)

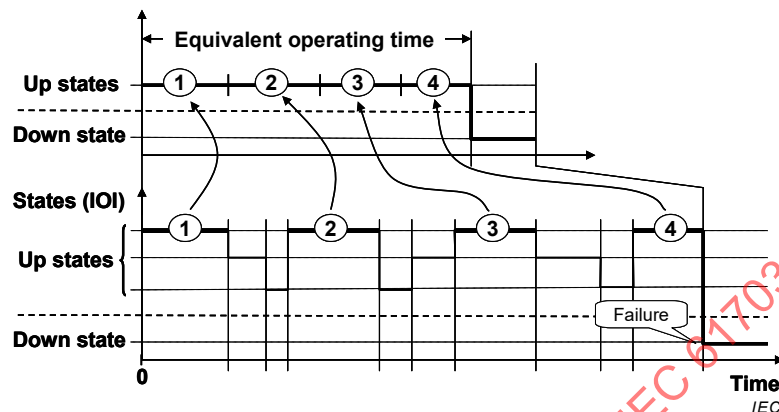
For continuously operating items (COI), the up state is reduced to the operating state, and then the up time is equal to the operating time. For intermittently operating items (IOI), the up state class is split between several types of states: for example operating state [192-02-04], idle state [192-02-14], and stand-by state [192-02-10] (see Figure 12).



NOTE For COI, Enabled time = Operating time; for IOI, Enabled time = Operating time + Standby time + Idle time.

Figure 12 – Comparison of an enabled time for a COI and an IOI

The expressions for reliability measures of continuously operating, repairable items may not be true for IOIs. Nevertheless, when it is assumed that the item cannot fail (i.e. go to the down state) when it is not in operating state, the expressions remain valid provided that the equivalent operating time is used as illustrated in Figure 13. If the item fails during non-operating states (e.g. idle or stand-by states), general stochastic processes like those presented in Figure 5 should be considered.



NOTE The equivalence illustrated is valid only if the item cannot fail during stand-by or idle positions.

Figure 13 – Equivalent operating time for IOI items

6 Mathematical models and expressions

6.1 Systems

6.1.1 General

The state graph drawn in Figure 14 will be used to explain the various terms. It models a system made of two redundant repairable components A and B. It comprises only 4 states: 3 up states of which 2 are critical and a single critical down state. This simple system is sufficient to illustrate the concepts of availability/unavailability, reliability/unreliability, failure rate, failure density and conditional and unconditional failure intensities.

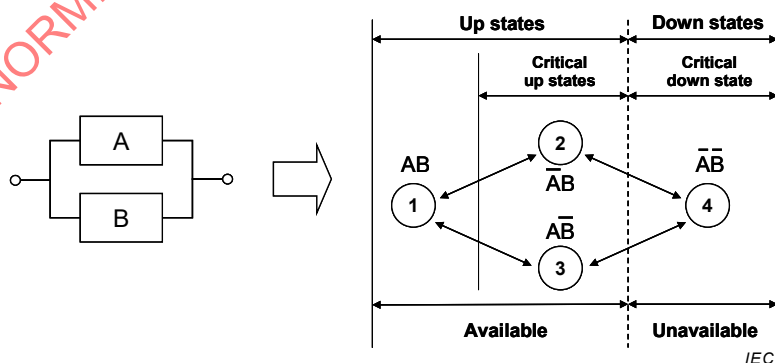


Figure 14 – State-transition graph for a simple redundant system

In this state-transition graph no assumptions are made about the rules of transition allowing the system to go at time t from a state, i , to another one, j . In the general case, this depends both on the states i and j but also on the time spent in the state i before the transition occurs and on the way the state i has been previously reached. Therefore, except in particular cases, there are generally no simple analytical expressions available and Monte Carlo simulation has to be implemented.

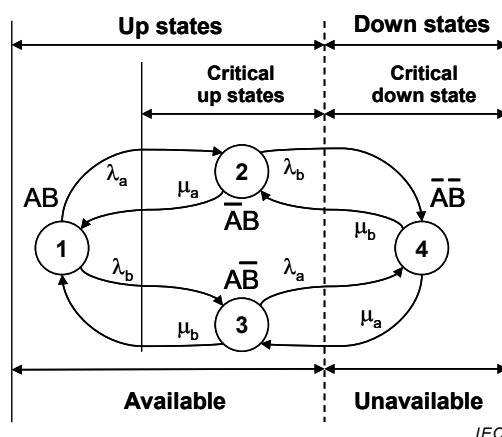


Figure 15 – Markov graph for a simple redundant system

Fortunately, the failure and repair rates of components can often be considered as reasonably constant and, the state-transition graph becomes a Markov graph [27] allowing analytical calculations. In this case the rules of transition from a state i to another one j are described by constant transition rates which depend only on the states i and j . Then, when the components A and B of the above example have constant failures (λ_a , λ_b) and repair rates (μ_a , μ_b), Figure 14 can be drawn as the Markov graph shown in Figure 15.

This Markov graph is used to derive mathematical expressions valid when the Markovian assumption is verified. Algorithms are available to calculate the probabilities of the various states. Figure 16 shows the typical evolution of the state probabilities when the time elapses. These curves have been drawn with the following parameters: $\lambda_a = 2 \text{ year}^{-1}$, $\lambda_b = 3 \text{ year}^{-1}$ and $\mu_a = \mu_b = 10 \text{ year}^{-1}$.

The failure rates have been chosen high and the repair rates relatively low: this leads to a rather low availability but allows to clearly visualize the transient period before the asymptotic values are reached.

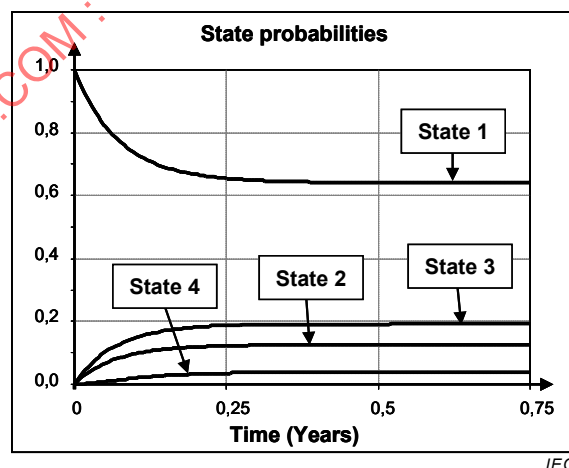


Figure 16 – Evolution of the state probabilities related to the Markov model in Figure 15

6.1.2 Availability related expressions

6.1.2.1 Instantaneous availability [192-08-01] and instantaneous unavailability [192-08-04]

According to its definition, the instantaneous availability, $A(t)$, is the probability that an item is in a state to perform as required at a given instant t .

According to its definition [192-02-01], an up state is a state of being able to perform as required.

Therefore the instantaneous availability $A(t)$, is the probability to be in up state at a given time t :

$$A(t) = P(\text{up state at time } t)$$

In the same way, the instantaneous unavailability $U(t)$ is the probability to be in down state at a given time t :

$$U(t) = P(\text{down state at time } t)$$

and

$$A(t) = 1 - U(t)$$

With regard to the state-transition graph (Figure 14), or the Markov graph (see Figure 15) the instantaneous availability and the instantaneous unavailability of the modelled item are the following:

$$A(t) = P_1(t) + P_2(t) + P_3(t)$$

$$U(t) = P_4(t)$$

The evolution of $A(t)$ and $U(t)$ is illustrated in Figure 17. The curves in this figure have been drawn by using the values of the state probabilities presented in Figure 16.

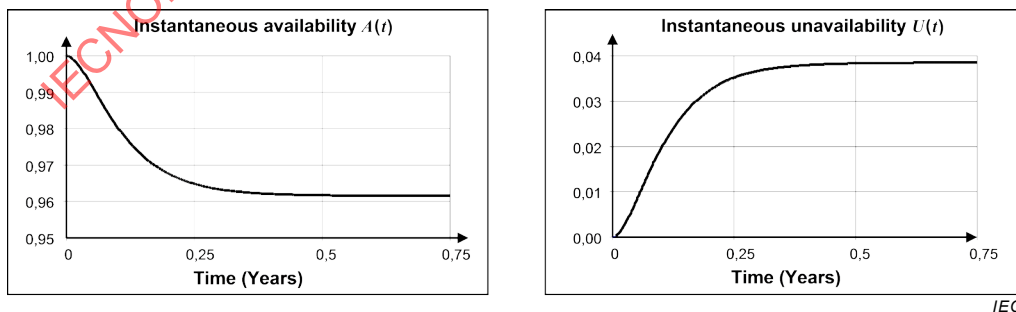


Figure 17 – Evolution of $A(t)$ and $U(t)$ related to the Markov model in Figure 15

NOTE The Markov graph in Figure 15 allows to calculate the system availability. To highlight this property, such a Markov graph is called “availability Markov graph”.

6.1.2.2 Steady state availability [192-08-07] and steady state unavailability [192-08-08]

The steady state availability A is the limit, if it exists, of the instantaneous availability:

$$A = \lim_{t \rightarrow \infty} A(t)$$

In the same way the steady state unavailability is given by:

$$U = \lim_{t \rightarrow \infty} U(t)$$

The steady state values exist in the Markovian case because the probabilities $P_i(t)$ of the states reach asymptotical values P_i (see e.g. Figure 16). When a steady state is reached (see NOTE), the asymptotic probabilities represent also the proportion of the time spent in the corresponding states. This allows also to calculate the mean availability or the mean unavailability (see Figure 17).

NOTE The steady state does not characterize a state of the item itself but a state of the underlying stochastic process which becomes stationary. Such a steady state exists if, when the time increases, a statistical equilibrium is reached where the probability for the item to go into a given state becomes equal to the probability for the item to go out of this state. In this case, the probability to be in a given state reaches a steady state value (i.e. an asymptotic value) which characterizes the fact that the steady state is reached. By extension, the term "steady state of an item" is used to denote the steady state of its underlying stochastic process modelling how it goes from a state to another. See reference [27] for more details about the steady state of Markov processes.

6.1.2.3 Mean availability [192-08-05] and mean unavailability [192-08-06]

6.1.2.3.1 General formulae for mean availability and unavailability

The mean availability $\bar{A}(t_1, t_2)$ over an interval $[t_1, t_2]$ is simply calculated through the integration of the instantaneous availability $A(t)$ divided by the time interval:

$$\bar{A}(t_1, t_2) = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} A(t) dt$$

It can also be calculated through the sum of the mean accumulated sojourn times $Ast_i(t_1, t_2)$ spent in the up states i over the time interval $[t_1, t_2]$:

$$Ast_i(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} P_i(t) dt$$

Therefore, the mean availability is obtained by the following formula:

$$\bar{A}(t_1, t_2) = \frac{\sum_{i \in \text{up state}} Ast_i(t_1, t_2)}{t_2 - t_1}$$

In the same way, the mean unavailability $\bar{U}(t_1, t_2)$ is defined as:

$$\bar{U}(t_1, t_2) = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} U(t) dt = \frac{\sum_{j \in \text{down states}} Ast_j(t_1, t_2)}{t_2 - t_1}$$

NOTE The mean unavailability is called PFDavg (average of the probability of failure on demand) when it is used in the context of the functional safety of safety instrumented systems (e.g. IEC 61508 [21] or IEC 61511 [22]).

For the state-transition graph (see Figure 14) or the Markov graph (see Figure 15), the mean availability and the mean unavailability of the modelled item are as follows:

$$\bar{A}(t_1, t_2) = \frac{Ast_1(t_1, t_2) + Ast_2(t_1, t_2) + Ast_3(t_1, t_2)}{t_2 - t_1}$$

$$\bar{U}(t_1, t_2) = \frac{Ast_4(t_1, t_2)}{t_2 - t_1}$$

Algorithms are available to calculate the mean accumulated sojourn times in the Markovian model. This is illustrated in Figure 18.

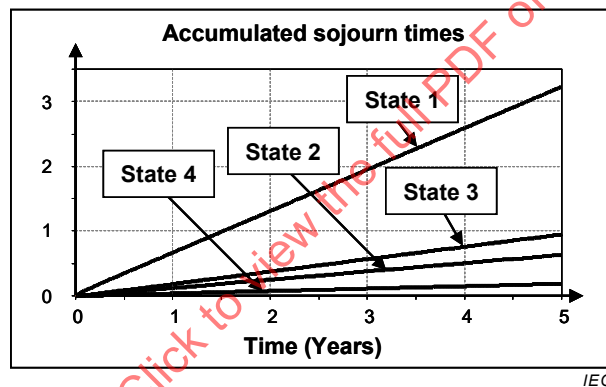


Figure 18 – Evolution of the $Ast_i(0, t)$ related to the Markov model in Figure 15

The mean accumulated time spent in the various states can be obtained by collecting the field feedback of the item. Therefore the mean availability or unavailability can be statistically estimated. This makes the link between mathematical calculations and actual observed data (field feedback).

6.1.2.3.2 Asymptotic mean availability and asymptotic mean unavailability

When a steady state exists, $A(t)$ has an asymptotic value A and the unavailability $U(t)$ an asymptotic value U . It follows from elementary calculus (see NOTE hereafter and reference [7] for more details) that in this case, these asymptotic values are also the average values over the interval of time $[t_1, t_2]$ when $t_2 \rightarrow \infty$. Therefore, the asymptotic average availability is given by:

$$\bar{A} \stackrel{\text{def.}}{=} \lim_{t_2 \rightarrow \infty} \bar{A}(t_1, t_2) = \lim_{t_2 \rightarrow \infty} \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} A(t) dt = A$$

As $t_2 > t_1$, the above formula is also valid for an interval of time $[t_1, t_2]$ when $t_1 \rightarrow \infty$ because in this case t_2 also $\rightarrow \infty$. Therefore it is valid for a time interval $[t_1, t_2 \rightarrow \infty]$ where the steady state is established at t_2 (e.g. a large time interval $[0, t_2 \rightarrow \infty]$) and also for a time interval $[t_1 \rightarrow \infty, t_2]$ where the steady state is established at t_1 (e.g. a small time interval $[t_1 \rightarrow \infty, t_1 + x]$).

The average availability for such intervals is given by:

$$\lim_{t_1 \rightarrow \infty} \bar{A}(t_1, t_2) = \lim_{t_2 \rightarrow \infty} \bar{A}(t_1, t_2) = \bar{A} = A$$

And, in the same way: $\lim_{t_1 \rightarrow \infty} \bar{U}(t_1, t_2) = \lim_{t_2 \rightarrow \infty} \bar{U}(t_1, t_2) = \bar{U} = U$

NOTE Mathematically speaking, the asymptotic value A and the steady state are reached when $t \rightarrow \infty$ but numerically speaking in many practical industrial cases $A(t)$ tends to A – with a sufficient accuracy – rather quickly. For example, for Markovian models where all the components have MTTR much smaller than MTTF the asymptotic value and the steady state are reached after duration equal to two or three times the highest MTTR of the components of the system.

With regard to the state-transition graph (see Figure 14) or the Markov graph (see Figure 15) and if a steady state exists, the steady state availability and the instantaneous unavailability of the modelled item are the following:

$$A = P_1 + P_2 + P_3$$

$$U = P_4$$

Those asymptotic values are illustrated in Figure 17.

At this stage it is possible to make the link between the asymptotic values and the mean up time (MUT) and the mean down time (MDT). When a steady state exists, the asymptotic availability and the asymptotic mean availability is given by (see references [9] and [10]):

$$\bar{A} = A = \frac{\text{MUT}}{\text{MUT} + \text{MDT}}$$

In the same way, the asymptotic unavailability and the asymptotic mean unavailability are given by:

$$\bar{U} = U = \frac{\text{MDT}}{\text{MUT} + \text{MDT}}$$

The above formulae have been established under the assumption that $A(t)$ or $U(t)$ reach asymptotic values. They can be used to estimate A and U from the data collection of field feedback about the up and down times. In certain cases they are still valid for $\bar{A}$ and $\bar{U}$ even if A and U do not exist. This is the case, for example, for systems implementing periodically tested components where $A(t)$ and $U(t)$ have no asymptotic values but where $\bar{A} = \lim_{t_2 \rightarrow \infty} \bar{A}(t_1, t_2)$

and $\bar{U} = \lim_{t_2 \rightarrow \infty} \bar{U}(t_1, t_2)$ can exist.

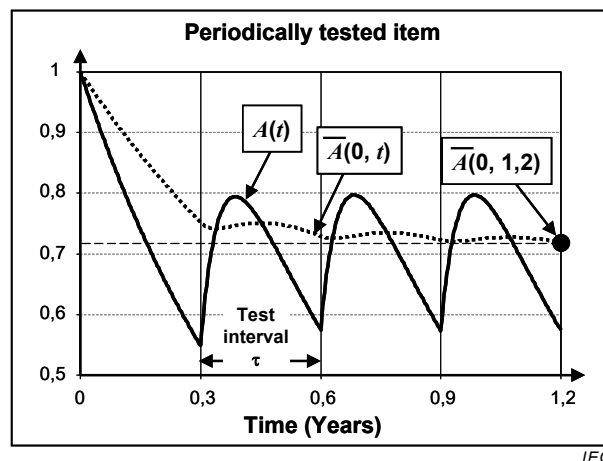


Figure 19 – Instantaneous availability and mean availability of a periodically tested item

Figure 19 illustrates the evolution of a normally dormant periodically tested item with a failure rate of 2 year^{-1} , a repair rate of 20 years^{-1} (MTTR = 438 h) and a test interval τ of 0,3 years (4 months). The instantaneous availability $A(t)$ decreases during the first test interval. If a failure occurs during the first test interval, its repair is started at the beginning of the second test interval. From this point, there is a competition between the cases where the item was in up state at the beginning of the second test interval (and which may go to the down state) and the cases where the system is under repair at the beginning of the second test interval (and which may go to the up state). Therefore $A(t)$ increases until a time roughly equal to the MTTR and then decreases until the next test. This gives the typical saw tooth curve shape which is the characteristic of the instantaneous availability of such periodically tested items. The instantaneous availability $A(t)$ has no asymptotic value but after some test interval the curve of $A(t)$ reaches a limit shape (i.e. the curve becomes identical from an interval to the next one) and keeps it for the further test intervals. Although $A(t)$ has no asymptotic value, the average availability $\bar{A}(0, t)$ does converge towards an asymptotic value (see the curve in dotted lines in Figure 19) which is equal to the average availability within a test interval located at infinity:

$$\bar{A} = \bar{A}(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} \bar{A}(0, t) = \lim_{i \rightarrow \infty} \bar{A}(i, \tau, [i+1] \cdot \tau) = \frac{\text{MUT}}{\text{MUT} + \text{MDT}}$$

As preventive maintenance is not taken under consideration in this document, the MDT can be replaced by the MTTR (see Figure 2) in the above formulae.

6.1.2.4 Extension of the availability concept to multi-states items

As defined earlier, availability concept is related to the up states of the item under consideration. No distinction is made between the states that are considered to be up states. The item in all of its up states is considered to provide the same service to the user. While this hypothesis may be relevant for individual items, this can be questioned when systems are involved. This is particularly the case for production systems used in industry to produce products like oil, gas, electricity, water, etc.

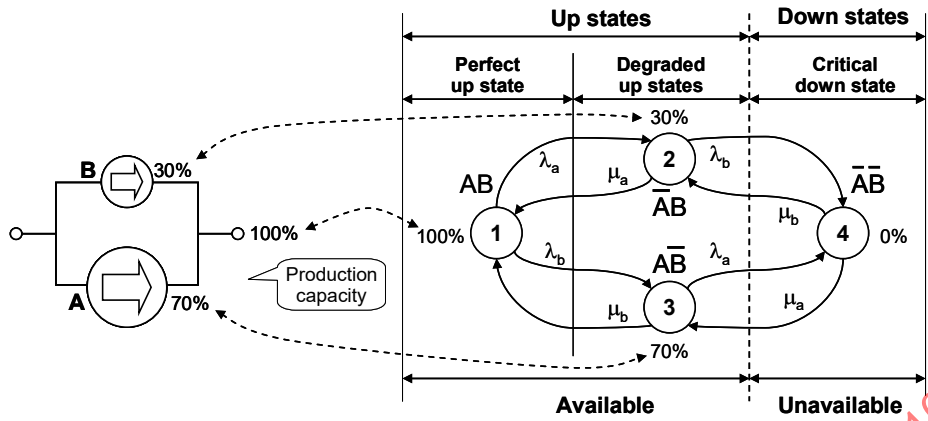


Figure 20 – Example of a simple production system

The left hand side of Figure 20 illustrates a simple production system made of 2 production units A and B. The nominal production per unit of time of the system is ρ (e.g. 5 m³ of water per hour, 1 500 loafs of bread per hour, ...). The unit A has a production capacity K_A equal to 70 % when the unit B has a capacity K_B equal to 30 %. Therefore the whole production system has a production capacity K_S equal to (70 % + 30 %) = 100 %.

NOTE A production item A with a production capacity of K_A provides a production of $K_A \cdot \rho$ per unit of time.

The Markov graph modelling this system is the same as the one presented in Figure 15. The difference is that the level of service provided is different for each up state:

- in state 1 the production per unit of time of the system is $1 \cdot \rho = \rho$
- in state 2 the production per unit of time of the system is $0,7 \cdot \rho$
- in state 3 the production per unit of time of the system is $0,3 \cdot \rho$

The down state 4 is characterized by a production per unit of time of $0 \cdot \rho = 0$.

From a production point of view, it is not possible to simply split the states into up and down states and it is necessary to refine the classification. Such a system is called multi-states (see [28]) because its states have to be split in more than two classes. The measure of interest of such a system is not its availability nor its reliability but the mean expected value of its production over a given time interval.

According to the above assumptions, the instantaneous production capacity $K(t)$ of the system at time t is equal to:

$$K(t) = 100\% \cdot P_1(t) + 30\% \cdot P_2(t) + 70\% \cdot P_3(t) + 0\% \cdot P_4(t)$$

This formula can easily be generalized to systems with n states:

$$K(t) = \sum_{i=1}^n K_i \cdot P_i(t)$$

From the production capacity, the instantaneous expected production $Prod(t)$ is given by:

$$Prod(t) = K(t) \cdot \rho$$

As a particular case of $K(t)$, it is found the conventional instantaneous availability [192-08-01] for which $K_i = 100\%$ for all the up states and $K_i = 0\%$ for all the down states. It is the same for $Prod(t)$ when, in addition, ρ is equal to 1. In these cases, $A(t) \equiv K(t) \equiv Prod(t)$.

Figure 21 illustrates the evolution of the instantaneous availability $A(t)$ and of the production capacity $K(t)$ at time t according to the above hypothesis.

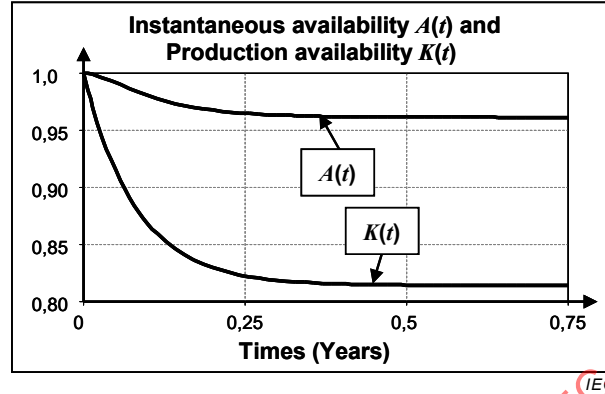


Figure 21 – Evolution of $A(t)$ and $K(t)$

The expected production $Prod(t_1, t_2)$ of the system over an interval $[t_1, t_2]$ can be calculated through the mean accumulated sojourn times spent in the various states:

$$Prod(t_1, t_2) = [100\% \cdot Ast_1(t_1, t_2) + 30\% \cdot Ast_2(t_1, t_2) + 70\% \cdot Ast_3(t_1, t_2) + 0\% \cdot Ast_4(t_1, t_2)] \cdot \rho$$

And therefore the mean expected production is found by:

$$\overline{Prod(t_1, t_2)} = \frac{Prod(t_1, t_2)}{(t_2 - t_1) \cdot \rho}$$

where $(t_2 - t_1) \cdot \rho$ is the maximum possible production over $[t_1, t_2]$.

Finally, the mean expected production over $[t_1, t_2]$ is given by:

$$\overline{Prod(t_1, t_2)} = \frac{100\% \cdot Ast_1(t_1, t_2) + 30\% \cdot Ast_2(t_1, t_2) + 70\% \cdot Ast_3(t_1, t_2) + 0\% \cdot Ast_4(t_1, t_2)}{t_2 - t_1}$$

This formula can be generalized to systems with n states:

$$\overline{Prod(t_1, t_2)} = \frac{\sum_{i=1}^n K_i \cdot Ast_i(t_1, t_2)}{t_2 - t_1}$$

where K_i is the production capacity of the state i .

Of course, when a steady state exists the mean expected production tends to an asymptotic value which is equal to the asymptotic value of the instantaneous production capacity $K(\infty)$. This is illustrated in Figure 21.

Such a measure which is an extension of the mean availability and the mean expected production is often called "production availability" of the system. More generally it is also called "effectiveness" of the item. It is useful each time the service provided by a system state is proportional to the time spent in this state.

6.1.3 Reliability related expressions

6.1.3.1 Reliability [192-05-05] and unreliability

According to its definition [192-05-05], Note 3, the reliability $R(t)$ is the probability of performing as required for the time interval $[0, t]$, under given conditions. Figure 22 illustrates a reliable behaviour over $[0, t]$ of the system modelled by the state-transition graph proposed in Figure 14. It was in the perfect up state 1 (i.e. as good as new) at time t equal to 0 and has stayed in the up states 1, 2 and 3 all over $[0, t]$.

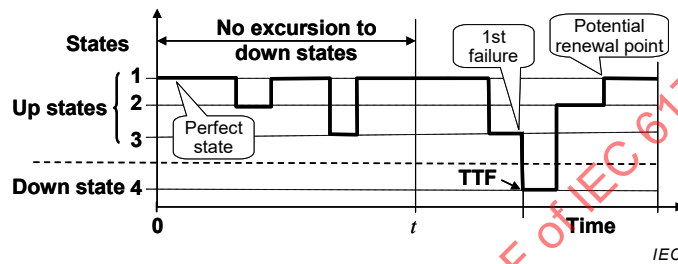


Figure 22 – Illustration of a system reliable behaviour over $[0, t]$

This is a typical example where the system failure rate $\lambda(t)$ [192-05-06] is non-constant because it may at least change according to the considered up state.

The reliability function is directly linked to the failure rate $\lambda(t)$ and to the failure density function $f(t)$ by the following formulae (see 6.1.5.1 NOTE 1):

$$R(t) = \exp\left[-\int_0^t \lambda(\tau) d\tau\right] = \int_t^\infty f(\tau) d\tau$$

If observed failure data are available for n items, from a homogenous population, the estimated value of $R(t)$ can be estimated by

$$\hat{R}(t) = \frac{n_S(t)}{n}$$

where $n_S(t)$ is the number of items that have had no failures over $[0, t]$ and $n = n_S(0)$.

NOTE If the system is as good as new after restoration to the perfect state then any time of restoration to the perfect state can be used as initial time 0 (renewal point, see Figure 22).

According to its definition [192-05-05] the reliability $R(t_1, t_2)$ is the probability of performing as required for the time interval $[t_1, t_2]$, under given conditions. Therefore the reliability of a system is the probability that it will be in up state all over $[t_1, t_2]$. It means that:

- the system is in up state at time t_1 , i.e. it is available;
- the system never goes to the down state from t_1 to t_2 .

This is illustrated in Figure 23 from the state-transition graph shown in Figure 14. What has happened before t_1 does not matter, except that the system has to be available at time t_1 . What happens after t_2 does not matter either.

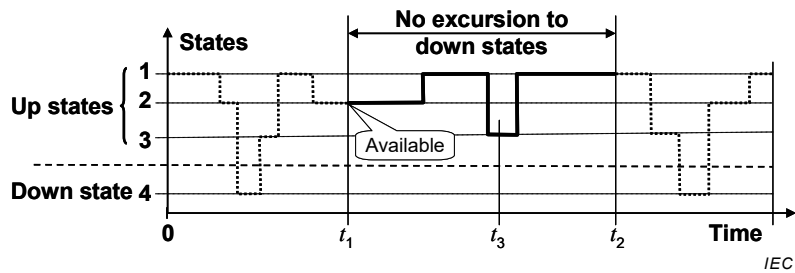


Figure 23 – Illustration of a system reliable behaviour over time interval $[t_1, t_2]$

From the instant t_1 (see Figure 23), the system has reached the state 3 at time t_3 through the sequence $2 \rightarrow 1 \rightarrow 3$. But the graphs presented in Figure 14 or Figure 15 encode all the sequences of events from state 2 to state 3. Therefore they encode two types of sequences:

- sequences going from 2 to 3 without going through the down state (e.g. $2 \rightarrow 1 \rightarrow 3$);
- sequences going from 2 to 3 through the down state (e.g. $2 \rightarrow 4 \rightarrow 3$).

Only the sequences of type a) ensure that the system remains in up state all over a time interval. Therefore the sequences of type b) do not participate in the system reliability and have to be excluded from the reliability calculation. This can be achieved by preventing the system from coming back to the up states when it has reached the down state as has been done in Figure 24.

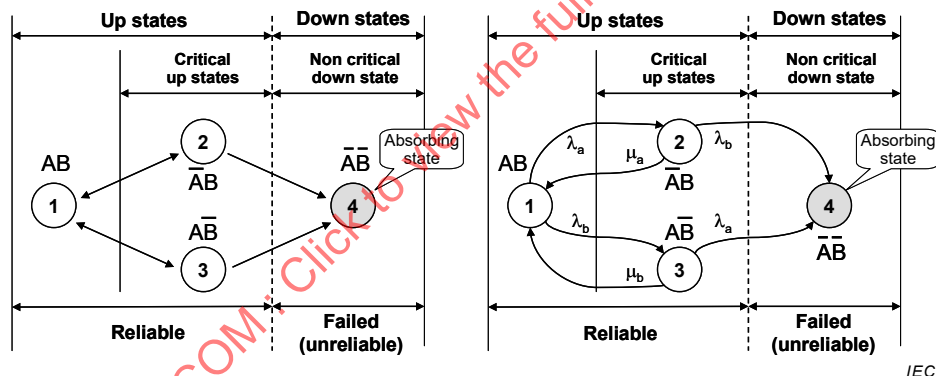


Figure 24 – State-transition and Markov graphs for reliability calculations

NOTE The Markov graph in Figure 24 allows to calculate the system reliability. To highlight this property, such a Markov graph is called "reliability Markov graph".

In Figure 24 any up state can only be reached from other up states. When the system reaches the down state it remains stuck there for eternity. This is why it is called "absorbing" state. At the end the probability to be in this state is 1 and $\lim_{t_2 \rightarrow \infty} R(t_1, t_2) = 0$.

When the system is modelled by a Markov graph, the reliability $R(t_1, t_2)$ of the example can be calculated in two steps:

- calculations of the probabilities $P_1^{(av)}(t_1)$, $P_2^{(av)}(t_1)$, $P_3^{(av)}(t_1)$ and $P_4^{(av)}(t_1)$ by using the Markov graph without absorbing state (see Figure 15);
- calculations of the probabilities $P_1^{(rel)}(\theta)$, $P_2^{(rel)}(\theta)$, $P_3^{(rel)}(\theta)$ and $P_4^{(rel)}(\theta)$ for $\theta = t_2 - t_1$, by using the Markov graph with the absorbing state (left hand side of Figure 24) and the probabilities calculated at step 1) as initial conditions.

This gives both the reliability $R(t_1, t_2)$ and the unreliability $F(t_1, t_2)$:

$$R(t_1, t_2) = P_1^{(rel)}(\theta) + P_2^{(rel)}(\theta) + P_3^{(rel)}(\theta)$$

$$F(t_1, t_2) = P_4^{(rel)}(\theta)$$

where $\theta = t_2 - t_1$

And therefore: $F(t_1, t_2) = 1 - R(t_1, t_2)$.

When t_1 is equal to 0 and the calculation made for reliability/unreliability over the interval $[0, t]$, the step 1) above is not required and the probabilities have to be calculated with the graphs with the absorbing states (see Figure 24).

Figure 25 illustrates the state probabilities of the system modelled by the reliability Markov graph (i.e. a Markov graph with an absorbing state) in Figure 24. As in the availability case those probabilities reach asymptotic values but these are 0 for the 3 up states and 1 for the down state.

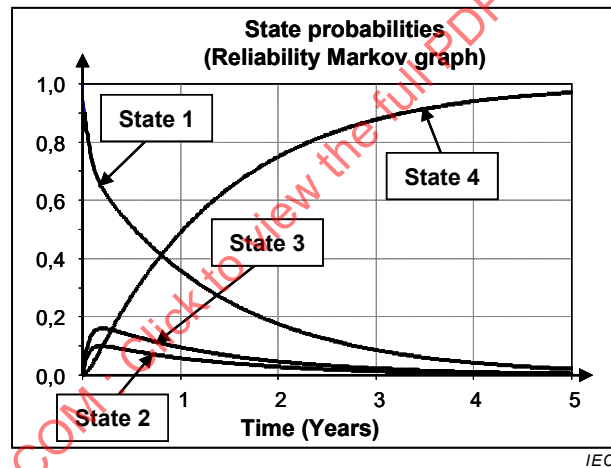


Figure 25 – Evolution of the state probabilities related to the Markov model in Figure 24

The state probabilities are presented in Figure 25 and therefore:

$$R(t) = P_1(t) + P_2(t) + P_3(t)$$

$$F(t) = P_4(t)$$

Due to the absorbing state, the evolution of the reliability and the unreliability are as illustrated in Figure 26.

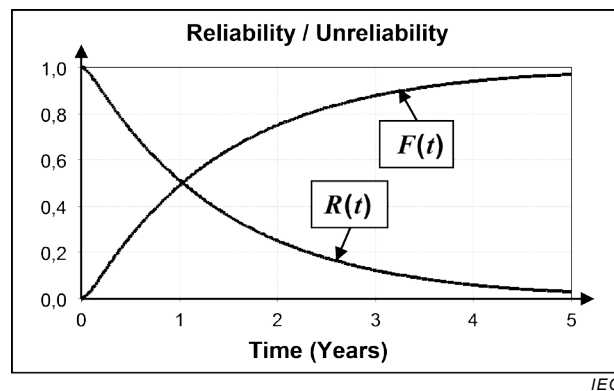


Figure 26 – Evolution of $R(t)$ and $F(t)$ related to the Markov model in Figure 24

The reliability/unreliability formulae are similar to those established for the availability/unavailability calculations. The difference of the results is only due to the presence or not of the absorbing state:

- graph without absorbing state: availability/unavailability calculations;
- graphs with absorbing state: reliability/unreliability calculation.

Looking at the graphs in Figure 24 it can be seen that the components of the system are repairable only if the whole item has not gone to the down state. Therefore the reliability calculations introduce systemic dependencies between the components and this makes the calculations more difficult than availability calculations.

Due to the absorbing state the reliability and the unreliability reach the following asymptotic values when the time increases.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} R(t) = 0.$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} F(t) = 1.$$

This is illustrated in Figure 26.

6.1.3.2 Mean time to first failure – MTTF [192-05-12]

According to the definition given in IEC 60050-192, the MTTF is the expectation of the duration of the operating time to first failure. It is linked to the reliability and failure density functions by the following formula:

$$\text{MTTF} = \int_0^{\infty} t f(t) dt = \int_0^{\infty} R(t) dt$$

In the case of COI items the up states are also operating states and therefore the MTTF can be calculated by the sum of the mean accumulated sojourn time in up states of a reliability graph:

$$\text{MTTF} = \lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{i \in \text{up states}} A s t_i(0, t)$$

Figure 27 illustrates the evolution of the mean accumulated sojourn times $Ast_i(t)$ over $[0, t]$ in the case of the reliability Markov graph presented in Figure 24.

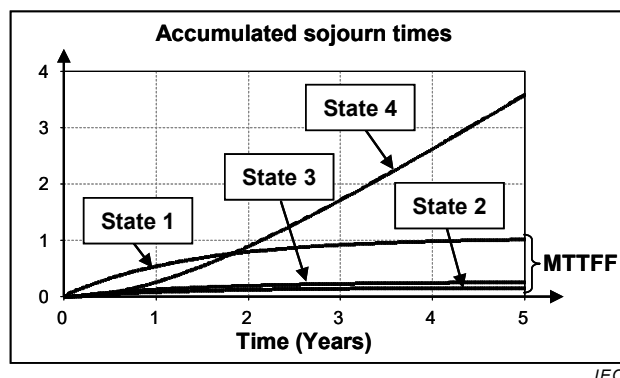


Figure 27 – Evolution of $Ast_i(0, t)$ related to the Markov model in Figure 24

When the time increases, the mean accumulated sojourn times spent in the up states (1, 2 and 3) tend to asymptotic values when the mean accumulated sojourn time spent in the down state (4) goes to infinity (this is the characteristic of an absorbing state). Therefore the MTTFF can be calculated as:

$$MTTFF = \lim_{t \rightarrow \infty} [Ast_1(0, t) + Ast_2(0, t) + Ast_3(0, t)]$$

The mean accumulated sojourn times in up states increase until they reach asymptotic values when the probability of the item to be in the down state is close to 1. Therefore the above formula converges more quickly for unreliable items than for reliable items.

6.1.4 Mean operating time between failures [192-05-13] and mean time between failures

IEC 60050-192 uses the acronyms MTBF or MOTBF for the mean operating time between failures [192-05-13] and therefore it is incorrect to use MTBF for the mean time between failures. This is why, in order to avoid any confusion, the acronym METBF is used in this standard for the mean time between failures (see definition 3.3).

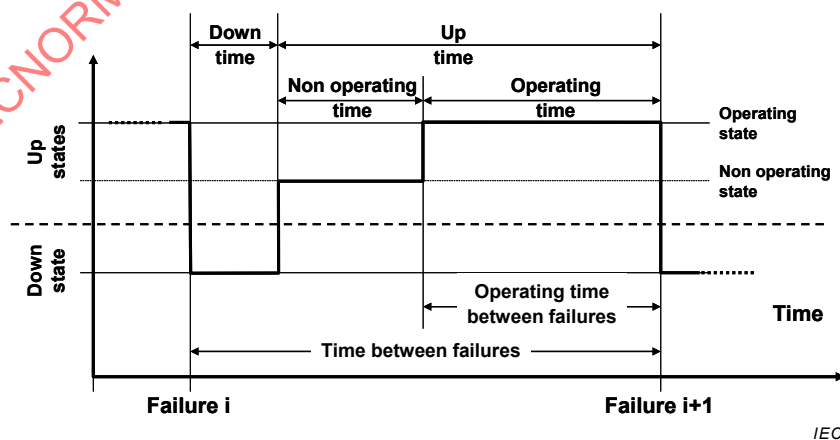


Figure 28 – Time between failures versus operating time between failures

Figure 28 illustrates the difference between the (elapsed) time between failures and the operating time between two consecutive failures: the time between failures is the sum of the

up and down times when the operating time between failures is only the part of the up time when the item is in the operating state.

This leads to the general formula for the mean time between failures which is:

$$\text{METBF} = \text{MUT} + \text{MDT}$$

If the preventive maintenance is not considered, as is the case in this document, the MUT is equal to the MTTR (mean time to restoration) and therefore:

$$\text{METBF} = \text{MUT} + \text{MTTR}$$

For COIs, the mean up time is equal to the mean time to failure. Thus:

$$\text{METBF} = \text{MTTF} + \text{MTTR}$$

6.1.5 Instantaneous failure rate [192-05-06] and conditional failure intensity (Vesely failure rate)

6.1.5.1 Instantaneous values

According to the definition 3.6, the instantaneous failure rate is the limit, if it exists, of the quotient of the conditional probability that the failure of an item occurs within time interval $[t, t + \Delta t]$, and Δt , when Δt tends to zero, given that failure has not occurred within time interval $[0, t]$:

$$\lambda(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \frac{P(t + \Delta t) - F(t)}{R(t)} = \frac{f(t)}{R(t)}$$

IEC 60050-192 provides a definition which is restricted to non-repairable items. But, in fact, it can be generalized as a failure density function $f(t)$ and a reliability function $R(t)$ can be defined for any item (individual items or systems, repairable or non-repairable).

According to the above definition, the failure rate $\lambda(t)$ is a conditional probability per unit of time:

$$\lambda(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0^+} \frac{P(\text{failure between } t \text{ and } t + \Delta t \mid \text{as good as new at } t = 0 \text{ and up state over } [0, t])}{\Delta t}$$

NOTE 1 $\lim_{\Delta t \rightarrow 0^+} \lambda(t) \cdot \Delta t$ is the conditional probability that the system fails at time t given no failure has occurred

since $t = 0$. Using the differential notation this can be written $\lambda(t)dt$ and then the increment $dF(t)$ of the probability of failure within $[t, t+dt]$ is equal to $R(t) \cdot \lambda(t)dt$. As $dF(t) = d[1 - R(t)] = -dR(t)$ this gives $\lambda(t) = -dR(t)/R(t)$ and the failure rate is also directly linked to the logarithmic derivative of the reliability $R(t)$. The integration of this derivative leads to the equation $R(t) = \exp[-\int_0^t \lambda(\tau)d\tau]$ introduced in 6.1.3.1.

The condition "up state over $[0, t]$ " (i.e. "no failure over $[0, t]$ ") is very strong and introduces the same systemic dependency as the one occurring with reliability calculations.

Looking at the example above in Figure 24, it can be seen that:

- the condition "up state over $[0, t]$ " implies that the system

- cannot go back from down to up states; this is ensured by the absorbing state;
- is in up state at t ; the probability of this event is the reliability given by $R(t) = P_1^{(rel)}(t) + P_2^{(rel)}(t) + P_3^{(rel)}(t)$;
- the item can go to the down state only from the critical states 2 and 3;
- the probability of failure between t and $t + dt$ from state 2 is $\lambda_b dt$ by failure of component B;
- the probability of failure between t and $t + dt$ from state 3 is $\lambda_a dt$ by failure of component A.

Therefore the following result is obtained:

$$\lambda(t) = \frac{\lambda_b P_2^{(rel)}(t) + \lambda_a P_3^{(rel)}(t)}{R(t)} = \frac{\lambda_b P_2^{(rel)}(t) + \lambda_a P_3^{(rel)}(t)}{P_1^{(rel)}(t) + P_2^{(rel)}(t) + P_3^{(rel)}(t)}$$

In the general case and when the item has Markovian behaviour, its failure rate can be calculated from its critical up states and the constant transition rates towards the down states.

The failure rate is a very important parameter as it is directly linked to the reliability function $R(t)$:

$$R(t) = e^{-\int_0^t \lambda(\tau) d\tau}$$

If the same calculation is made from a graph without absorbing state (availability graph) such as Figure 14 or Figure 15 another important parameter is obtained which has not been defined in IEC 60050-192 yet: the conditional failure intensity also called Vesely failure rate $\lambda_V(t)$. Formally it can be defined as:

$$\lambda_V(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0^+} \frac{P(\text{failure between } t \text{ and } t + \Delta t \mid \text{as good as new at 0 and up state at } t)}{\Delta t}$$

This is also a conditional probability per unit of time but the condition is weaker than for the actual failure rate, $\lambda(t)$: what happened during $[0, t]$ does not matter (i.e. the item may have been in down state for several times before t) and the graph has no absorbing state. The only condition is that the item has to be available at t .

NOTE 2 $\lim_{\Delta t \rightarrow 0^+} \lambda_V(t) \cdot \Delta t$ is the conditional probability that the system fails at time t given it is in up state at time t and was in up state at $t = 0$.

In the case of Figure 15 this gives:

$$\lambda_V(t) = \frac{\lambda_b P_2^{(av)}(t) + \lambda_a P_3^{(av)}(t)}{A(t)} = \frac{\lambda_b P_2^{(av)}(t) + \lambda_a P_3^{(av)}(t)}{P_1^{(av)}(t) + P_2^{(av)}(t) + P_3^{(av)}(t)}$$

Figure 29 illustrates the difference between the failure rate $\lambda(t)$ obtained from Figure 15 and the Vesely failure rate $\lambda_V(t)$ obtained from Figure 24. The two parameters behave in the same way when the time increases. They are equal for short times and converge to different asymptotic values, $\lambda(\infty)$ and $\lambda_V(\infty)$, when the time becomes larger.

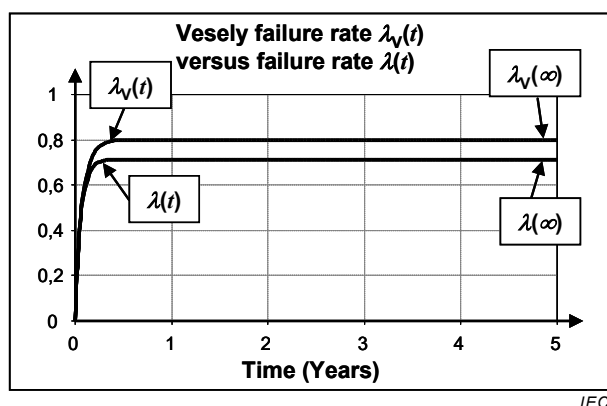


Figure 29 – Comparison between $\lambda(t)$ and $\lambda_V(t)$ related to the model in Figure 24

6.1.5.2 Mean and steady state (asymptotic) values

The mean failure rate is defined in IEC 60050-192. It has to be used cautiously because this is not really a failure rate and the fundamental relationship $R(t) = \exp\left[-\int_0^t \lambda(\tau) d\tau\right]$ does not hold if $\lambda(\tau)$ is replaced by a mean failure rate. Therefore it cannot be used to calculate the item reliability $R(t)$ without care.

As shown in Figure 29, the following inequality $\lambda_V(\infty) > \lambda(\infty) > \lambda(t) \forall t$ is verified for the system modelled by the Markov process. More generally the inequality $\lambda_V(\infty) \geq \lambda(\infty)$ holds for systems made of independent repairable components with constant failure and repair rates.

In fact, the faster the restorations of the failed components are done and the more reliable/available the system is, the quicker the steady state and therefore the asymptotic values are reached and the closer $\lambda(\infty)$ and $\lambda_V(\infty)$ are. Using $\lambda_V(\infty)$ allows to obtain a very good approximation of $R(t)$ after a duration equal to two or three times the greater MTTR of the components of the system. This covers a large part of the studies made by reliability engineers.

NOTE The above results do not hold for systems with non repaired components or with no restoration from a failed state.

The conditions for calculating the Vesely failure rate are weaker than for the failure rate (see 6.1.5.1). Therefore it is easier to calculate than the failure rate. For actual studies on industrial systems with repairable components, the failure rate often cannot be calculated when the Vesely failure rate can be obtained rather easily. Thus, the Vesely failure rate is often used instead of the failure rate. This property is, for example, the basis of reliability calculations based on fault trees (see IEC 61025 [24]) and reliability block diagrams (see IEC 61078 [25]) modelling systems with repairable components.

When the failures are quickly detected and repaired (i.e. failure rates $\ll$ repair rates) $\lambda(\infty) \approx \lambda_V(\infty)$ can be obtained directly from the Markov graph by using the following principle applied to the small example modelled in Figure 15 (or in Figure 24):

- identify a sequence from the perfect state 1 to the down state 4, e.g. $1 \rightarrow 2 \rightarrow 4$;
- the item can go from 1 to 2 with the transition rate λ_a ;
- the time spent in state 2 is negligible compared to the time spent in state 1. Therefore when the item reaches state 2 and according to the properties of constant failure rates, it

leaves it almost immediately for state 1 (probability $\frac{\mu_a}{\lambda_b + \mu_a}$) or state 4 (probability $\frac{\lambda_b}{\lambda_b + \mu_a}$);

- then the transition rate from 1 to 4 by the sequence 1→2→4 is $\lambda_a \frac{\lambda_b}{\lambda_b + \mu_a}$;
- continue with the other sequences (e.g. 1→3→4) until all sequences have been processed;
- gather all the results to obtain a good approximation of the asymptotic value of $\lambda(\infty) \approx \lambda_V(\infty)$.

In the example, only two sequences (1→2→4 and 1→3→4) have to be considered and the two Markov graphs lead to the same result:

$$\lambda(\infty) \approx \lambda_V(\infty) = \lambda_a \frac{\lambda_b}{\lambda_b + \mu_a} + \lambda_b \frac{\lambda_a}{\lambda_a + \mu_b}$$

The above asymptotic values also provide the mean failure rate over a large time interval.

6.1.6 Failure density and unconditional failure intensity [192-05-08]

The unreliability function $F(t)$ is the probability that the time to failure TTF is lower or equal to t . Therefore this is also the time to failure distribution or, in short, the failure distribution and the derivative of this function is the failure density $f(t)$. This means that $f(t) \cdot dt$ is the probability that the item fails between t and $t+dt$ given that it was in up state (and as good as new) at $t = 0$:

$$f(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0^+} \frac{P(t < \text{time to first failure} \leq t + \Delta t \mid \text{as good as new at } t = 0)}{\Delta t}$$

This formula is similar to the formula of the failure rate $\lambda(t)$ except for the condition to be in up state over $[0, t]$ which is given by $R(t)$. Therefore $\lambda(t) = f(t)/R(t)$ and:

$$f(t) = \lambda(t) \cdot R(t)$$

In the case of the example this leads to:

$$f(t) = \lambda_b P_2^{(rel)}(t) + \lambda_a P_3^{(rel)}(t)$$

Another way to establish this formula is to realize that, due to the absorbing state of the Markov graph in Figure 24, the probability to have the first failure between $t + dt$ is also the probability to be in a critical state at time t , e.g. $P_2(t)$, and to go to the down state between t and $t + dt$, e.g. $\lambda_b \cdot dt$. In the case of the example, it is found again:

$$f(t) = \frac{P_2^{(rel)}(t) \lambda_b \cdot dt + P_3^{(rel)}(t) \lambda_a \cdot dt}{dt} = \lambda_b P_2^{(rel)}(t) + \lambda_a P_3^{(rel)}(t)$$

If the same calculation is made from a graph without absorbing state (availability graph) such as Figure 14 or Figure 15 another important parameter is obtained: the unconditional failure intensity $z(t)$ which is formally defined as:

$$z(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0^+} \frac{P(\text{failure between } t \text{ and } t + \Delta t \mid \text{as good as new at } t = 0)}{\Delta t}$$

Similarly as above:

$$z(t) = \lambda_V(t) \cdot A(t)$$

And, in the case of the example, the following formula is obtained:

$$z(t) = \lambda_b P_2^{(av)}(t) + \lambda_a P_3^{(av)}(t)$$

The unconditional failure intensity is the same parameter as the failure intensity [192-05-08] defined in another way in IEC 60050-192: limit, if it exists, of the quotient of the mean number of failures of a repairable item within time interval $[t, t + \Delta t]$, and Δt , when Δt tends to zero:

$$z(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0^+} \frac{E[N(t + \Delta t) - N(t)]}{\Delta t}$$

In this formula $N(t)$ represents the number of failures occurring over $[0, t]$. When $\Delta t \rightarrow 0$, a physical item cannot fail several times within $[t, t + \Delta t]$ and $[N(t + \Delta t) - N(t)]$ is equal to 1 if a new failure occurs during the interval $[t, t + \Delta t]$ and equal to 0 otherwise. Finally, when $\Delta t \rightarrow 0$, $E[N(t + \Delta t) - N(t)]$ is equal to the probability to have one failure within the interval $[t, t + \Delta t]$ and the two formulae are equivalent.

According to its definition, $z(t)$ is also the derivative of the expected number of failures $Z(t) = E[N(t)]$ over $[0, t]$:

$$z(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0^+} \frac{Z(t + \Delta t) - Z(t)}{\Delta t} = \frac{dZ(t)}{dt} \text{ and } Z(t) = \int_0^t z(\tau) d\tau.$$

When $\Delta t \rightarrow 0$, $z(t) \cdot \Delta t$ is the expected number of failures over $[t, t + \Delta t]$ then $z(t) \cdot \Delta t / \Delta t = z(t)$ is also the instantaneous failure frequency of the item at time t . This is why this measure is often called "failure frequency".

The average failure frequency over $[0, t]$ can be calculated as $\frac{Z(t)}{t}$. Therefore if a steady state exists, $z(t)$ reaches an asymptotic value and this leads to (see [7]):

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{Z(t)}{t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\int_0^t z(\tau) d\tau}{t} = z(\infty)$$

If $\overline{Tbtf}(t)$ is the mean elapsed time between the consecutive failures occurring over an interval $[0, t]$ then, $t / \overline{Tbtf}(t)$ is equal to the expected number of failures over $[0, t]$, $Z(t)$. When t tends to the infinity $\overline{Tbtf}(\infty)$ is the METBF of the modelled system and when a steady state exists $z(t)$ reaches an asymptotic value $z(\infty)$. Then:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{Z(t)}{t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{Tbf(t)} = \frac{1}{\text{METBF}} = z(\infty)$$

Therefore: $\text{METBF} = \frac{1}{z(\infty)}$.

More details can be found in reference [10].

Among the parameters analysed above (failure rate, Vesely failure rate and failure density), only the mean value of the unconditional failure intensity [192-05-09] is really useful:

$$\bar{z}(t_1, t_2) = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} z(t) dt$$

This allows to calculate the number of failures occurring over a given time interval:

$$E[N(t_1, t_2)] = \bar{z}(t_1, t_2) \cdot (t_2 - t_1)$$

NOTE The mean failure frequency is called PFH (probability of failure per hour) when it is used in the context of the functional safety of safety instrumented systems (e.g. IEC 61508 [21] or IEC 61511 [22]).

When the events are exponential (Markovian models) and when the failures are detected and repaired quickly, $A(t)$ and $\lambda_V(t)$ reach asymptotic (steady state) values A and $\lambda_V(\infty)$ after a duration equal to two or three times the greater MTTR of the components of the system. Then the failure frequency $z(t)$ also reaches an asymptotic value given by the following formula:

$$z(\infty) = A \cdot \lambda_V(\infty)$$

Once the steady state is achieved, the asymptotic values are also the mean values of these parameters.

Figure 30 shows the evolution of the failure density $f(t)$ obtained from Figure 24 and of the unconditional failure intensity $z(t)$ obtained from Figure 15. The behaviours are very different: $z(t)$ increases until it reaches an asymptotic value when $f(t)$ increases first and, after reaching a maximum value decreases to zero.

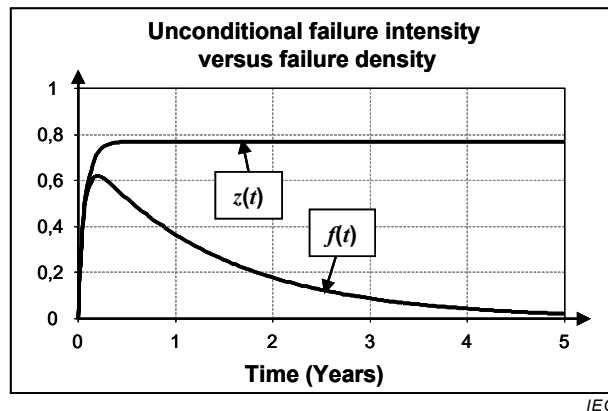


Figure 30 – Comparison between $z(t)$ and $f(t)$

Both $z(t)$ and $f(t)$ represent the system failure frequency but for $f(t)$ the system can fail only once and after it has failed it cannot fail any more. Therefore when $F(t)$ is close to 1 the probability to observe the failure is very low and $f(t)$ tends to 0.

6.1.7 Comparison of $\lambda(t)$, $\lambda_V(t)$, $z(t)$ and $f(t)$ for high and small MTTRs

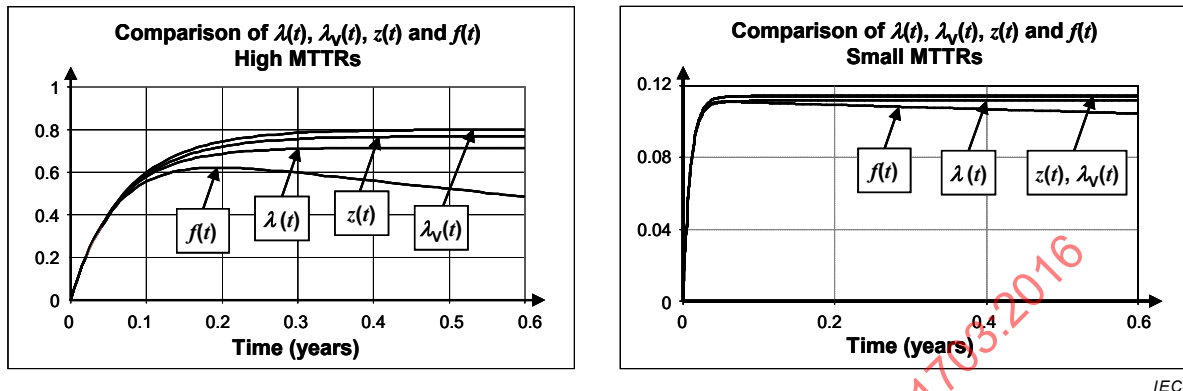


Figure 31 – Comparison of $\lambda(t)$, $\lambda_V(t)$, $z(t)$ and $f(t)$ for high and small values of MTTRs

On its left hand side, Figure 31 gathers the results presented in Figure 29 and in Figure 30. On the right hand side, it shows the same results when the MTTRs of the components A and B have been divided by 10. In both cases and on the short term, $\lambda(t)$, $\lambda_V(t)$, $z(t)$ and $f(t)$ have close numerical values, then, when the time increases, $\lambda(t)$, $\lambda_V(t)$, $z(t)$ converge to asymptotic values and $f(t)$ decreases to 0. These results are typical of Markovian models.

Figure 31 shows that, for Markovian models:

- The faster the failed items are restored, the faster the asymptotic values $\lambda(\infty)$, $\lambda_V(\infty)$ and $z(\infty)$ are reached and the closer they are. On the right hand side $z(t)$ and $\lambda_V(t)$ are even merged as the availability is very high. The asymptotic values are reached after about 3 times the highest MTTR, i.e. 0.3 y (3 x 876 h) on the left hand side and 0.03 y (3 x 87,6 h) on the right hand side. In actual cases, the restoration is often faster and the asymptotic values are reached almost immediately.
- $\lambda_V(\infty)$ is a conservative value of $\lambda(\infty)$. As $\lambda_V(\infty)$ is easier to calculate than $\lambda(\infty)$, it is commonly used instead of $\lambda(t)$ for reliability calculations.
- $z(\infty)$ is also a conservative value of $\lambda(\infty)$.
- Due to the similarities of the numerical values $\lambda(\infty)$, $\lambda_V(\infty)$ and $z(\infty)$ can be easily mixed-up.

The above results hold only for dependability models with underlying Markovian properties (e.g. simplified formulae, reliability block diagrams, fault trees, event trees, Petri nets, when they implement only constant failure and repair rates).

6.1.8 Restoration related expressions

6.1.8.1 Repair rate [192-07-20] and mean repair time [192-07-21]

The repair rate $\mu(t)$ is the limit, if it exists, of the quotient of the conditional probability that the repair is completed within time interval $[t, t + \Delta t]$ and Δt , when Δt tends to zero, given that the repair started at $t = 0$ and had not been completed before time t .

The difference between the restoration intensity and the repair rate is that, for the repair rate, the repair is considered to have started at $t = 0$ whereas for the restoration intensity the condition is that the item is as good as new at time $t = 0$.

The mean repair time (MRT) is the expectation of the repair time.

These definitions are similar (for the repairs) to the definitions given (for failures) for the failure rate and the MTTF.

Looking at Figure 14 or Figure 15 and considering that the system is in state 4 at time equal 0:

- the repair rate is the sum of the transition rates from 4 to 2 and from 4 to 3;
- the MRT is the mean time spent in state 4 each time the item goes to the down state.

This leads to:

$$\mu = \mu_a + \mu_b$$

$$\text{MRT} = \frac{1}{\mu} = \frac{1}{\mu_a + \mu_b}$$

If now Figure 4 is considered, it can be seen that the system has 3 down states. Therefore, the condition "given that the repair started at $t = 0$ " implies to define 3 different repair rates according to the probability to be in states 5, 6 and 7 at time $t = 0$. Therefore a system with several down states has not a single repair rate and this concept is relevant mainly for individual items considered as a whole.

6.1.8.2 Restoration intensity and mean time to restoration [192-07-23]

Restoration intensity is not defined in IEC 60050-192 and has been introduced in Clause 3 of the present standard: limit, if it exists, of the quotient of the mean number of restorations [192-06-23] of a repairable item [192-01-11] within time interval $[t, t + \Delta t]$, and Δt , when Δt tends to zero, given that the item is as good as new at time $t = 0$.

$$v(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0^+} \frac{E[N_R(t + \Delta t) - N_R(t) \mid \text{as good as new at } t = 0]}{\Delta t}.$$

According to IEC 60050-192, the down time is made of the time to restoration plus a part of the preventive maintenance time. The hypothesis here is that the preventive maintenance is not considered and that the time to restoration is equal to the down time. See Figure 2.

In this formula $N_R(t)$ represents the number of restorations occurring over $[0, t]$. When $\Delta t \rightarrow 0$ several restorations of a physical item cannot finish within $[t, t + \Delta t]$, then $N_R(t + \Delta t) - N_R(t)$ is equal to 1 if a new restoration occurs during the interval $[t, t + \Delta t]$ and equal to 0 otherwise. Therefore:

- $v(t)$ is the expected number of restorations per unit of time and is also the instantaneous restoration frequency of the item.
- When $\Delta t \rightarrow 0$, $E[N_R(t + \Delta t) - N_R(t)]$ is equal to the probability to have one restoration finishing within the interval $[t, t + \Delta t]$ and the restoration intensity may be defined as:

$$v(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0^+} \frac{P(\text{restoration finishing between } t \text{ and } t + \Delta t \mid \text{as good as new at } t = 0)}{\Delta t}$$

This definition implies that the item is in a critical down state at t , and goes to one of the up states during $[t, t + \Delta t]$.

In the case of the example in Figure 15 it is found:

$$v(t) = (\mu_a + \mu_b)P_4(t)$$

This can be generalized to items with several critical down states like in Figure 4:

$$v(t) = \mu_{5,3}(t)P_5(t) + [\mu_{6,3}(t) + \mu_{6,4}(t)]P_6(t)$$

where $\mu_{i,j}(t)$ is the transition rate from state i to j at time t .

The mean restoration frequency over a given time interval $[t_1, t_2]$ is obtained by:

$$\bar{v}(t_1, t_2) = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} v(t) dt$$

Then the mean number of restorations over a given time interval $[t_1, t_2]$ is given by:

$$V(t_1, t_2) = (t_2 - t_1) \bar{v}(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} v(t) dt$$

The overall time of restoration spent over a given time interval $[t_1, t_2]$ is equal to the sum of the accumulated times spent in the down states. Therefore the mean time to restoration is given by:

$$\text{MTTR} = \frac{\sum_{i \in \text{down states}} Ast_i(t_1, t_2)}{N_R(t_1, t_2)}$$

When the preventive maintenance is not considered the MTTR is equal to the mean down time, MDT.

In the case of the example in Figure 15 it is found:

$$V(t_1, t_2) = (\mu_a + \mu_b) \int_{t_1}^{t_2} P_4(t) dt = (\mu_a + \mu_b) \cdot Ast_4(t_1, t_2)$$

and then

$$\text{MTTR} = \frac{1}{\mu_a + \mu_b}$$

6.2 Non-repairable individual items

6.2.1 General

This particular case is illustrated in Figure 6 and Figure 7.

All expressions in 6.2 are applicable to COIs only.

For each measure, the following are presented:

- a) the generic expression;
- b) the most common expression (for exponentially distributed time to failure of the item);
- c) a simple example of application where necessary.

6.2.2 Instantaneous availability [192-08-01]

Symbol $A(t)$

As the item is not repaired, the probability $A(t)$ for the item to be in up state at a time t is also the probability $R(t)$ to have been in the up state all over $[0, t]$.

Then $A(t) \equiv R(t)$ and in this case, the two concepts of reliability and availability are merged. In particular, the asymptotic value A of the availability is equal to 0.

6.2.3 Reliability [192-05-05]

Symbols $R(t_1, t_2)$ for $0 \leq t_1 < t_2$ and $R(t) = R(0, t)$ for $t_1 = 0$ and $t_2 = t$

In this case the more commonly used expressions are:

- the reliability function $R(t) = R(0, t)$, with $R(0) = 1$, and
- the conditional reliability $R(t, t + x | t)$, when no failure has occurred in time $[0, t]$.

With regard to reliability and availability calculations the main properties of non-repairable items are the following:

- $R(t) \equiv A(t)$ (see 6.2.2);
- the probability $R(t_1, t_2)$ to be in up state all over a given time interval $[t_1, t_2]$, $0 \leq t_1 < t_2$, is also the probability $R(t_2)$ to have been in the up state all over $[0, t_2]$. Then $R(t_1, t_2) \equiv R(t_2)$.

a) From a mathematical point of view the reliability function is given by the following formula:

$$R(t) = \exp\left(-\int_0^t \lambda(x) dx\right) = \int_t^\infty f(x) dx$$

where

$\lambda(x)$ is the instantaneous failure rate of the item;

$f(x)$ is the probability density function of the time to failure of the item, i.e. for small values Δx , $f(x) \cdot \Delta x$ is approximately equal to the probability that the failure of the item will occur during $(x, x + \Delta x)$.

b) If observed failure data (field feedback) are available for n non-repairable items, from a homogenous population, the estimated value of $R(t)$ is given by:

$$\hat{R}(t) = \frac{n_S(t)}{n}$$

where

$n_S(t)$ is the number of items that are still operational at the instant of time t .

n $n_S(0)$.

c) The probability that the item will fail during the time interval $[t_1, t_2]$, $0 \leq t_1 < t_2$, is given by

$$R(t_1) - R(t_2) = \int_{t_1}^{t_2} f(t) dt$$

- d) The conditional reliability, $R(t, t + x | t)$, is defined as the conditional probability that an item can perform a required function for a given time interval $[t, t + x]$ provided that the item is in an operating state at the beginning of the time interval.

$$R(t, t + x | t) = \exp\left(-\int_t^{t+x} \lambda(t) dt\right) = \frac{R(t+x)}{R(t)}$$

When $\lambda(t) = \lambda = \text{constant}$, i.e. when the (operating) time to failure is exponentially distributed

$$R(t) = \exp(-\lambda t)$$

$$R(t, t + x | t) = \exp(-\lambda x)$$

NOTE This result comes from the fundamental Markovian property: if the item survives until t , the future of the modelled system does not depend on what has happened before t . This is known as the memorylessness property.

- e) For an item with a constant failure rate of $\lambda = 1 \text{ year}^{-1}$ and a required time of operation of six months, the reliability is given by

$$R(6 \text{ months}) = \exp\left(-1 \times \frac{6}{12}\right) = 0,61$$

6.2.4 Instantaneous failure rate [192-05-06]

Symbol $\lambda(t)$

According to definition [192-05-06]:

$$\lambda(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \frac{R(t) - R(t + \Delta t)}{R(t)} = \frac{f(t)}{R(t)}$$

For small values of Δt , $\lambda(t) \cdot \Delta t$ is approximately equal to the conditional probability that failure of the item will occur during $[t, t + \Delta t]$, given that the item has survived to time t .

Using the failure rate, the probability that the item will fail during the time interval $[t_1, t_2]$ is given by

$$F(t_1, t_2) = R(t_1) - R(t_2) = \exp\left(-\int_0^{t_1} \lambda(t) dt\right) - \exp\left(-\int_0^{t_2} \lambda(t) dt\right)$$

- a) If observed failure data are available for n non-repairable items, from a homogenous population, the estimated value of $\lambda(t)$ at time t is given by:

$$\hat{\lambda}(t) = \frac{n_S(t) - n_S(t + \Delta t)}{n_S(t) \Delta t}$$

where

$n_S(t)$ is the number of items that are still operational at the instant of time t ;

n $n_S(0)$;

$n_S(t) - n_S(t + \Delta t)$ is the number of items that fail in the time interval $[t, t + \Delta t]$.

NOTE The estimated value of the failure density function $f(t)$, at time t , is given by

$$\hat{f}(t) = \frac{n_S(t) - n_S(t + \Delta t)}{n \Delta t}$$

- b) When the time to failure is exponentially distributed, i.e. $\lambda(t) = \lambda$ for all values of t ,

$$f(t) = \lambda \exp(-\lambda t)$$

and

$$R(t) = \exp(-\lambda t)$$

- c) If observed failure data are available for n non-repairable items, from a homogenous population, with constant failure rate, then the estimated value of λ is given by the following maximum likelihood estimate:

$$\hat{\lambda} = \frac{n}{\sum_{i=1}^n \text{TTF}_i}$$

where TTF_i is the time to failure of item i .

For 10 non-repairable items, from a homogenous population, with a constant failure rate, the observed total operating time to failures of all the items is $\sum_{i=1}^{10} \text{TTF}_i = 2$ years. Hence

$$\hat{\lambda} = \frac{10}{12} = 5 \text{ year}^{-1}$$

- d) If the time to failure of a non-repairable item has a two-parameter Weibull distribution with scale parameter $\alpha > 0$ and shape parameter $\beta > 0$, then (see [9])

$$R(t) = \exp(-(at)^\beta)$$

and

$$f(t) = \frac{-dR(t)}{dt} = \alpha \beta (at)^{\beta-1} \exp(-(at)^\beta)$$

hence

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{R(t)} = \alpha \beta (at)^{\beta-1}$$

For $\beta = 2$ and $\alpha = 0,5 \text{ year}^{-1}$

$$\lambda(6 \text{ months}) = 0,5 \times 2 \times (0,5 \times \frac{6}{12}) = 0,25 \text{ year}^{-1}$$

$$\lambda(1 \text{ year}) = 0,5 \times 2 \times (0,5 \times 1) = 0,5 \text{ year}^{-1}$$

6.2.5 Mean failure rate [192-05-07]

Symbol $\bar{\lambda}(t_1, t_2)$, $0 \leq t_1 < t_2$

- a) As $R(t) = e^{-\int_0^t \lambda(\tau) d\tau}$ the mean failure rate is given by:

$$\bar{\lambda}(t_1, t_2) = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} \lambda(t) dt = \frac{1}{t_2 - t_1} \ln \frac{R(t_1)}{R(t_2)}$$

Warning: The formula $R(t) = e^{-\int_0^t \lambda(\tau) d\tau} = e^{-t \cdot \frac{1}{t} \int_0^t \lambda(\tau) d\tau} = e^{-t \cdot \bar{\lambda}(0, t)}$ shows that the "mean failure rate" can be used to calculate $R(t)$. Nevertheless this should be done with care as $\bar{\lambda}(0, t)$ is not a failure rate (see 6.1.5.2).

- b) When the time to failure is exponentially distributed

$$\bar{\lambda}(t_1, t_2) = \lambda$$

for all values of t_1 and t_2 .

- c) Let $t_1 = 6$ months, $R(t_1) = 0,8$ and $t_2 = 12$ months, $R(t_2) = 0,5$, then

$$\bar{\lambda}(6, 12) = \frac{1}{12-6} \ln \frac{0,8}{0,5} = \ln(1,6)/6 = \frac{0,47}{6} = 0,078 \text{ month}^{-1}$$

while ($R(0) = 1$)

$$\bar{\lambda}(0, 6) = \frac{1}{6-0} \ln \frac{1}{0,8} = \ln(1,25)/6 = \frac{0,22}{6} = 0,037 \text{ month}^{-1}$$

6.2.6 Mean operating time to failure [192-05-11]

MTTF (abbreviation)

In the case of non-repairable items, the MTTF is also the MTTF (mean time to first failure). It can be calculated by the following general formula:

$$\text{MTTF} = \text{MTTF} = \int_0^{\infty} t f(t) dt = \int_0^{\infty} R(t) dt$$

- a) If observed failure data (field feedback) are available for n non-repairable items, from a homogenous population, then an estimate of MTTF is given by

$$\hat{\text{MTTF}} = \hat{\text{MTTF}} = \frac{\sum_{i=1}^n \text{TTF}_i}{n}$$

where TTF_i is the observed time to failure of item i .

NOTE The above formula is valid only if all the n items have failed during the observation period. If this is not the case, the duration T of the observation period can be used for TTFs of the non-failed items in order to obtain a conservative estimate of the MTTF.

- b) When the time to failure is exponentially distributed, i.e. $\lambda(t) = \lambda$ for all values of t ,

$$\text{MTTF} = \frac{1}{\lambda}$$

and the constant failure rate can be estimated by:

$$\hat{\lambda} = \frac{1}{\hat{\text{MTTF}}}$$

- c) For a non-repairable item with a constant failure rate of $\lambda = 0,5 \text{ year}^{-1}$,

$$\text{MTTF} = 2 \text{ years} = 17\,520 \text{ h}$$

- d) If the time to failure of a non-repairable item has a two-parameter Weibull distribution with a scale parameter $\alpha > 0$ and shape parameter $\beta > 0$, then

$$R(t) = \exp(-(at)^\beta)$$

and

$$\text{MTTF} = \frac{\Gamma(1 + \frac{1}{\beta})}{\alpha}$$

where

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt$$

is the complete gamma function. (See [9])

For $\beta = 2$ and $\alpha = 0,5 \text{ year}^{-1}$:

$$\text{MTTF} = \frac{\Gamma(1 + \frac{1}{2})}{0,5} = 2 \times \Gamma(1 + \frac{1}{2})$$

but

$$\Gamma(1 + \frac{1}{2}) = \Gamma(\frac{1}{2})/2 = \sqrt{\pi}/2$$

hence

$$\text{MTTF} = \sqrt{\pi} \approx 1,8 \text{ years} = 21 \text{ months}$$

6.3 Repairable individual items with zero time to restoration

6.3.1 General

This particular case is illustrated in Figure 8 and Figure 9.

All expressions in 6.3 are applicable to COIs. Where they are applicable to IOIs, this is stated.

For each measure, the following are presented:

- the generic expression obtained through a simple renewal process [11];
- the most common expression (for the cases when the times to failure of the item are exponentially distributed);
- a simple example of application where necessary.

6.3.2 Reliability [192-05-05]

Symbol $R(t_1, t_2)$, $0 \leq t_1 < t_2$

The reliability $R(t_1, t_2)$ over the time interval $[t_1, t_2]$ is also known as the interval reliability.

a) The reliability of an item for the time interval $[t_1, t_2]$ is illustrated in Figure 32.

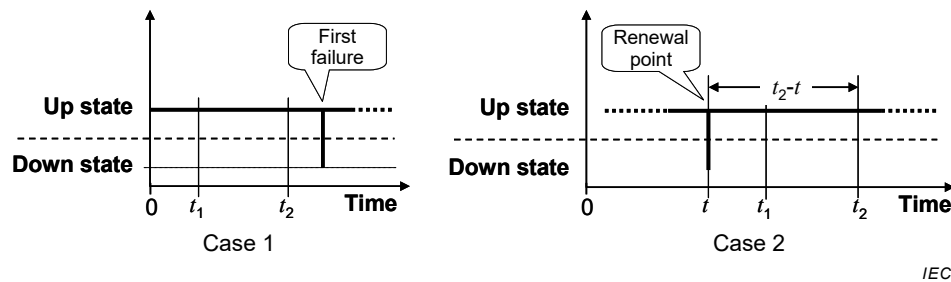


Figure 32 – Illustration of reliable behaviour over $[t_1, t_2]$ for a zero time to restoration individual item

Figure 32 shows that two cases have to be considered:

- No failure has occurred over $[0, t_2]$. This is the ordinary reliability $R(t_2)$.
- At least one failure has occurred and the faulty item has been repaired at an instant t before t_1 , and no failure has occurred between t_1 and t_2 :
 - the probability that one failure has occurred (and has been repaired) at time t is the unconditional failure intensity $z(t)$,
 - the probability that the item has no failure during the interval $[t, t_2]$, under the hypothesis that it is as good as new after repair, is the reliability over the duration $t_2 - t$, $R(t_2 - t)$.

As t may vary from 0 to t_1 , $R(t_1, t_2)$ may be written as (see [9] and [13] for more information):

$$R(t_1, t_2) = R(t_2) + \int_0^{t_1} R(t_2 - t) z(t) dt$$

$z(t)$ is the unconditional instantaneous failure intensity of the item. It is also the renewal density of the underlying renewal process i.e. for small values of Δt , $z(t) \cdot \Delta t$ is approximately equal to the (unconditional) probability that a failure of the item occurs (and therefore a repair for a zero time to restoration item) during $[t, t + \Delta t]$, and

$R(t) = R(0, t)$ is the reliability function of the item

$$R(t) = \int_t^{\infty} f(s) ds$$

where $f(t)$ is the probability density function (also referred to as the failure density function) of the times to failure of the item, i.e. for small values of Δt , $f(t) \cdot \Delta t$ is approximately equal to the probability that the item fails during the time interval $[t, t + \Delta t]$. More precisely, it is approximately the probability that a given time to failure terminates in the time interval $[t, t + \Delta t]$, assuming that the time to failure started at time $t = 0$.

b) If observed failure data are available for n repairable items, from a homogenous population, then an estimate of $R(t_1, t_2)$ is given by

$$\hat{R}(t_1, t_2) = \frac{n_S(t_1, t_2)}{n}$$

where $n_S(t_1, t_2)$ is the number of items that were operational at the instant of time t_1 and did not fail during the time interval $[t_1, t_2]$.

- c) By setting $t_1 = t$ and $t_2 = t + x$, one can obtain the asymptotic interval reliability (see [13]):

$$\lim_{t \rightarrow \infty} R(t, t + x) = \frac{1}{\text{MTTF}} \int_x^{\infty} R(s) ds$$

which, for large values of t , can be used as an approximation of the $R(t, t + x)$, where MTTF is the mean time to failure.

This asymptotic expression follows from the key renewal theorem (see [9]).

This asymptotic interval reliability should not be confused with the asymptotic reliability $R(\infty)$ which is always equal to 0.

- d) When $\lambda(t) = \lambda$ and is constant, i.e. when the times to failure are exponentially distributed,

$$R(t_1, t_2) = \exp [-\lambda \cdot (t_2 - t_1)]$$

In this case, the asymptotic interval reliability is given by

$$\lim_{t \rightarrow \infty} R(t, t + x) = \exp (-\lambda x)$$

- e) For a repairable item with a constant failure rate $\lambda = 1 \text{ year}^{-1}$, its reliability over six months is given by

$$R(t, t + 6) = \exp \left(-1 \times \frac{6}{12} \right) = 0,61$$

where t is the starting point of the six month interval.

6.3.3 Instantaneous failure intensity [192-05-08]

Symbol $z(t)$

The expressions included in 6.3.3 also apply to IOIs.

- a) As per the definition [192-05-08], $z(t)$ is the derivative of the expected number of failures, $Z(t) = E[N(t)]$, in the time interval $[0, t]$ where $N(t)$ is the number of failures during the time interval $[0, t]$ and E denotes the expectation.

$$z(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0^+} \frac{Z(t + \Delta t) - Z(t)}{\Delta t} = \frac{dZ(t)}{dt}$$

For small values of Δt , $z(t) \cdot \Delta t$ is approximately equal to the (unconditional) probability that a failure of the item occurs during $[t, t + \Delta t]$.

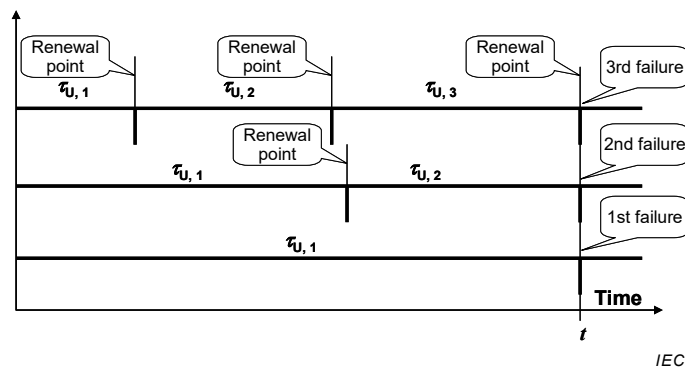


Figure 33 – Sample of possible number of failures at the renewal time t

Figure 33 shows that when one failure/repair occurs at time t , it may be the first, the second, the third ... the n^{th} failure/repair.

The random variable is defined as $\Theta_n(t) = \sum_{i=1}^n \tau_{U,i}(t)$. Then the probability to observe the n^{th} failure between t and $t + dt$ is equal to the probability that $t < \Theta_n(t) \leq t + dt$. This is given by the probability density function of $\Theta_n(t)$. This is noted $h_{\text{CTTF}}^{(n)}(t)$ in the renewal models (see [9]). It follows that $z(t)$ may be written as

$$z(t) = \sum_{n=1}^{\infty} h_{\text{CTTF}}^{(n)}(t)$$

$h_{\text{CTTF}}^{(n)}(t)$ is the probability density function of calendar time until the n^{th} failure of the item. It is related to a sum of random variables. Therefore, according to the basic properties of random variables, it is given by the convolution products of the probability density functions of the random variables within the sum. Due to the "as good as new" hypothesis, all the probability density function of the $\tau_{U,i}$ are equal to $f_U(t)$ which is the probability density function of the up times of the item, i.e. for small values of Δt , $f_U(t) \cdot \Delta t$ is approximately equal to the probability that a given up time of the item terminates during $(t, t + \Delta t)$, assuming that the up time started at time $t = 0$.

NOTE 1 When the item operates continuously, $f_U(t)$ is equal to $f(t)$.

This gives

$$h_{\text{CTTF}}^{(n)}(t) = f_U^{(n)}(t)$$

where $f_U^{(n)}(t)$ is the convolution of $f_U(t)$ n times with itself.

Therefore $h_{\text{CTTF}}^{(n)}(t) = f_U^{(n)}(t) = (f_U^{(n-1)} * f_U)(t) = (h_{\text{CTTF}}^{(n-1)} * f_U)(t)$

where "*" is used to note the convolution product,

NOTE 2 The convolution product of two functions $x(t)$ and $y(t)$ is given by $x(t) * y(t) = \int_0^t x(t - \tau)y(\tau)d\tau$

Finally $h_{\text{CTTF}}^{(n)}(t)$ may be calculated by the following recursive relationship:

$$h_{\text{CTTF}}^{(1)}(t) = f_U(t)$$

$$h_{\text{CTTF}}^{(n)}(t) = \int_0^t f_U(x) h_{\text{CTTF}}^{(n-1)}(t - x) dx, \text{ for } n > 1$$

Coming back to $z(t)$, the following formulae are obtained:

$$\begin{aligned} z(t) &= h_{\text{CTTF}}^{(1)}(t) + \sum_{n=2}^{\infty} h_{\text{CTTF}}^{(n)}(t) = f_U(t) + \sum_{n=2}^{\infty} \int_0^t f_U(x) h_{\text{CTTF}}^{(n-1)}(t - x) dx \\ &= f_U(t) + \sum_{j=1}^{\infty} \int_0^t f_U(x) h_{\text{CTTF}}^{(j)}(t - x) dx = f_U(t) + \int_0^t f_U(x) \sum_{j=1}^{\infty} h_{\text{CTTF}}^{(j)}(t - x) dx \end{aligned}$$

The instantaneous failure intensity, $z(t)$, satisfies the following integral equation (see [9] and [11]):

$$z(t) = f_U(t) + \int_0^t f_U(x) z(t-x) dx$$

which may be solved by numerical methods.

- b) If observed failure data are available for n repairable items, from a homogenous population, then an estimate of $z(t)$ is given by

$$\hat{z}(t) = \frac{n_F(t, t + \Delta t)}{n \Delta t}$$

where $n_F(t, t + \Delta t)$ is the number of failures observed during the time interval $[t, t + \Delta t]$.

- c) When the up times are exponentially distributed the unconditional failure intensity is equal to $A(t) \cdot \lambda_U$. The item being repaired immediately after failure, it is available at any time so $A(t)=1$ and:

$$z(t) = \lambda_U$$

For a continuously operating item, λ_U equals λ .

6.3.4 Asymptotic failure intensity [192-05-10]

Symbol $z(\infty)$

The expressions included in 6.3.4 also apply to IOIs.

- a) As per the definition, [192-05-10], $z(\infty)$ is the limit, if it exists, of the instantaneous failure intensity $z(t)$, when time t tends to infinity:

$$z(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} z(t)$$

By definition the expected number of failures during the time interval $[0, t]$, $Z(t)$ is equal to $Z(t) = \int_0^t z(\tau) d\tau$. If $z(t)$ reaches an asymptotic value when t tends to infinity, then (see 6.1.6):

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{Z(t)}{t} = z(\infty)$$

As per the definition of the mean time between failures METBF, the expected number of failures $Z(t)$ over $[0, t]$ tends towards $\frac{t}{\text{METBF}}$ when t increases. In the case of zero time to restoration, MDT is equal to 0 and METBF = MUT. Then:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{Z(t)}{t} = \frac{1}{\text{MUT}}$$

Finally, when it exists, the asymptotic failure intensity $z(\infty)$ is given by the equation

$$z(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} z(t) = \frac{1}{\text{MUT}}$$

Under appropriate assumptions on $f_U(t)$, the above equation follows from the renewal density theorem (see [5], [9], [10] and [12]).

NOTE The easiest way to check conditions for the existence of $z(\infty)$ are the following:

- $MUT < \infty$;
- $f_U(t)$ is a bounded function over $[0, +\infty]$ and tends to 0 as $t \rightarrow +\infty$.

- b) If observed failure data are available for n repairable items, from a homogenous population, and the time t is large enough, then an estimate of $z(\infty)$ is given by

$$\hat{z}(\infty) = \hat{z}(t) = \frac{n_F(t, t + \Delta t)}{n \Delta t}$$

where $n_F(t, t + \Delta t)$ is the number of failures observed during the time interval $[t, t + \Delta t]$.

For small values of Δt and large values of t , $z(\infty) \cdot \Delta t$ is approximately equal to the (unconditional) probability that a failure of the item occurs during $[t, t + \Delta t]$.

- c) When the up times are exponentially distributed (see 6.3.3 c)),

$$z(\infty) = \lambda_U$$

For a continuously operating item, λ_U equals λ . (see 3.5, Note 2 and 3.6, Note 3)

6.3.5 Mean failure intensity [192-05-09]

Symbol $\bar{z}(t_1, t_2)$, $0 \leq t_1 < t_2$

The expressions included in 6.3.5 also apply to IOIs.

a)
$$\bar{z}(t_1, t_2) = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} z(t) dt$$

The integral $\int_{t_1}^{t_2} z(t) dt$ is equal to the expected number of failures of the item in the time interval $[t_1, t_2]$, hence $\bar{z}(t_1, t_2)$ may be interpreted as the expected number of failures per unit of time in $[t_1, t_2]$.

- b) If observed failure data are available for n repairable items, from a homogenous population, then an estimate of $\bar{z}(t_1, t_2)$ is given by

$$\hat{\bar{z}}(t_1, t_2) = \frac{n_F(t_1, t_2)}{n \cdot (t_1 - t_2)}$$

where $n_F(t_1, t_2)$ is the number of failures observed in the time interval $[t_1, t_2]$.

- c) By setting $t_1 = t$ and $t_2 = t + x$, the asymptotic mean failure intensity can be obtained:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \bar{z}(t, t + x) = \frac{1}{METBF}$$

NOTE This equality comes from the equilibrium reached by the renewal process when t goes to infinity. When this equilibrium is reached, the number of failures observed within the interval $[t, t + x]$ tends towards $x/METBF$ and therefore the mean number of failures tends towards $1/METBF$. This equality can be demonstrated in a more mathematical way by using the Blackwell's theorem (see [9]).

In the zero repair time case, METBF is equal to MUT and:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \bar{z}(t, t + x) = \frac{1}{MUT}$$

which, for large values of t , can be used as an approximation of $\bar{z}(t, t+x)$.

- d) When the up times are exponentially distributed, (see 6.3.3 c) then

$$\bar{z}(t_1, t_2) = \lambda_U$$

For a continuously operating item, λ_U equals λ (see 3.5, Note 2 and 3.6, Note 3). Then $\bar{z}(t_1, t_2) = \lambda$

6.3.6 Mean time between failures (see 3.3)

The expressions included in 6.3.6 also apply to IOIs.

- a) In this case the MDT is equal to zero, the mean time between failures is reduced to the MUT (see 6.1.4):

$$\text{METBF} = \text{MUT} = \int_0^{\infty} t f_U(t) dt$$

where $f_U(t)$ is the probability density function of the up times of the item (including its operating, idle, standby and external disabled times).

NOTE In cases where the assumption in 5.5.1 f) is not valid, i.e. when function-preventing preventive actions are performed, the time between failures includes the times for such actions. In this case,

$$\text{METBF} > \text{MUT}$$

If the item operates continuously,

mean time between failures

= mean time to failure (MTTF)

= mean operating time between failures (MOTBF)

= mean up time (MUT).

- b) If the up times are exponentially distributed,

$$\text{mean time between failures} = \frac{1}{\lambda_U}$$

If the item operates continuously, λ_U equals λ .

6.3.7 Mean operating time to failure [192-05-11]

MTTF (abbreviation)

- a) In the case of an individual repairable item and using the "as good as new" hypothesis, the MTTF has the same value as the MTTF (mean time to first failure). It can be calculated by the following general formula:

$$\text{MTTF} = \text{MTTF} = \int_0^{\infty} t f(t) dt = \int_0^{\infty} R(t) dt$$

- b) When all observed operating times to failure of n items, from a homogenous population, are available, then an estimate of MTTF is given by

$$\hat{\text{MTTF}} = \frac{\text{total operating time}}{k_F} = \frac{\sum_{i=1}^n (\text{operating time})_i}{k_F}$$

where

"total operating time" is the aggregate operating time of all n items during a given time period;

k_F is the total number of failures observed during the given time period;

$(\text{operating time})_i$ is the aggregate operating time of the i th item during the given time period.

- c) When the times to failure are exponentially distributed

$$\text{MTTF} = \frac{1}{\lambda}$$

- d) For a repairable item with a constant failure rate of $0,5 \text{ year}^{-1}$

$$\text{MTTF} = 2 \text{ years} = 17\,520 \text{ h}$$

6.3.8 Mean operating time between failures [192-05-13]

MOTBF

- a) As the time to restoration is equal to zero, the MOTBF is equal to the MTTF:

$$\text{MOTBF} = \text{MTTF} = \int_0^{\infty} t f(t) dt = \int_0^{\infty} R(t) dt$$

NOTE For continuously operating items, the MOTBF is equal to the whole MUT. Then, in this case $\text{MOTBF} = \text{MTTF} = \text{MUT}$.

- b) If the times to failure are exponentially distributed,

$$\text{MOTBF} = \frac{1}{\lambda}$$

6.3.9 Instantaneous availability [192-08-01], mean availability [192-08-05] and asymptotic availability [192-08-07]

As the item is repaired immediately, its instantaneous availability is equal to 1 at any time:

$$A(t) \equiv 1, \forall t \in [0, \infty]$$

Therefore, the mean and the steady state availabilities are also identical to 1:

$$\bar{A}(t_1, t_2) = A = A(t) \equiv 1, \forall t \in [0, \infty]$$

Therefore this model is not very useful from an availability calculations point of view.

6.3.10 Mean up time [192-08-09]

MUT (abbreviation)

The expressions in 6.3.10 also apply to IOIs.

$$\text{a) } \text{MUT} = \int_0^{\infty} t f_U(t) dt = \int_0^{\infty} (1 - F_U(t)) dt$$

where $f_U(t)$ is the probability density function of the up times of the item (including its operating, idle, standby and external disabled times).

In the zero repair time case $\text{MDT} = 0$ and $\text{METBF} = \text{MUT}$

For a continuously operating item,

$$\text{MUT} = \text{MTTF} = \text{MTTFF} = \text{MOTBF} = \text{METBF}$$

b) If the up times are exponentially distributed,

$$\text{MUT} = \frac{1}{\lambda_U}$$

If the item operates continuously, λ_U equals λ (see 3.5, Note 2 and 3.6, Note 3).

6.4 Repairable individual items with non-zero time to restoration

6.4.1 General

All expressions in 6.4 are applicable to COIs. Where they are applicable to IOIs, this is stated.

For each measure, the following are presented:

- the generic expression;
- the most common expression (for the cases when times to failure, up times, down times, times to restoration and repair times of the item are exponentially distributed);
- a simple example of application where necessary.

6.4.2 Reliability [192-05-05]

Symbol $R(t_1, t_2)$, $0 \leq t_1 < t_2$

The reliability $R(t_1, t_2)$ over the time interval $[t_1, t_2]$ is also known as the interval reliability.

a) The reliability of an item for the time interval $[t_1, t_2]$ is illustrated in Figure 34.

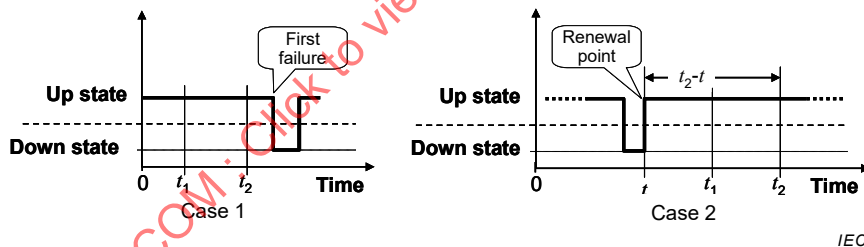


Figure 34 – Illustration of reliable behaviour over $[t_1, t_2]$ for a non-zero time to restoration individual item

Figure 34 is similar to Figure 32 but the renewal points occur after a repair has been performed. The difference is that the probability to have a repair finishing at time t is given by the repair intensity $v(t)$ instead of the failure intensity $z(t)$. Therefore, thanks to the same reasoning explained in 6.3.2, the reliability of a repairable item with non-zero time to restoration for the time interval $[t_1, t_2]$ may be written as (see [13] and [9]):

$$R(t_1, t_2) = R(t_2) + \int_0^{t_1} R(t_2 - t) v(t) dt$$

where

the first term, $R(t_2)$, represents the probability of survival to time t_2 , and the second term represents the probability of restoration (after a failure) at time t ($t < t_1$), and surviving to time t_2 ;

$v(t)$ is the instantaneous restoration intensity of the item, i.e. for small values of Δt , $v(t) \cdot \Delta t$ is approximately equal to the probability that a restoration of the item occurs during $[t, t + \Delta t]$ (see definition 3.1);

$R(t) = R(0, t)$ is the reliability function of the item

$$R(t) = \int_t^{\infty} f(s) ds$$

where $f(t)$ is the probability density function of the times to failure of the item, i.e. for small values of Δt , $f(t) \cdot \Delta t$ is approximately equal to the probability that the item fails during the time interval $[t, t + \Delta t]$. More precisely, it is approximately the probability that a given time to failure terminates in the time interval $[t, t + \Delta t]$, assuming that the time to failure started at time $t = 0$.

NOTE 1 $R(t_1, t_2)$ is the (unconditional) probability of failure-free continuous operation of the item in the time interval $[t_1, t_2]$. The expression may not be true for IOIs.

- b) If observed failure data are available for n repairable items, from a homogenous population, then an estimate of $R(t_1, t_2)$ is given by

$$\hat{R}(t_1, t_2) = \frac{n_S(t_1, t_2)}{n}$$

where $n_S(t_1, t_2)$ is the number of items which were operating at the instant of time t_1 and operated without failure in the time interval $[t_1, t_2]$.

- c) By setting $t_1 = t$ and $t_2 = t + x$, one can obtain the asymptotic interval reliability (See [13] and [9]):

$$\lim_{t \rightarrow \infty} R(t, t + x) = \frac{1}{\text{MTTF} + \text{MTTR}} \int_x^{\infty} R(s) ds$$

which, for large values of t , can be used as an approximation of the $R(t, t + x)$, where

MTTF is the mean time to failure, and

MTTR is the mean time to restoration.

This expression follows from the key renewal theorem (see [9]).

- d) When the times to failure are exponentially distributed, then

$$R(t_1, t_2) = A(t_1) \exp(-\lambda \cdot (t_2 - t_1))$$

where $A(t_1)$ is the instantaneous availability at time t_1 .

NOTE 2 The probability $R(t_1, t_2)$ for the item to be in up state over $[t_1, t_2]$ is equal to the probability to be in up state at time t_1 (i.e. available at time t_1 , $A(t_1)$) multiplied by the conditional probability to have no failures over $[t_1, t_2]$ – i.e. $\exp[-\lambda \times (t_2 - t_1)]$ as the exponential case is considered.

and

$$\lim_{t \rightarrow \infty} R(t, t + x) = \frac{\text{MTTF}}{\text{MTTF} + \text{MTTR}} \exp(-\lambda x)$$

(See [9])

NOTE 3 The formula for $R(t_1, t_2)$ above can be related to IEC 60050-192:2015, 192-05-05, Note 2, by assuming that $t_1 = 0$, $t_2 = t$, $R(t_1, t_2) = R(0, t) = R(t)$ and $A(t_1) = A(0) = 1$.

- e) When the times to failure and times to restoration are exponentially distributed, then, using either Markov techniques or the Laplace transform, the following is obtained:

$$R(t_1, t_2) = A(t_1) e^{-\lambda \times (t_2 - t_1)} = \left(\frac{\mu_R}{\lambda + \mu_R} + \frac{\lambda}{\lambda + \mu_R} e^{-(\lambda + \mu_R)t_1} \right) e^{-\lambda \times (t_2 - t_1)}$$

and

$$\lim_{t \rightarrow \infty} R(t, t+x) = \frac{\mu_R}{\lambda + \mu_R} \exp(-\lambda x)$$

(See [9])

- f) Figure 35 illustrates the application of the above formula for calculating $R(t, t + 1/4)$ for a COI with $\lambda = 2 \text{ year}^{-1}$ and a restoration rate of $\mu_R = 10 \text{ year}^{-1}$:

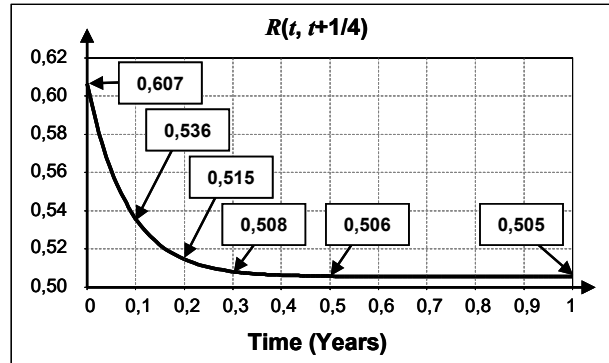


Figure 35 – Evolution of $R(t, t + 1/4)$

This curve shows that $R(t, t + 1/4)$ decreases from 0,607 when $t = 0$ to 0,505 when t goes to infinity.

6.4.3 Instantaneous failure intensity [192-05-08]

Symbol $z(t)$

The expressions in 6.4.3 also apply to COIs.

- a) As per the definition [192-05-08], $z(t)$ is the derivative of the expected number of failures, $Z(t) = E[N(t)]$, in the time interval $[0, t]$, including up and down times, where $N(t)$ is the number of failures in the time interval $[0, t]$, and E denotes the expectation, thus

$$z(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0^+} \frac{Z(t + \Delta t) - Z(t)}{\Delta t} = \frac{dZ(t)}{dt}$$

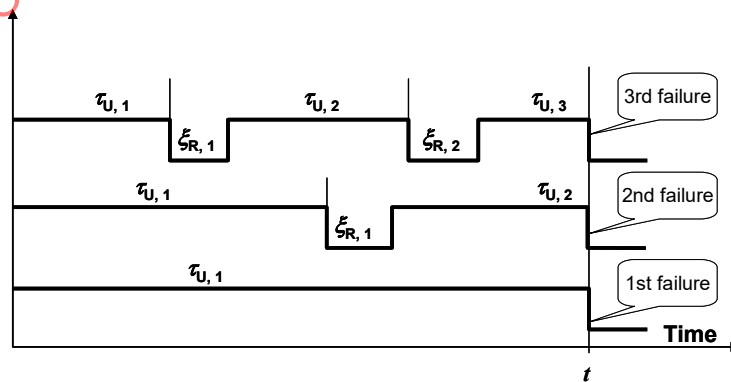


Figure 36 – Sample of possible number of failures at the renewal time t

Figure 36 shows that when one failure occurs at time t , it may be the first, the second, the third, ..., the n^{th} failure.

The random variable is defined as $\Theta_n(t) = \sum_{i=1}^n [\xi_{R,i}(t) + \tau_{U,i+1}(t)]$. Then the probability to observe the n^{th} failure between t and $t + dt$ is equal to the probability that $t < \Theta_n(t) \leq t + dt$. This is given by the probability density function of $\Theta_n(t)$ and is noted $h_{\text{CTTF}}^{(n)}(t)$ in the alternating renewal process theory (see [9]). It follows that $z(t)$ may be written as

$$z(t) = \sum_{n=1}^{\infty} h_{\text{CTTF}}^{(n)}(t)$$

where $h_{\text{CTTF}}^{(n)}(t)$ is the probability density function of calendar time to the n^{th} failure of the item. The formulae are similar to those developed in the zero-time to restoration case in 6.3.3 but the common probability density functions $f_U(t)$ of the $\tau_{U,i}$ has to be replaced by the common probability density function, $f_{R+U}(t)$ of the $(\xi_{R,i} + \tau_{U,i+1})$ and may be calculated by the following recursive relations:

$$h_{\text{CTTF}}^{(1)}(t) = f_U(t)$$

$$h_{\text{CTTF}}^{(n)}(t) = \int_0^t h_{\text{CTTF}}^{(n-1)}(x) f_{R+U}(t-x) dx, \text{ for } n > 1$$

where

$f_U(t)$ is the probability density function of the up times of the item (including its operating, idle, standby and external disabled times). For small values of Δt , $f_U(t) \cdot \Delta t$ is approximately equal to the probability that a given up time of the item terminates during $[t, t + \Delta t]$, assuming that the up time started at time $t = 0$;

$f_{R+U}(t)$ is the probability density function of the sum of the times to restoration ($\xi_{R,i}$) and the following up times ($\tau_{U,i+1}$). According to the properties of the probability density functions this is given by the following convolution product

$$f_{R+U}(t) = \int_0^t g_R(t-s) f_U(s) ds$$

where $g_R(t)$ is the probability density function of the times to restoration of the item, i.e. for small values of Δt , $g_R(t) \cdot \Delta t$ is approximately equal to the probability that the item is restored from a fault to an up state in the time interval $[t, t + \Delta t]$, assuming that a failure resulting in a fault occurred at time $t = 0$.

According to the commutative properties of the convolution product $f_{R+U}(t) = f_{U+R}(t)$.

For small values of Δt , $z(t) \cdot \Delta t$ is approximately equal to the (unconditional) probability that a failure of the item occurs during the time interval $[t, t + \Delta t]$.

NOTE 1 Let $\tau_{U,1}, \xi_{R,1}, \tau_{U,2}, \xi_{R,2}, \dots, \tau_{U,n}, \xi_{R,n} \dots$ be consecutive up times (τ_U) and times to restoration (ξ_R) of the item. Then $h_{\text{CTTF}}^{(n)}(t)$ is the probability density function of the sum

$$\tau_{U,1} + (\xi_{R,1} + \tau_{U,2}) + (\xi_{R,2} + \tau_{U,3}) + \dots + (\xi_{R,n-1} + \tau_{U,n})$$

while $f_{R+U}(t)$ is the probability density function of the sum $\xi_{R,m-1} + \tau_{U,m}$ for any $m > 2$.

NOTE 2 The instantaneous failure intensity, $z(t)$, and the instantaneous restoration intensity, $v(t)$, fulfil the following simultaneous system of equations:

$$z(t) = f_U(t) + \int_0^t f_U(t-s)v(s)ds$$

$$v(t) = \int_0^t g_R(t-s)z(s)ds$$

Mathematically speaking, this constitutes a system of linear Volterra integral equations (see [14]) which can be solved by numerical methods.

These formulae can be established in the same way as this has been done in 6.3.3 for $z(t) = f_U(t) + \int_0^t f_U(t-s)z(s)ds$ when the time to repair is equal to 0.

- b) If observed failure data are available for n repairable items, from a homogenous population, then an estimate of $z(t)$ is given by

$$\hat{z}(t) = \frac{n_F(t, t + \Delta t)}{n\Delta t}$$

where $n_F(t, t + \Delta t)$ is the number of failures observed during the time interval $[t, t + \Delta t]$, where the time scale includes both up and down times.

- c) When the up times are exponentially distributed, then (see [4])

$$z(t) = A(t)\lambda_U$$

where $A(t)$ is the instantaneous availability.

NOTE 3 For an individual item, the failure rate λ_U is equal to the conditional failure intensity of the item. Then the above formula comes directly from the fundamental relationship between the conditional and unconditional failure intensities (see 6.1.6).

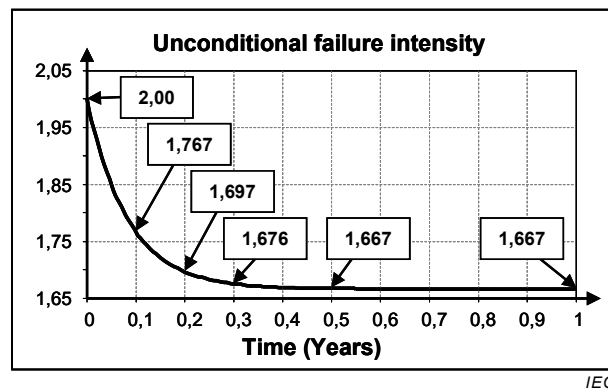
When the item operates continuously, $f_U(t) = f(t)$ and $\lambda_U = \lambda$.

- d) When the up times and times to restoration are exponentially distributed, Markov techniques or the Laplace transform can be used to yield (see [14]):

$$z(t) = \frac{\lambda_U \mu_R}{\lambda_U + \mu_R} + \frac{\lambda_U^2}{\lambda_U + \mu_R} \exp[-(\lambda_U + \mu_R)t] = A(t)\lambda_U$$

For a COI, λ_U equals λ (see 3.5, Note 2 and 3.6, Note 3).

- e) Figure 37 illustrates the application of the above formula for calculating $z(t)$ for a COI with a failure rate of $\lambda = 2 \text{ year}^{-1}$ and a restoration rate of $\mu_R = 10 \text{ year}^{-1}$.



NOTE Four digits have been kept to illustrate how $z(t)$ converges towards the limit value.

Figure 37 – Evolution of the failure intensity $z(t)$

6.4.4 Asymptotic failure intensity [192-05-10]

Symbol $z(\infty)$

The expressions included in 6.4.4 also apply to IOIs.

- a) As per the definition [192-05-10], $z(\infty)$ is the limit, if it exists, of the instantaneous failure intensity $z(t)$, when time t tends to infinity:

$$z(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} z(t)$$

By definition $\text{METBF} = \text{MUT} + \text{MDT}$ is the mean time between two consecutive failures. Then the mean number of failures over an interval $[0, t]$ is $Z(t) \approx t / \text{METBF}$. As shown in Note 1 hereafter and in 6.3.4, $z(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{Z(t)}{t}$. Therefore, when it exists, the asymptotic failure intensity $z(\infty)$ is given by the equation

$$z(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} z(t) = \frac{1}{\text{METBF}} = \frac{1}{\text{MUT} + \text{MDT}}$$

As preventive maintenance is not considered in this document, $\text{MDT} = \text{MTTR}$. Then

$$z(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} z(t) = \frac{1}{\text{MUT} + \text{MTTR}}$$

which, under appropriate assumptions on $f_U(t)$ and $g_R(t)$, follows from the renewal density theorem (see [5], [9], [10] and [12] and Note 2).

NOTE 1 Using the elementary renewal theorem (see [9]):

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{Z(t)}{t} = \frac{1}{\text{MUT} + \text{MTTR}}$$

but

$$Z(t) = \int_0^t z(s) ds$$

hence, if $z(\infty)$ exists, then

$$z(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{Z(t)}{t}$$

(see [7]).

NOTE 2 The easiest way to check conditions for the existence of $z(\infty)$ are the following: $\text{MUT} < \infty$, $\text{MTTR} < \infty$; at least one of $f_U(t)$ or $g_R(t)$ is a bounded function on $[0, +\infty]$ tending to 0 as $t \rightarrow +\infty$.

- b) If observed failure data are available for n repairable items, from a homogenous population, and the time t is large enough, then an estimate of $z(\infty)$ is given by

$$\hat{z}(\infty) = \hat{z}(t) = \frac{n_F(t, t + \Delta t)}{n \Delta t}$$

where $n_F(t, t + \Delta t)$ is the number of failures observed during the time interval $[t, t + \Delta t]$.

For small values of Δt and large values of t , $z(\infty) \cdot \Delta t$ is approximately equal to the (unconditional) probability that a failure of the item occurs during $[t, t + \Delta t]$.

- c) When the up times are exponentially distributed, then (see [4])

$$z(\infty) = A \cdot \lambda_U$$

where A is the asymptotic availability.

When the item operates continuously, $f_U(t) = f(t)$ and $\lambda_U = \lambda$.

- d) When the up times and times to restoration are exponentially distributed, then (see 6.4.3 d)

$$z(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} z(t) = \frac{\lambda_U \mu_R}{\lambda_U + \mu_R} = \frac{1}{\frac{1}{\lambda_U} + \frac{1}{\mu_R}}$$

For a COI, λ_U equals λ (see 3.5, Note 2 and 3.6, Note 3).

- e) For a COI with a failure rate of $\lambda = 2 \text{ year}^{-1}$ and a restoration rate of $\mu_R = 10 \text{ year}^{-1}$,

$$z(\infty) = \frac{20}{12} = 1,7 \text{ year}^{-1}$$

This is illustrated in Figure 37.

6.4.5 Mean failure intensity [192-05-09]

Symbol $\bar{z}(t_1, t_2)$, $0 \leq t_1 < t_2$

The expressions in 6.4.5 also apply to IOIs.

- a) By definition

$$\bar{z}(t_1, t_2) = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} z(t) dt$$

The integral $\int_{t_1}^{t_2} z(t) dt$ is equal to the expected number of failures of the item in the time interval $[t_1, t_2]$. Hence $\bar{z}(t_1, t_2)$ may be interpreted as the expected number of failures per unit of time in $[t_1, t_2]$.

- b) If observed failure data are available for n repairable items, from a homogenous population, then an estimate of $\bar{z}(t_1, t_2)$ is given by

$$\hat{\bar{z}}(t_1, t_2) = \frac{n_F(t_1, t_2)}{n(t_2 - t_1)}$$

where $n_F(t_1, t_2)$ is the number of failures observed during the time interval $[t_1, t_2]$, where the time scale includes both up and down times.

- c) By setting $t_1 = t$ and $t_2 = t + x$, the asymptotic mean failure intensity may be obtained:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \bar{z}(t, t + x) = \frac{1}{\text{METBF}} = \frac{1}{\text{MUT} + \text{MDT}}$$

NOTE This equality comes from the equilibrium reached by the renewal process when t goes to infinity. When this equilibrium is reached, the number of failures observed within the interval $[t, t + x]$ tends towards x/METBF and therefore the mean number of failures tends toward $1/\text{METBF}$. This equality can be demonstrated in a more mathematical way by using the Blackwell's theorem (see [9]).

As preventive maintenance is not taken under consideration in this document, the MDT can be replaced by the MTTR in the formula:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \bar{z}(t, t+x) = \frac{1}{\text{MUT} + \text{MTTR}}$$

which, for large values of t , can be used as an approximation of $\bar{z}(t, t+x)$.

- d) When the up times are exponentially distributed (see [4]),

$$\bar{z}(t_1, t_2) = \bar{A}(t_1, t_2) \lambda_U$$

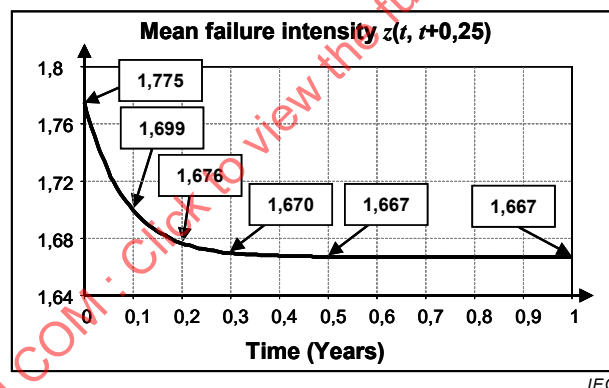
When the item operates continuously, $\lambda_U = \lambda$.

- e) When the up times and times to restoration are exponentially distributed, then (see [14] and [18])

$$\bar{z}(t_1, t_2) = \frac{\lambda_U \mu_R}{\lambda_U + \mu_R} + \frac{\lambda_U^2}{(\lambda_U + \mu_R)^2} \frac{\exp[-(\lambda_U + \mu_R)t_1] - \exp[-(\lambda_U + \mu_R)t_2]}{t_2 - t_1} = \bar{A}(t_1, t_2) \lambda_U$$

For a COI, $\lambda_U = \lambda$.

- f) Figure 38 illustrates the application of the above formula for calculating the mean failure intensity for a COI with a failure rate of $\lambda = 2 \text{ year}^{-1}$ and a restoration rate of $\mu_R = 10 \text{ year}^{-1}$



NOTE Four digits have been kept to illustrate how the mean failure intensity converges towards the limit value.

Figure 38 – Evolution of the mean failure intensity $z(t, t + 1/4)$

6.4.6 Mean operating time to failure [192-05-11]

MTTF (abbreviation)

- a) In the case of an individual repairable item and using the "as good as new" hypothesis, the MTTF has the same value as the MTTF (mean time to first failure). It can be calculated by the following general formula:

$$\text{MTTF} = \text{MTTF} = \int_0^{\infty} t f(t) dt = \int_0^{\infty} R(t) dt$$

where $R(t)$ is the reliability function of the item

$$R(t) = \int_t^{\infty} f(s) ds$$

When observed (operating) times to failure of n items, from a homogenous population, are available, then an estimate of MTTF is given by

$$\hat{MTTF} = \frac{\text{total operating time}}{k_o} = \frac{\sum_{i=1}^n (\text{operating time})_i}{k_o}$$

where

"total operating time" is the aggregate operating time of all n items during a given time period;

k_o is the total number of failures of the items while operating during the given time period;

"(operating time) _{i} " is the total operating time of the i th item during the given time period.

b) When the times to failure are exponentially distributed,

$$MTTF = \frac{1}{\lambda}$$

c) For a COI with a failure rate of $\lambda = 2 \text{ year}^{-1}$:

$$MTTF = \frac{1}{2} = 0,5 \text{ years} = 4\,380 \text{ h}$$

6.4.7 Mean time between failures (see 3.3)

METBF (abbreviation)

The expressions in 6.4.7 also apply to IOIs.

a) according to 6.1.4, METBF = MUT + MTTR:

$$METBF = \int_0^{\infty} t f_U(t) dt + \int_0^{\infty} t g_R(t) dt$$

If the item operates continuously:

$$METBF = MTTF + MTTR$$

NOTE In cases where the assumption 5.5.1 f) is not valid, the time between failures can include some down times due to preventive maintenance. Then, the formula established in 6.1.4 is still valid:

$$METBF = MUT + MDT$$

b) If observed failure data are available for n similar repairable items, then an estimate of the mean time between failures is given by

$$\hat{METBF} = \frac{\text{observation time}}{k_F} = \frac{\sum_{i=1}^n (\text{observation time})_i}{k_F} = \hat{METBF}$$

where

"observation time" is the aggregate calendar time of observation of all n items, including both up and down times;

"(observation time) _{i} " is the total calendar time of observation of the i th item, including both up and down times;

k_F is the total number of failures of the n items during a given period of observation.

- c) If the up times and times to restoration are exponentially distributed

$$\text{METBF} = \frac{1}{\lambda_U} + \frac{1}{\mu_R} = \frac{\lambda_U + \mu_R}{\lambda_U \mu_R}$$

If the item operates continuously, λ_U equals λ .

- d) For a continuously operating item with a failure rate of $\lambda = 2 \text{ year}^{-1}$ and a restoration rate of $\mu_R = 10 \text{ year}^{-1}$

$$\text{METBF} = \frac{12}{20} = 0,6 \text{ years} = 5\,256 \text{ h}$$

6.4.8 Mean operating time between failures [192-05-13]

MOTBF (abbreviation)

- a) On the basis of the assumptions in 5.5.1,

$$\text{MOTBF} = \text{MTTF} \text{ (See 6.3.8.)}$$

- b) If the times to failure are exponentially distributed, then

$$\text{MOTBF} = \frac{1}{\lambda}$$

- c) For a continuously operating item with a failure rate of $\lambda = 2 \text{ year}^{-1}$,

$$\text{MOTBF} = \frac{1}{2} = 0,5 \text{ years} = 4\,380 \text{ h}$$

6.4.9 Instantaneous availability [192-08-01]

Symbol $A(t)$

The expressions in 6.4.9 also apply to IOIs.

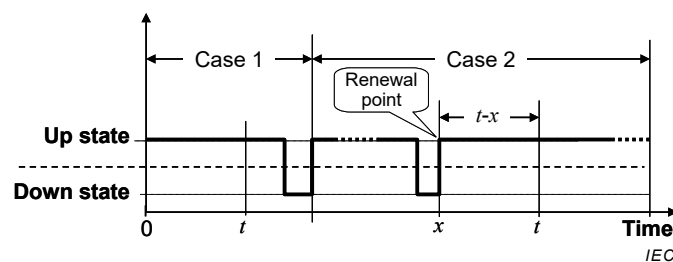


Figure 39 – Illustration of available behaviour at time t for a non-zero time to restoration individual item

- a) As shown in Figure 39, two cases have to be analysed to establish the instantaneous availability $A(t)$ of the item at time t :

- No failure has occurred over $[0, t]$: $R(t)$
- At least one failure has occurred at time $x < t$ and no failure has occurred over $[x, t]$

Therefore the instantaneous availability can be established by using the restoration intensity $v(t)$ of the item which is the probability that a restoration finishes at the instant t :

$$A(t) = R(t) + \int_0^t R(t-x) v(x) dx$$

Replacing the reliability $R(t)$ by $F_U(t) = 1-R(t)$, the instantaneous availability of a repairable item with non-zero time to restoration at an instant of time t may be written as (see [13], [9] and [5]):

$$A(t) = 1 - F_U(t) + \int_0^t [1 - F_U(t-x)] v(x) dx$$

where

$F_U(t)$ is the up time distribution function of the item:

$$F_U(t) = \int_0^t f_U(s) ds$$

which is equal to the probability that a given up time will be less than or equal to t ; then $F_U(t)$ is also the unreliability function and $R(t) = 1 - F_U(t)$.

$v(t)$ is the instantaneous restoration intensity of the item.

NOTE The instantaneous availability, $A(t)$, is equal to the probability that the item is in an up state at the instant of time t . This arises if the item has had no failure before t or if the item was available at $t-s$ and that no failure occurs over $[t-s, t]$. This leads to the following integral equation (see [9]):

$$A(t) = 1 - F_U(t) + \int_0^t f_{R+U}(s) A(t-s) ds$$

which may be solved by numerical methods,

where

$$f_{R+U}(t) = \int_0^t g_R(t-s) f_U(s) ds$$

is the probability density function of the sum of the up time and the corresponding time to restoration.

- b) If observed up-state data are available for n repairable items, from a homogenous population, then an estimate of $A(t)$ is given by

$$\hat{A}(t) = \frac{n_U\{t\}}{n}$$

where $n_U\{t\}$ is the number of items which are in an up state at the instant of time t .

If the item operates continuously, then $R_U(t) = R(t)$ and $f_U(t) = f(t)$.

- c) When the up times and times to restoration are exponentially distributed, then using either Markov techniques or the Laplace transform, the following is obtained (see [9], [14] and [18]):

$$A(t) = \frac{\mu_R}{\lambda_U + \mu_R} + \frac{\lambda_U}{\lambda_U + \mu_R} \exp[-(\lambda_U + \mu_R)t]$$

If the item operates continuously, $\lambda_U = \lambda$.

- d) Figure 40 illustrates the application of the above formula for a COI with a failure rate of $\lambda = 2 \text{ year}^{-1}$ and a restoration rate of $\mu_R = 10 \text{ year}^{-1}$.

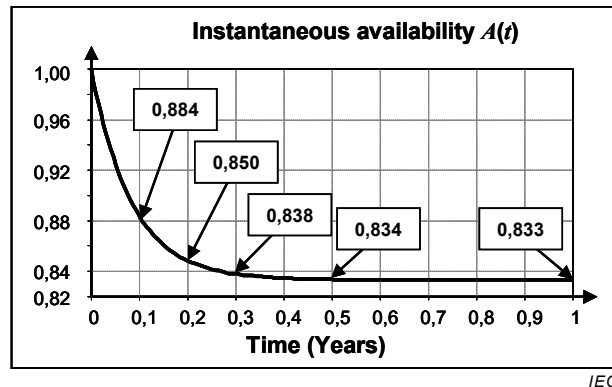


Figure 40 – Evolution of the instantaneous availability $A(t)$

6.4.10 Instantaneous unavailability [192-08-04]

Symbol $U(t)$

The expressions in 6.4.10 also apply to IOIs.

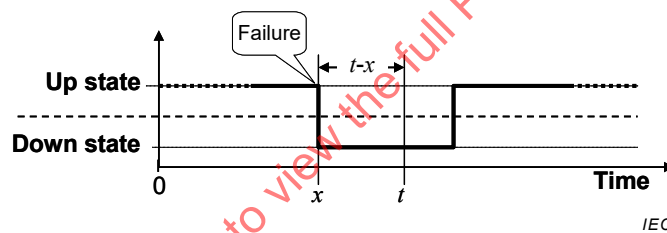


Figure 41 – Illustration of unavailable behaviour at time t for a non-zero time to restoration individual item

- a) The instantaneous unavailability, $U(t)$, is equal to the probability that the item is in a down state at the instant of time t . As shown in Figure 41, the item is in the down state at the instant of time t if a failure has occurred at the instant of time x and the restoration has not been achieved over $[x, t]$. Therefore the instantaneous unavailability, $U(t)$, of a repairable item with non-zero time to restoration may be written as (see [5]):

$$U(t) = 1 - A(t) = \int_0^t [1 - G_R(t-x)] z(x) dx$$

where

$z(t)$ is the instantaneous failure intensity of the item;

$G_R(t)$ is the distribution function of the times to restoration of the item

$$G_R(t) = \int_0^t g_R(s) ds$$

which is equal to the probability that a restoration of the item is completed by time t . In this formula, $g_R(t)$ is the probability density function of the times to restoration of the item.

- b) If observed down-state data are available for n repairable items, from a homogenous population, then an estimate of $U(t)$ is given by

$$\hat{U}(t) = \frac{n_D\{t\}}{n}$$

where $n_D\{t\}$ is the number of items which are in a down state at the instant of time t .

- c) When the up times and times to restoration are exponentially distributed, then (see [14], and [18]),

$$U(t) = \frac{\lambda_U}{\lambda_U + \mu_R} (1 - \exp[-(\lambda_U + \mu_R)t])$$

If the item operates continuously, $\lambda_U = \lambda$.

- d) Figure 42 illustrates the application of the above formula for a COI with a failure rate of $\lambda = 2 \text{ year}^{-1}$ and a restoration rate of $\mu_R = 10 \text{ year}^{-1}$.

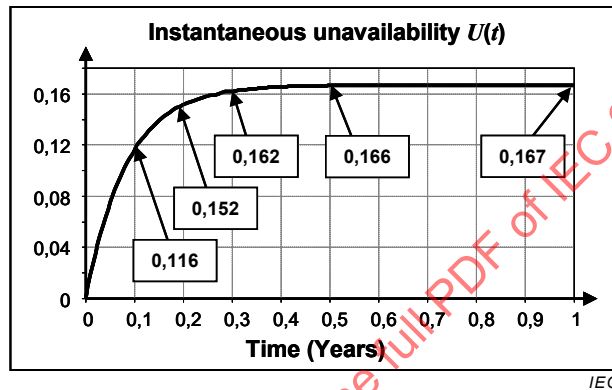


Figure 42 – Evolution of the instantaneous unavailability $U(t)$

6.4.11 Mean availability [192-08-05]

Symbol $\bar{A}(t_1, t_2)$, $0 \leq t_1 < t_2$

The expressions in 6.4.11 also apply to IOIs.

- a) According to its definition the mean availability is given by

$$\bar{A}(t_1, t_2) = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} A(t) dt$$

The integral $\int_{t_1}^{t_2} A(t) dt$ is equal to the expected up time accumulated in the time interval $[t_1, t_2]$, hence $\bar{A}(t_1, t_2)$ gives the expected fraction of the time interval $[t_1, t_2]$ that the item is in an up state.

It then follows that the mean availability, $\bar{A}(t_1, t_2)$, and the mean accumulated up time, $\text{MAUT}(t_1, t_2)$, in the time interval $[t_1, t_2]$ are related as

$$\text{MAUT}(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} A(t) dt = \bar{A}(t_1, t_2) \times (t_2 - t_1)$$

- b) If observed up times in the interval $[t_1, t_2]$ are available for n repairable items, from a homogenous population, then an estimate of $\bar{A}(t_1, t_2)$ is given by

$$\hat{A}(t_1, t_2) = \frac{\text{total up time}}{(t_2 - t_1)n} = \frac{\sum_{i=1}^n (\text{up time})_i}{(t_2 - t_1)n}$$

where

"total up time" is the aggregate up time of all n items during the time interval $[t_1, t_2]$;

"(up time) _{i} " is the total up time of the i th item during the time interval $[t_1, t_2]$.

- c) An estimate of the mean accumulated up time, MAUT(t_1, t_2), in the time interval $[t_1, t_2]$ is given by

$$\hat{\text{MAUT}}(t_1, t_2) = \frac{\text{total up time}}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n (\text{up time})_i}{n}$$

where

"total up time" is the aggregate up time of all n items during the time interval $[t_1, t_2]$;

"(up time) _{i} " is the total up time of the i th item during the time interval $[t_1, t_2]$.

- d) Following from the assumptions given in 5.5.1, the asymptotic mean availability $\bar{A} = \lim_{t_2 \rightarrow \infty} \bar{A}(t_1, t_2)$ is equal to the asymptotic availability A (see 6.1.2.3 and [7]):

$$\bar{A} = A = \frac{\text{MUT}}{\text{MUT} + \text{MTTR}}$$

- e) When the up times and times to restoration are exponentially distributed, then integrating $A(t)$ over the time interval $[t_1, t_2]$ gives:

$$\text{MAUT}(t_1, t_2) = \frac{(t_2 - t_1)\mu_R}{\lambda_U + \mu_R} + \frac{\lambda_U \{ \exp[-(\lambda_U + \mu_R)t_1] - \exp[-(\lambda_U + \mu_R)t_2] \}}{(\lambda_U + \mu_R)^2}$$

Dividing this expression by $t_2 - t_1$ yields:

$$\begin{aligned} \bar{A}(t_1, t_2) &= \frac{\text{MAUT}(t_1, t_2)}{t_2 - t_1} \\ &= \frac{\mu_R}{\lambda_U + \mu_R} + \frac{\lambda_U}{(\lambda_U + \mu_R)^2} \frac{\exp[-(\lambda_U + \mu_R)t_1] - \exp[-(\lambda_U + \mu_R)t_2]}{t_2 - t_1} \\ &= \frac{\bar{z}(t_1, t_2)}{\lambda_U} \end{aligned}$$

If the item operates continuously, $\lambda_U = \lambda$.

- f) Figure 43 illustrates the application of the above formula for a continuously operating item with a failure rate of $\lambda = 2 \text{ year}^{-1}$ and a restoration rate of $\mu_R = 10 \text{ year}^{-1}$.

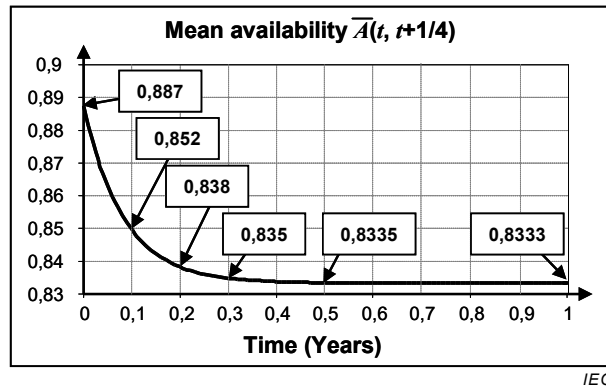


Figure 43 – Evolution of the mean availability $\bar{A}(t, t+1/4)$

The mean accumulated up time, MAUT(0,1), during the first year may be calculated as follows:

$$\text{MAUT}(0,1) = A(0,1) \times 1 = \left[\bar{A}\left(0, \frac{1}{4}\right) + \bar{A}\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right) + \bar{A}\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right) + \bar{A}\left(\frac{3}{4}, 1\right) \right] / 4$$

$$\text{MAUT}(0,1) = (0,887\,5 + 0,836\,0 + 0,833\,5 + 0,833\,3) / 4 = 0,847 \text{ years} = 7\,424 \text{ h}$$

6.4.12 Mean unavailability [192-08-06]

Symbol $\bar{U}(t_1, t_2)$, $0 \leq t_1 < t_2$

The expressions in 6.4.12 also apply to IOIs.

a) According to its definition the mean unavailability is given by

$$\bar{U}(t_1, t_2) = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} U(t) dt = 1 - \bar{A}(t_1, t_2)$$

The integral $\int_{t_1}^{t_2} U(t) dt$ is equal to the expected down time accumulated in the time interval $[t_1, t_2]$. Hence, $\bar{U}(t_1, t_2)$ gives the expected fraction of the time interval $[t_1, t_2]$ spent in the down state.

It then follows that the mean unavailability, $\bar{U}(t_1, t_2)$, and the mean accumulated down time, MADT(t_1, t_2), in the time interval $[t_1, t_2]$ are related as

$$\text{MADT}(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} U(t) dt = \bar{U}(t_1, t_2) \times (t_2 - t_1)$$

b) If observed down times in the interval $[t_1, t_2]$ are available for n repairable items, from a homogenous population, then an estimate of $\bar{U}(t_1, t_2)$ is given by

$$\hat{\bar{U}}(t_1, t_2) = \frac{\text{total down time}}{(t_2 - t_1)n} = \frac{\sum_{i=1}^n (\text{down time})_i}{(t_2 - t_1)n}$$

- c) An estimate of the mean accumulated down time, $\text{MADT}(t_1, t_2)$, in the time interval $[t_1, t_2]$ is given by

$$\hat{\text{MADT}}(t_1, t_2) = \frac{\text{total down time}}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n (\text{down time})_i}{n}$$

where

"total down time" is the aggregate down time of all n items during the time interval $[t_1, t_2]$;

"(down time) $_i$ " is the total down time of the i th item during the time interval $[t_1, t_2]$.

- d) Following from the assumptions given in 5.5.1, the asymptotic mean unavailability $\bar{U} = \lim_{t_2 \rightarrow \infty} \bar{U}(t_1, t_2)$ is equal to the asymptotic unavailability U (see 6.1.2.3 and [7]).

$$\bar{U} = U = \frac{\text{MTTR}}{\text{MUT} + \text{MTTR}}$$

- e) When the down times and times to restoration are exponentially distributed, then integrating $U(t)$ over the time interval $[t_1, t_2]$ gives:

$$\text{MADT}(t_1, t_2) = \frac{(t_2 - t_1)\lambda_U}{\lambda_U + \mu_R} - \frac{\lambda_U \{ \exp[-(\lambda_U + \mu_R)t_1] - \exp[-(\lambda_U + \mu_R)t_2] \}}{(\lambda_U + \mu_R)^2}$$

Dividing this expression by $t_2 - t_1$ yields:

$$\begin{aligned} \bar{U}(t_1, t_2) &= \frac{\text{MADT}(t_1, t_2)}{t_2 - t_1} \\ &= \frac{\lambda_U}{\lambda_U + \mu_R} - \frac{\lambda_U}{(\lambda_U + \mu_R)^2} \frac{\exp[-(\lambda_U + \mu_R)t_1] - \exp[-(\lambda_U + \mu_R)t_2]}{t_2 - t_1} \\ &= 1 - \frac{\bar{Z}(t_1, t_2)}{\lambda_U} \end{aligned}$$

If the item operates continuously, $\lambda_U = \lambda$.

- f) Figure 44 illustrates the application of the above formula for a COI with a failure rate of $\lambda = 2 \text{ year}^{-1}$ and a restoration rate of $\mu_R = 10 \text{ year}^{-1}$.

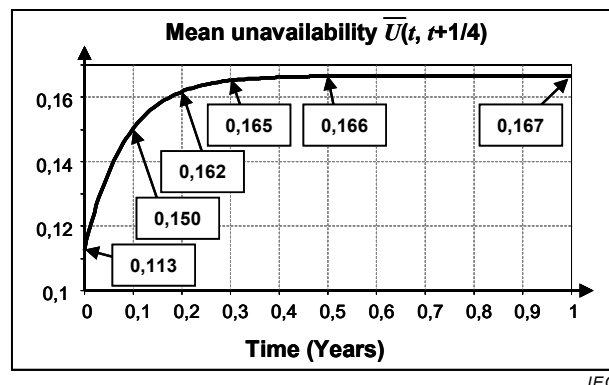


Figure 44 – Evolution of the mean unavailability $\bar{U}(t, t+1/4)$

The mean accumulated down time, $\text{MADT}(0, 1)$, during the first year may be calculated as follows:

$$\text{MADT}(0,1) = \bar{U}(0,1) \times 1 = \left[\bar{U}\left(0, \frac{1}{4}\right) + \bar{U}\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right) + \bar{U}\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right) + \bar{U}\left(\frac{3}{4}, 1\right) \right] / 4$$

$$\text{MADT}(0,1) = (0,112\,5 + 0,164\,0 + 0,166\,5 + 0,166\,7) / 4 = 0,152 \text{ years} = 1335 \text{ h}$$

6.4.13 Asymptotic availability [192-08-07]

Symbol A

The expressions in 6.4.13 also apply to IOIs.

- a) When a steady state exists, the asymptotic availability is equal to the asymptotic mean availability and can be calculated by the general following formula (see 6.1.2.3):

$$\lim_{t \rightarrow \infty} A(t) = A(\infty) = A = \bar{A} = \frac{\text{MUT}}{\text{MUT} + \text{MDT}}$$

As preventive maintenance is not taken under consideration in this document, $\text{MDT} = \text{MTTR}$ (see Figure 2) and

$$A = \frac{\text{MUT}}{\text{MUT} + \text{MTTR}}$$

If, in addition, the item operates continuously, then

$$A = \frac{\text{MTTF}}{\text{MTTF} + \text{MTTR}}$$

When the up times and times to restoration are exponentially distributed, then

$$A = \frac{\mu_R}{\lambda_U + \mu_R}$$

If the item operates continuously, $\lambda_U = \lambda$.

- b) For a COI with a failure rate of $\lambda = 2 \text{ year}^{-1}$ and a restoration rate of $\mu_R = 10 \text{ year}^{-1}$

$$A = \frac{10}{12} = 0,83$$

This is illustrated in Figure 40.

6.4.14 Asymptotic unavailability [192-08-08]

Symbol U

The expressions in 6.4.14 also apply to IOIs.

- a) When a steady state exists, the asymptotic unavailability is equal to the asymptotic mean unavailability and can be calculated by the general following formula (see 6.1.2.3):

$$\lim_{t \rightarrow \infty} U(t) = U(\infty) = \bar{U} = U = \frac{\text{MDT}}{\text{MUT} + \text{MDT}}$$

As the preventive maintenance is not taken under consideration in this document, $\text{MDT} = \text{MTTR}$ (see Figure 2) and

$$U = \lim_{t \rightarrow \infty} U(t) = \frac{\text{MTTR}}{\text{MUT} + \text{MTTR}} = 1 - A$$

If, in addition, the item operates continuously, then

$$U = \frac{\text{MTTR}}{\text{MTTF} + \text{MTTR}}$$

b) When the up times and times to restoration are exponentially distributed, then

$$U = \frac{\lambda_U}{\lambda_U + \mu_R}$$

If the item operates continuously, $\lambda_U = \lambda$.

c) For a COI with a failure rate of $\lambda = 2 \text{ year}^{-1}$ and a restoration rate of $\mu_R = 10 \text{ year}^{-1}$, then:

$$U = \frac{2}{12} = 0,17$$

This is illustrated in Figure 42.

6.4.15 Mean up time [192-08-09]

MUT (abbreviation)

The expressions in 6.4.15 also apply to IOIs.

$$\text{a) } \text{MUT} = \int_0^{\infty} t f_U(t) dt = \int_0^{\infty} (1 - F_U(t)) dt$$

where

$f_U(t)$ is the probability density function of the up times of the item;

$F_U(t)$ is the up time distribution function of the item.

NOTE When the item operates continuously, then, according to the assumption in 5.5.1 f) (i.e no preventive maintenance):

$$\text{MUT} = \text{MTTF}$$

However, when function-preventing preventive maintenance is permitted, the relation between MUT and MTTF is more complex, and usually, $\text{MUT} < \text{MTTF}$.

b) If observed up times are available for n repairable items, from a homogenous population, then an estimate of MUT is given by

$$\hat{\text{MUT}} = \frac{\text{total up time}}{k_U} = \frac{\sum_{i=1}^n (\text{up time})_i}{k_U}$$

where

"total up time" is the aggregate up time of all n items during the given period of observation;

k_U is the total number of up times of the items during the given period of observation;

"(up time) _{i} " is the total up time of the i th item during the given period of observation.

EXAMPLE Consider an item belonging to IOIs, which operates as described below. The item starts operating at time $t = 0$ and is required to operate (be in operating state) for a fixed time interval $[0, X]$, $X > 0$ during which the item can fail with a constant failure rate of

$\lambda > 0$. If the item did not fail in this interval, it becomes not required for subsequent fixed time interval $[X, X + Y]$, $Y > 0$, during which the item cannot fail (i.e. the item is in a failure free idle state during this interval). At time $t = X + Y$ the next required time starts and the functioning process repeats as from the initial time $t = 0$, independently of previous history of the item functioning process. When the item fails during the required time $[0, X]$, it is repaired to the state as good as new and then the functioning process repeats again as at the initial time $t = 0$, independently of the previous history of the item functioning process. Repair times are mutually independent and also independent of the previous history of the item functioning process. See Figure 45.

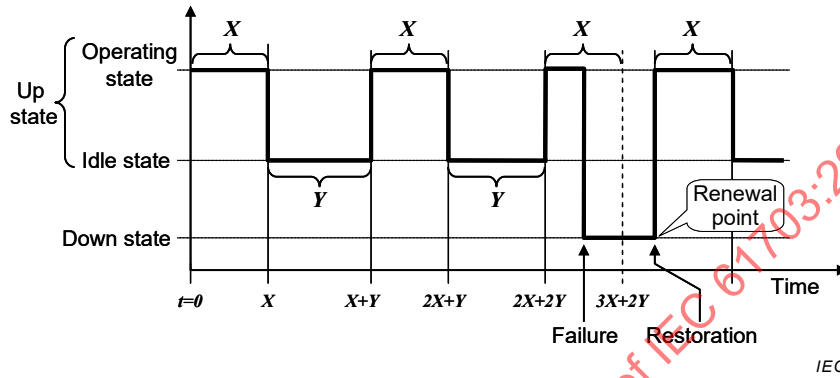


Figure 45 – Sample realization of the individual item state

It is clear from the above description that consecutive up times are statistically independent and are identically distributed positive, continuous random variables. Therefore, to calculate MUT, the up time to first failure of the item can be considered. The up-time hazard rate function $\lambda_U(t)$ is depicted in Figure 46.

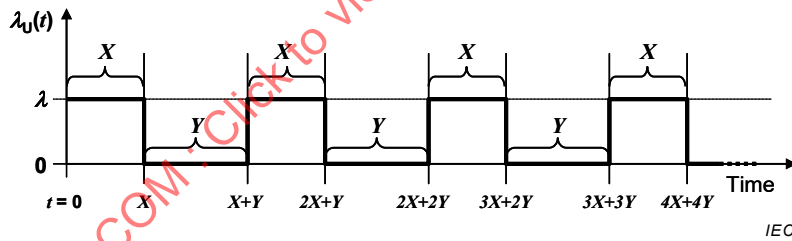


Figure 46 – Plot of the up-time hazard rate function $\lambda_U(t)$

The analytical form of $\lambda_U(t)$ is:

$$\lambda_U(t) = \begin{cases} \lambda & \text{for } n \cdot (X + Y) \leq t < n \cdot (X + Y) + X \\ 0 & \text{for } n \cdot (X + Y) + X \leq t < (n + 1) \cdot (X + Y) \end{cases}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Since

$$1 - F_U(t) = \exp\left(-\int_0^t \lambda_U(x) dx\right),$$

then by integrating $\lambda_U(t)$, the above formula can be written as:

$$1 - F_U(t) = \begin{cases} \exp(-\lambda \cdot (t - n \cdot Y)) & \text{for } n \cdot (X + Y) \leq t < n \cdot (X + Y) + X \\ \exp(-\lambda \cdot (n + 1) \cdot X) & \text{for } n \cdot (X + Y) + X \leq t < (n + 1) \cdot (X + Y) \end{cases}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

By integrating $1 - F_U(t)$ over $[0, \infty]$, MUT of the item is obtained:

$$\text{MUT} = \frac{1}{\lambda} + Y \cdot \frac{\exp(-\lambda \cdot X)}{1 - \exp(-\lambda \cdot X)} = \text{MOTBF} + Y \cdot \frac{\exp(-\lambda \cdot X)}{1 - \exp(-\lambda \cdot X)}$$

The second term of the above formula is equal to the expected accumulated idle time to failure of the item. For $\lambda = 0,01 \text{ h}^{-1}$ and $X = 10 \text{ h}$, the following values of MUT for some values of Y are obtained:

$$\text{MUT} = 195 \text{ h for } Y = 10 \text{ h, } \text{MUT} = 290 \text{ h for } Y = 20 \text{ h,}$$

$$\text{MUT} = 575 \text{ h for } Y = 50 \text{ h, } \text{MUT} = 1\,051 \text{ h for } Y = 100 \text{ h,}$$

whereas:

$$\text{MOTBF} = 100 \text{ h.}$$

c) When the up times are exponentially distributed

$$\text{MUT} = \frac{1}{\lambda_U}$$

d) For a repairable item with $\lambda_U = 2 \text{ year}^{-1}$

$$\text{MUT} = \frac{1}{2} = 0,5 \text{ years} = 4\,380 \text{ h}$$

6.4.16 Mean down time [192-08-10]

MDT (abbreviation)

The expressions in 6.4.16 also apply to IOIs.

$$\text{a) } \text{MDT} = \int_0^{\infty} t g_D(t) dt$$

where $g_D(t)$ is the probability density function of the down time of the item (which is defined to include the time to restoration of the item, after failure and/or function-preventing preventive maintenance times), i.e. for small values of Δt , $g_D(t) \cdot \Delta t$ is approximately equal to the probability that the item returns to its up state from its down state in the time interval $[t, t + \Delta t]$, assuming that the down time started at time $t = 0$.

b) If observed down times are available for n repairable items, from a homogenous population, then an estimate of MDT is given by

$$\hat{\text{MDT}} = \frac{\text{total down time}}{k_D} = \frac{\sum_{i=1}^n (\text{down time})_i}{k_D}$$

where

"total down" time is the aggregate down time of all n items during a given time period;

k_D is the total number of down times of the items in the given time period;

"(down times) _{i} " is the total down time of the i th item during the given time period.

c) If the down times are exponentially distributed with a parameter μ_D , i.e.

$$g_D(t) = \mu_D \exp(-\mu_D t)$$

then

$$\text{MDT} = \frac{1}{\mu_D}$$

NOTE According to the assumptions in 5.5.1 (any fault is the result of a failure, and no preventive maintenance), any down time is equal to the time to restoration, i.e.

$$\text{MDT} = \text{MTTR}$$

and, for exponentially distributed down times

$$\mu_D = \mu_R$$

- d) For a repairable item with $\mu_D = 100 \text{ year}^{-1}$

$$\text{MDT} = \frac{1}{100} = 0,01 \text{ years} = 87,6 \text{ h}$$

6.4.17 Maintainability [192-07-01]

Symbol $M(t_1, t_2)$, $0 \leq t_1 < t_2$

The expressions in 6.4.17 also apply to IOIs.

- a) The probability that a given maintenance action on an item can be completed in the time interval $[t_1, t_2]$, assuming that the maintenance action started at time $t = 0$, is given by

$$M(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} g_{MA}(t) dt$$

where $g_{MA}(t)$ is the probability density function of the time to complete a given maintenance action for the item, i.e. for small values of Δt , $g_{MA}(t) \cdot \Delta t$ is approximately equal to the probability of completing a given maintenance action during the time interval $[t, t + \Delta t]$, assuming that the maintenance action started at time $t = 0$.

NOTE 1 The probability density function $g_{MA}(t)$ is distinct from the restoration intensity which is the probability of completing a restoration action (e.g. a maintenance action) assuming that the item was in the perfect upstate at $t = 0$.

In practical applications, the maintainability function, $M(t)$, defined as

$$M(t) = M(0, t) = \int_0^t g_{MA}(x) dx$$

is used, with $M(0) = 0$. This is equal to the probability that a given maintenance action will be completed before time t , assuming that the action started at time $t = 0$, i.e. $M(t)$ is the distribution function of that time. The maintainability, $M(t_1, t_2)$, and the maintainability function, $M(t)$, are related as follows:

$$M(t_1, t_2) = M(t_2) - M(t_1)$$

NOTE 2 $M(t)$ is the counterpart, for the maintenance actions of $F(t)=1-R(t)$, for the failures. Therefore the formulae can be established in the same way as was done when reliability was analysed. The maintainability function, $M(t)$, and the mean maintenance action time, MMAT, are related as follows:

$$\text{MMAT} = \int_0^{\infty} (1 - M(t)) dt = \int_0^{\infty} t g_{MA}(t) dt$$

NOTE 3 The above formula is valid for any maintenance action. Then if the maintenance action time is equal to the entire active corrective maintenance time:

$$M(t) = G_{\text{ACM}}(t), \text{MMAT} = \text{MACMT}$$

where $G_{\text{ACM}}(t)$ is the distribution function of the active corrective maintenance time and MACMT is the mean active corrective maintenance time.

If the repair is considered as the maintenance action, then

$$M(t) = G(t), \text{MMAT} = \text{MRT}$$

where $G(t)$ is the distribution function of the repair time and MRT is the mean repair time.

Similarly, when the maintenance action consists of all actions attributed to the time to restoration, then

$$M(t) = G_{\text{R}}(t), \text{MMAT} = \text{MTTR}$$

where $G_{\text{R}}(t)$ is the distribution function of the time to restoration and MTTR is the mean time to restoration.

- b) If observed data for m maintenance action times of a given type are available, from a homogenous population, the estimated value of $M(t)$ is given by:

$$\hat{M}(t) = \frac{m - m_{\text{MAT}}(t)}{m}$$

where

$m_{\text{MAT}}(t)$ is the number of maintenance action times with a duration greater than t , i.e. not finished up to time t , and

$$m_{\text{MAT}}(0) = m.$$

- c) If the given maintenance action times are exponentially distributed with a parameter μ_{MA} , i.e.

$$g_{\text{MA}}(t) = \mu_{\text{MA}} \exp(-\mu_{\text{MA}}t)$$

then

$$M(t_1, t_2) = \exp(-\mu_{\text{MA}}t_1) - \exp(-\mu_{\text{MA}}t_2)$$

$$M(t) = 1 - \exp(-\mu_{\text{MA}}t)$$

and

$$\text{MMAT} = \frac{1}{\mu_{\text{MA}}}$$

- d) Figure 47 illustrates the application of the above formula for a repairable item with $\mu_{\text{MA}} = 1\,000 \text{ year}^{-1}$, (i.e. $0,114\,2 \text{ h}^{-1}$) and $t_2 - t_1 = 16 \text{ h}$ (simplify by using hours, rather than years, as the unit).

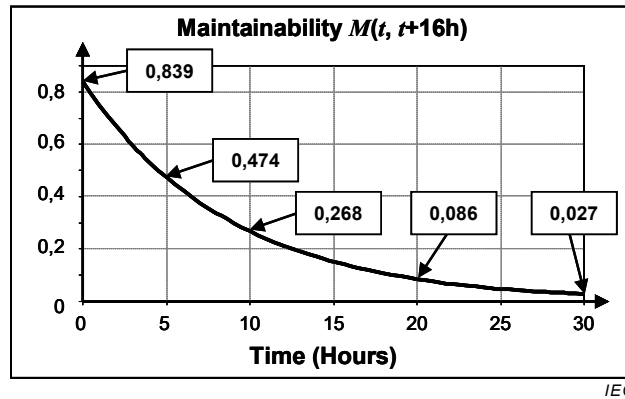


Figure 47 – Evolution of the maintainability $M(t, t+16h)$

6.4.18 Instantaneous repair rate [192-07-20]

Symbol $\mu(t)$

The expressions in 6.4.18 also apply to IOIs.

a) By definition,

$$\mu(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \frac{G(t + \Delta t) - G(t)}{1 - G(t)} = \frac{g(t)}{1 - G(t)}$$

where

$g(t)$ is the probability density function of the repair time [192-07-19] of an item (excluding technical, logistic and administrative delays), i.e. for small values of Δt , $g(t) \cdot \Delta t$ is approximately equal to the probability that the repair started at time $t = 0$ will be completed during $[t, t + \Delta t]$;

$G(t)$ is the distribution function of the repair time of the item, i.e. $G(t)$ is the probability that the repair, started at time $t = 0$, with $G(0) = 0$, will be completed by time t :

$$G(t) = 1 - \exp\left(-\int_0^t \mu(x) dx\right) = \int_0^t g(x) dx$$

For small values of Δt , $\mu(t) \cdot \Delta t$ is approximately equal to the conditional probability that the repair will be completed in the time interval $[t, t + \Delta t]$, given that the repair started at time $t = 0$ and has not been completed by the instant of time t .

b) If observed repair data are available for n repairable items, from a homogenous population, the estimated value of $\mu(t)$ at time t is given by

$$\hat{\mu}(t) = \frac{n_R(t) - n_R(t + \Delta t)}{n_R(t) \Delta t}$$

where

$n_R(t)$ is the number of items that are still under repair at the instant of time t ($n_R(0) = n$);

$n_R(t) - n_R(t + \Delta t)$ is the number of items with repair completed in the time interval $[t, t + \Delta t]$.

It should be noted that the estimated value of the repair density function $g(t)$, at time t , is given by

$$\hat{g}(t) = \frac{n_R(t) - n_R(t + \Delta t)}{n \Delta t}$$

- c) When the time to repair is exponentially distributed,

$$g(t) = \mu \exp(-\mu t)$$

and

$$G(t) = 1 - \exp(-\mu t)$$

hence

$$\mu(t) = \mu$$

for all values of t .

In this case:

$$\text{MRT} = \frac{1}{\mu}$$

where MRT is the mean repair time.

- d) If observed repair data are available for n repairable items, from a homogenous population, with constant repair rate, then the estimated value of μ is given by

$$\hat{\mu} = \frac{n}{\sum_{i=1}^n \text{RT}_i}$$

where RT_i is the repair time of item i .

For 10 repairable items, from a homogenous population, with a constant repair rate, the observed total repair time of all the items is $\sum_{i=1}^{10} \text{RT}_i = 5$ h. Hence

$$\hat{\mu} = \frac{10}{5} = 2 \text{ h}^{-1}$$

- e) If the repair time of a repairable item has a lognormal distribution with scale parameter m and shape parameter $\sigma > 0$, then (see Table B.2)

$$g(t) = \frac{1}{t\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(\ln t - m)^2}{2\sigma^2}\right)$$

and

$$G(t) = \int_0^t g(x) dx$$

hence

$$\mu(t) = \frac{g(t)}{1 - G(t)}$$

- f) Assuming that an item has a mean repair time (MRT) of 1,5 h and repair time variance (VRT) of 0,16 h², in order to compute the repair rate, the parameters m and σ of the lognormal distribution of repair times have first to be determined. According to the results given in Table B.2,

$$\text{MRT} = \exp\left(m + \frac{\sigma^2}{2}\right)$$

$$\text{VRT} = \exp(2m + 2\sigma^2) - \exp(2m + \sigma^2) = \text{MRT}^2 \cdot [\exp(\sigma^2) - 1]$$

Solving the above equations yields:

$$m = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{\text{MRT}^4}{\text{VRT} + \text{MRT}^2}\right), \quad \sigma^2 = \ln\left(\frac{\text{VRT} + \text{MRT}^2}{\text{MRT}^2}\right),$$

giving $m = 0,37$ and $\sigma^2 = 0,069$.

Figure 48 illustrates the evolution of the lognormal repair rate with the above parameters.

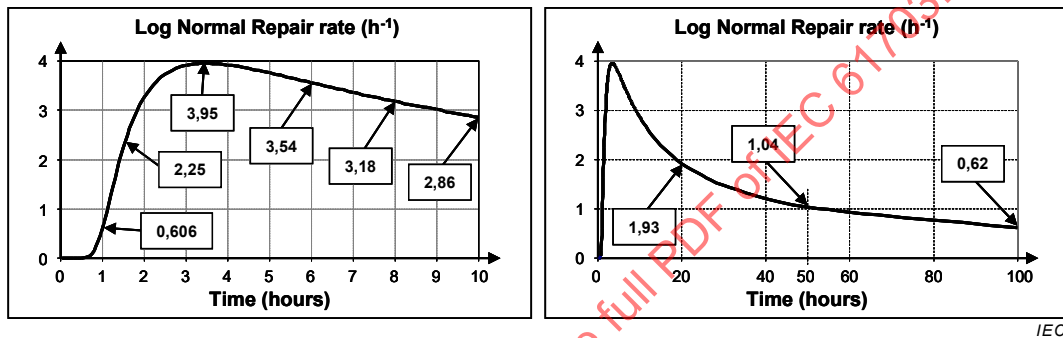


Figure 48 – Evolution of the lognormal repair rate $\mu(t)$

6.4.19 Mean repair time [192-07-21]

MRT (abbreviation)

The expressions in 6.4.19 also apply to IOIs.

$$\text{a) } \text{MRT} = \int_0^{\infty} t g(t) dt = \int_0^{\infty} (1 - G(t)) dt$$

where $g(t)$ is the probability density function of the repair time of an item, and $G(t)$ is the distribution function of the repair time of the item.

NOTE From the definition of the repair time

$$\text{MRT} = \text{MACMT} - \text{MTD}$$

where

MTD is the mean technical delay;

MACMT is the mean active corrective maintenance time.

- b) If observed repair times are available for n repairable items, from a homogenous population, then an estimate of MRT is given by

$$\hat{\text{MRT}} = \frac{\text{total repair time}}{k} = \frac{\sum_{i=1}^n (\text{repair time})_i}{k}$$

where

"total repair time" is the aggregate repair time of all n items during a given time period;

k is the total number of repair times of the items during the given time period;

"(repair time) _{i} " is the total repair time of the i th item during the given time period.

- c) If the repair times are exponentially distributed with a parameter μ , i.e.

$$g(t) = \mu \exp(-\mu t)$$

then

$$\text{MRT} = \frac{1}{\mu}$$

- d) For a repairable item with $\mu = 1\,000 \text{ year}^{-1}$:

$$\text{MRT} = \frac{1}{1000} = 0,001 \text{ years} = 8,76 \text{ h}$$

6.4.20 Mean active corrective maintenance time [192-07-22]

MACMT (abbreviation)

The expressions in 6.4.20 also apply to IOIs.

$$\text{a) } \text{MACMT} = \int_0^{\infty} (1 - G_{\text{ACM}}(t)) dt = \int_0^{\infty} t g_{\text{ACM}}(t) dt$$

where

$g_{\text{ACM}}(t)$ is the probability density function of the active corrective maintenance times of an item (including technical delay and repair time, but excluding logistic and administrative delays), i.e. for small values of Δt , $g_{\text{ACM}}(t) \cdot \Delta t$ is approximately equal to the probability that the active corrective maintenance of the item is completed in the time interval $[t, t + \Delta t]$, assuming that the active corrective maintenance started at time $t = 0$;

$G_{\text{ACM}}(t)$ is the distribution function of the active corrective maintenance time of the item, i.e. $G_{\text{ACM}}(t)$ is the probability that the active corrective maintenance, started at time $t = 0$, will be completed by time t :

$$G_{\text{ACM}}(t) = \int_0^t g_{\text{ACM}}(x) dx$$

NOTE As per the definition of the active corrective maintenance time:

$$\text{MACMT} = \text{MRT} + \text{MTD}$$

where MTD is the mean technical delay.

- b) If observed active corrective maintenance times are available for n repairable items, from a homogenous population, then an estimate of MACMT is given by

$$\hat{\text{MACMT}} = \frac{\text{total active corrective maintenance time}}{k_{\text{ACM}}} = \frac{\sum_{i=1}^n (\text{active corrective maintenance time})_i}{k_{\text{ACM}}}$$

where

"total active corrective maintenance time" is the aggregate active corrective maintenance time of all n items during a given time period;

k_{ACM} is the total number of active corrective maintenance actions on the items during the given time period;

"(active corrective maintenance time) $_i$ " is the total active corrective maintenance time of the i th item during the given time period.

- c) If the active corrective maintenance times are exponentially distributed with parameter μ_{ACM} , i.e.

$$g_{ACM}(t) = \mu_{ACM} \exp(-\mu_{ACM}t)$$

then

$$MACMT = \frac{1}{\mu_{ACM}}$$

- d) For a repairable item with the mean technical delay $MTD = 5$ h and the mean repair time $MRT = 9$ h:

$$MACMT = 5 + 9 = 14 \text{ h}$$

6.4.21 Mean time to restoration [192-07-23]

MTTR (abbreviation)

The expressions in 6.4.21 also apply to IOIs.

a) $MTTR = \int_0^{\infty} t g_R(t) dt$

where $g_R(t)$ is the probability density function of the times to restoration of the item, i.e. for small values of Δt , $g_R(t) \cdot \Delta t$ is approximately equal to the probability that the item is restored from a fault to an up state in the time interval $[t, t + \Delta t]$, assuming that a failure resulting in a fault occurred at time $t = 0$.

NOTE The mean time to restoration (of a faulty item), MTTR, can be written as the sum of the expected values of its constituent times (see Figure 2):

$$MTTR = MFDT + MAD + MLD + MACMT = MFDT + MAD + MLD + MTD + MRT$$

where

MFDT is the mean fault detection time;

MAD is the mean administrative delay;

MLD is the mean logistic delay;

MACMT is the mean active corrective maintenance time given by

$$MACMT = MTD + MRT$$

where

MTD is the mean technical delay;

MRT is the mean repair time.

- b) If observed times to restoration are available for n repairable items, from a homogenous population, then an estimate of MTTR is given by

$$\hat{MTTR} = \frac{\text{total time to restoration}}{k_R} = \frac{\sum_{i=1}^n (\text{time to restoration})_i}{k_R}$$

where

"total time to restoration" is the aggregate time to restoration of all n items during a given time period;

k_R is the total number of times to restoration of the items during the given time period;

"(time to restoration) $_i$ " is the total time to restoration of the i th item during the given time period.

- c) If the times to restoration are exponentially distributed, i.e.

$$g_R(t) = \mu_R \exp(-\mu_R t)$$

where μ_R is the constant restoration rate, then:

$$MTTR = \frac{1}{\mu_R}$$

- d) For a repairable item with a restoration rate of $\mu_R = 100 \text{ year}^{-1}$

$$MTTR = \frac{1}{100} = 0,01 \text{ years} = 87,6 \text{ h}$$

6.4.22 Mean administrative delay [192-07-26]

MAD (abbreviation)

The expressions in 6.4.22 also apply to IOIs.

a) $MAD = \int_0^{\infty} t g_{AD}(t) dt$

where $g_{AD}(t)$ is the probability density function of the administrative delay during a time to restoration of a faulty item, i.e. for small values of Δt , $g_{AD}(t) \cdot \Delta t$ is approximately equal to the probability that the delay ends in the time interval $[t, t + \Delta t]$, assuming that the delay started at time $t = 0$.

- b) If observed administrative delays are available for n repairable items, from a homogenous population, then an estimate of MAD is given by

$$\hat{MAD} = \frac{\text{total administrative delay}}{k_{AD}} = \frac{\sum_{i=1}^n (\text{administrative delay})_i}{k_{AD}}$$

where

"total administrative delay" is the aggregate administrative delay of all n items during the given time period;

k_{AD} is the total number of administrative delays during the given time period;

"(administrative delay) $_i$ " is the total administrative delay of the i th item during the given time period.

- c) If the administrative delays are exponentially distributed with parameter μ_{AD} , i.e.

$$g_{AD}(t) = \mu_{AD} \exp(-\mu_{AD} t)$$

then

$$MAD = \frac{1}{\mu_{AD}}$$

- d) For a repairable item with $\mu_{AD} = 1\,000\text{ year}^{-1}$:

$$MAD = \frac{1}{1000} = 0,001\text{ years} = 8,76\text{ h}$$

6.4.23 Mean logistic delay [192-07-27]

MLD (abbreviation)

The expressions in 6.4.23 also apply to IOIs.

a) $MLD = \int_0^{\infty} t g_{LD}(t) dt$

where $g_{LD}(t)$ is the probability density function of the logistic delay during a maintenance time of a faulty item, i.e. for small values of Δt , $g_{LD}(t) \cdot \Delta t$ is approximately equal to the probability that the delay ends in the time interval $[t, t + \Delta t]$, assuming that the delay started at time $t = 0$.

- b) If observed logistic delays are available for n repairable items, from a homogenous population, then an estimate of MLD is given by

$$\hat{MLD} = \frac{\text{total logistic delay}}{k_{LD}} = \frac{\sum_{i=1}^n (\text{logistic delay})_i}{k_{LD}}$$

where

"total logistic delay" is the aggregate logistic delay of all n items during a given time period;

k_{LD} is the total number of logistic delays during the given time period;

"(logistic delay) _{i} " is the total logistic delay of the i th item during the given time period.

- c) If the logistic delays are exponentially distributed with parameter μ_{LD} , i.e.

$$g_{LD}(t) = \mu_{LD} \exp(-\mu_{LD}t)$$

then

$$MLD = \frac{1}{\mu_{LD}}$$

- d) For a repairable item with $\mu_{LD} = 1\,000\text{ year}^{-1}$

$$MLD = \frac{1}{1000} = 0,001\text{ years} = 8,76\text{ h}$$

Annex A (informative)

Performance aspects and descriptors

Performance aspects and descriptors are given in Figure A.1.

Performance aspects	Random variables	Probabilistic descriptors	Modifiers
Availability / unavailability	Time to failure	Distribution function	True
	Time between failures	Probability density function	Predicted
Reliability / unreliability	Number of failures in interval $[t_1, t_2]$	Reliability function	Estimated
	Time to restoration	Failure rate	Extrapolated
Maintenance support performance	Preventive maintenance time	Vesely failure rate (conditional failure intensity)	Instantaneous
	Up time	Failure frequency (unconditional failure intensity)	Asymptotic
Maintainability	Down time	Renewal function	Mean
		Renewal density	
		Expectation	
		Variance	

IEC

NOTE 1 There is no direct relationship between the various columns.

NOTE 2 A mathematical operation on a random variable results in a basic measure. The addition of a modifier to a basic measure results in a specific measure.

Figure A.1 – Performance aspects and descriptors

Annex B (informative)

Summary of measures related to time to failure

A summary of measures related to time to failure is given in Tables B.1 and B.2. A summary of measures related to repair time is given in Table B.3.

**Table B.1 – Relations among measures related to time to failure
of continuously operating items**

Measure	Relation to other measures			
	$F(t)$	$f(t)$	$R(t)$	$\lambda(t)$
$F(t)$		$\frac{dF(t)}{dt}$	$1 - F(t)$	$\frac{1}{1 - F(t)} \frac{dF(t)}{dt}$
$f(t)$	$\int_0^t f(x) dx$		$\int_t^\infty f(x) dx$	$\frac{f(t)}{\int_t^\infty f(x) dx}$
$R(t)$	$1 - R(t)$	$-\frac{dR(t)}{dt}$		$-\frac{1}{R(t)} \frac{dR(t)}{dt}$
$\lambda(t)$	$1 - \exp\left(-\int_0^t \lambda(x) dx\right)$	$\lambda(t) \exp\left(-\int_0^t \lambda(x) dx\right)$	$\exp\left(-\int_0^t \lambda(x) dx\right)$	
NOTE Similar relationships hold among functional measures of any random variable, for example time to first failure, up time, down time, time to restoration, corrective maintenance time, repair time.				

Table B.2 – Summary of characteristics for some continuous probability distributions of time to failure of continuously operating items

Distribution	Range	Probability density function $f(t)$	Reliability (survival) function $R(t)$	Failure rate $\lambda(t)$	Expected value MTTF	Variance
Exponential	$\lambda > 0$ $t \geq 0$	$\lambda \exp(-\lambda t)$	$\exp(-\lambda t)$	λ	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
Weibull	$\alpha > 0, \beta > 0$ $t \geq 0$	$\beta \alpha (\alpha t)^{\beta-1} \exp(-(\alpha t)^\beta)$	$\exp(-(\alpha t)^\beta)$	$\beta \alpha (\alpha t)^{\beta-1}$	$\frac{\Gamma(1 + \frac{1}{\beta})}{\alpha}$	$\frac{1}{\alpha^2} \left(\Gamma(1 + \frac{2}{\beta}) - \Gamma^2(1 + \frac{1}{\beta}) \right)$
Gamma	$\alpha > 0, \beta > 0$ $t \geq 0$	$\frac{\alpha(\alpha t)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} \exp(-\alpha t)$	$\int_t^\infty f(u) du$	$\frac{f(t)}{R(t)}$	$\frac{\beta}{\alpha}$	$\frac{\beta}{\alpha^2}$
Erlang	$\lambda > 0$ $k \in \{1, 2, \dots\}$ $t \geq 0$	$\frac{\lambda(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!} \exp(-\lambda t)$	$\exp(-\lambda t) \sum_{i=0}^{k-1} \frac{(\lambda t)^i}{i!}$	$\frac{f(t)}{R(t)}$	$\frac{k}{\lambda}$	$\frac{k}{\lambda^2}$
Rayleigh	$k \in \{1, 2, \dots\}$ $t \geq 0$	$kt \exp\left(-\frac{kt^2}{2}\right)$	$\exp\left(-\frac{kt^2}{2}\right)$	kt	$\sqrt{\frac{\pi}{2k}}$	$\frac{2}{k} \left(1 - \frac{\pi}{4}\right)$
Lognormal	$-\infty < m < +\infty$ $\sigma > 0, t > 0$	$\frac{1}{t\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(\ln t - m)^2}{2\sigma^2}\right)$	$\int_t^\infty f(u) du$	$\frac{f(t)}{R(t)}$	$\exp\left(m + \frac{\sigma^2}{2}\right)$	$\exp(2m + 2\sigma^2) - \exp(2m + \sigma^2)$

$\Gamma(x)$ is the complete gamma function defined as $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt, x > 0$.

Table B.3 – Summary of characteristics for some probability distributions of repair time

Distribution	Range	Probability density function $g(t)$	Maintainability function $M(t)$	Repair rate $\mu(t)$	Expected value MRT	Variance
Deterministic	$t \geq 0$	Dirac delta function $\delta(t-\theta)$ (Deterministic duration $\theta \geq 0$)	$M(t) = \begin{cases} 0 & \text{for } t < \theta \\ 1 & \text{for } t \geq \theta \end{cases}$ (it is a Heaviside function)	NA	θ	0
Exponential	$\mu > 0$ $t \geq 0$	$\mu \exp(-\mu t)$	$1 - \exp(-\mu t)$	μ	$\frac{1}{\mu}$	$\frac{1}{\mu^2}$
Lognormal	$-\infty < m < +\infty$ $\sigma > 0, t > 0$	$\frac{1}{t\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(\ln t - m)^2}{2\sigma^2}\right)$	$\int_0^t g(u) du$	$\frac{g(t)}{1 - M(t)}$	$\exp\left(m + \frac{\sigma^2}{2}\right)$	$\exp(2m + 2\sigma^2) - \exp(2m + \sigma^2)$

Annex C (informative)

Comparison of some dependability measures for continuously operating items

A comparison of some dependability measures for continuously operating items is given in Table C.1.

Table C.1 – Comparison of some dependability measures of continuously operating items with constant failure rate λ and restoration rate μ_R

Measure	Non-repairable item ($\mu_R = 0$)	Repairable item with time to restoration equal to	
		zero ($\mu_R \rightarrow \infty$)	non-zero ($0 < \mu_R < \infty$)
Reliability function $R(t) = R(0, t)$	$\exp(-\lambda t)$	$\exp(-\lambda t)$	$\exp(-\lambda t)$
Reliability $R(t_1, t_2)$	$\exp(-\lambda t_2)$	$\exp(-\lambda \times (t_2 - t_1))$	$\left(\frac{\mu_R}{\lambda + \mu_R} + \frac{\lambda}{\lambda + \mu_R} \exp[-(\lambda + \mu_R)t_1] \right) \exp[-\lambda \times (t_2 - t_1)]$
Mean time to failure MTTF	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda}$
Mean operating time between failures MOTBF		$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda}$
Mean time between failures METBF	NA	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\mu_R}$
Instantaneous failure intensity $z(t)$	$\lambda \exp(-\lambda t)$	λ	$\frac{\lambda \mu_R}{\lambda + \mu_R} + \frac{\lambda^2}{\lambda + \mu_R} \exp[-(\lambda + \mu_R)t]$
Asymptotic failure intensity $z(\infty)$	0	λ	$\frac{\lambda \mu_R}{\lambda + \mu_R}$
Mean failure intensity $\bar{z}(t_1, t_2)$	$\frac{\exp(-\lambda t_1) - \exp(-\lambda t_2)}{t_2 - t_1}$	λ	$\frac{\lambda \mu_R}{\lambda + \mu_R} + \frac{\lambda^2}{(\lambda + \mu_R)^2} \frac{\exp[-(\lambda + \mu_R)t_1] - \exp[-(\lambda + \mu_R)t_2]}{t_2 - t_1}$
Instantaneous availability $A(t)$	$\exp(-\lambda t)$	1	$\frac{\mu_R}{\lambda + \mu_R} + \frac{\lambda}{(\lambda + \mu_R)} \exp[-(\lambda + \mu_R)t]$
Mean availability $\bar{A}(t_1, t_2)$	$\frac{\exp(-\lambda t_1) - \exp(-\lambda t_2)}{\lambda \times (t_2 - t_1)}$	1	$\frac{\mu_R}{\lambda + \mu_R} + \frac{\lambda}{(\lambda + \mu_R)^2} \frac{\exp[-(\lambda + \mu_R)t_1] - \exp[-(\lambda + \mu_R)t_2]}{t_2 - t_1}$
Asymptotic availability A	0	1	$\frac{\mu_R}{\lambda + \mu_R}$

Measure	Non-repairable item ($\mu_R = 0$)	Repairable item with time to restoration equal to	
		zero ($\mu_R \rightarrow \infty$)	non-zero ($0 < \mu_R < \infty$)
Instantaneous unavailability $U(t)$	$1 - \exp(-\lambda t)$	0	$\frac{\lambda}{\lambda + \mu_R} (1 - \exp[-(\lambda + \mu_R)t])$
Mean unavailability $\bar{U}(t_1, t_2)$	$1 - \frac{\exp(-\lambda t_1) - \exp(-\lambda t_2)}{\lambda \times (t_2 - t_1)}$	0	$\frac{\lambda}{\lambda + \mu_R} \frac{\exp[-(\lambda + \mu_R)t_1] - \exp[-(\lambda + \mu_R)t_2]}{t_2 - t_1}$
Asymptotic unavailability U	1	0	$\frac{\lambda}{\lambda + \mu_R}$

IECNORM.COM : Click to view the full PDF of IEC 61703:2016

Bibliography

- [1] Alsmeyer, G., *Erneuerungstheorie. Analyse stochastischer Regenerationsschemata*, Stuttgart, B.G. Teubner, 1991
- [2] Ascher, H.R., Feingold, H., *Repairable System Reliability: Modeling, Inference, Misconceptions and Their Causes*, New York, Marcel Dekker, 1984
- [3] Asmussen, S., *Applied Probability and Queues*, Second Edition, New York, Springer-Verlag, 2003
- [4] Aven, T., *Reliability and Risk Analysis*, London, Elsevier Applied Science, 1992
- [5] Aven, T., Jensen, U., *Stochastic models in reliability*, Second Edition, New York, Springer-Verlag, 2013
- [6] Barlow, R.E., Proschan, F., *Mathematical Theory of Reliability*, New York, Wiley, 1965. Reprinted: Philadelphia, SIAM, 1996
- [7] Barlow, R.E., Proschan, F., *Statistical Theory of Reliability and Life Testing: Probabilistic Models*, New York, Holt, Rinehart and Winston, 1975. Reprinted with corrections: Silver Spring, MD, 1981
- [8] Beichelt, F., Franken, P., *Zuverlässigkeit und Instandhaltung: mathematische Methoden*, Berlin, VEB Verlag Technik, 1985
- [9] Birolini, A., *Reliability Engineering: Theory and Practice*, Seventh Edition, Berlin, Springer-Verlag, 2014
- [10] Coccozza-Thivent, C., *Processus stochastiques et fiabilité des systèmes*, Collection Mathématiques et Applications, N°28, Berlin, Springer-Verlag, 1997
- [11] Cox, D.R., *Renewal Theory*, London, Methuen & Co. Ltd, 1962. Reprinted: Chapman & Hall, London, 1982
- [12] Feller, W., *An Introduction to Probability Theory and Its Applications, Volume II*, Second Edition, New York, Wiley, 1971
- [13] Gnedenko, B.V., Belyayev, Y.K., Solovyew, A.D., *Mathematical Methods of Reliability Theory*, New York, Academic Press, 1969
- [14] Henley, E.J., Kumamoto, H., *Reliability Engineering and Risk Assessment*, Englewood Cliffs, Prentice Hall, 1981
- [15] Heyman, D.P., Sobel, M.J., *Stochastic Models in Operations Research, Volume I, Stochastic Processes and Operating Characteristics*, New York, McGraw-Hill, 1982. Reprinted: Mineola, NY, Dover, 2004
- [16] Resnick, S., *Adventures in Stochastic Processes*, Boston, Birkhäuser, 1992 (4th printing, 2005)
- [17] Ross, S.M., *Stochastic Processes*, Second Edition, New York, Wiley, 1996
- [18] Villemeur, A., *Reliability, Availability, Maintainability and Safety Assessment, Volume 1, Methods and Techniques*, Chichester, UK, Wiley, 1992

- [19] Florescu, I., *Probability and Stochastic Processes*, Hoboken, NJ, John Wiley & Sons, Inc., 2015
- [20] Mitov, K.V., Omev E., *Renewal Processes*, Series: SpringerBriefs in Statistics, Cham (Switzerland), Springer, 2014
- [21] IEC 61508 (all parts), *Functional safety of electrical/electronic/programmable electronic safety-related systems*
- [22] IEC 61511 (all parts), *Functional safety – Safety instrumented systems for the process industry sector*
- [23] IEC 60605 (all parts), *Equipment reliability testing*
- [24] IEC 61025, *Fault tree analysis (FTA)*
- [25] IEC 61078, *Analysis techniques for dependability – Reliability block diagram and boolean methods*
- [26] Vesely, W. E., *A time-dependent methodology for fault tree evaluation*, Nuclear Engineering and Design, 1970, Vol.13, No.2, pp.337-360
- [27] IEC 61165, *Application of Markov techniques*
- [28] Lisnianski, A., Frenkel, I., Ding Y., *Multi-state System Reliability Analysis and Optimization for Engineers and Industrial Managers*, London, Springer-Verlag, 2010

IECNORM.COM : Click to view the full PDF of IEC 61703:2016

IECNORM.COM : Click to view the full PDF of IEC 61703:2016

SOMMAIRE

AVANT-PROPOS.....	104
INTRODUCTION.....	106
1 Domaine d'application	107
2 Références normatives	108
3 Termes et définitions	108
4 Glossaire des symboles et abréviations.....	112
4.1 Généralités	112
4.2 Acronymes utilisés dans la présente norme	112
4.3 Symboles utilisés dans la présente norme	113
5 Modèles et hypothèses d'ordre général	117
5.1 Composantes des temps de disponibilité et d'indisponibilité	117
5.2 Introduction aux modèles et aux hypothèses	119
5.3 Approche états-transitions	120
5.4 Modèle et hypothèses pour entités individuelles non réparables	123
5.5 Hypothèses et modèle pour entités individuelles réparables	124
5.5.1 Hypothèse pour entités individuelles réparables	124
5.5.2 Réparation instantanée	125
5.5.3 Réparation non instantanée	127
5.6 Comparaison entre les entités à fonctionnement continu (EFC) et les entités individuelles à fonctionnement intermittent (EFI)	128
6 Modèles et expressions mathématiques	130
6.1 Systèmes	130
6.1.1 Généralités	130
6.1.2 Expressions relatives à la disponibilité	132
6.1.3 Expressions relatives à la fiabilité	140
6.1.4 Moyenne des temps de bon fonctionnement [192-05-13] et temps moyen entre défaillances	146
6.1.5 Taux instantané de défaillance [192-05-06] et intensité conditionnelle de défaillance (taux de défaillance de Vesely)	148
6.1.6 Densité de défaillance et intensité inconditionnelle de défaillance [192-05-08]	151
6.1.7 Comparaison de $\lambda(t)$, $\lambda_V(t)$, $z(t)$ et $f(t)$ pour des MTTR de valeurs élevées et faibles	154
6.1.8 Expressions relatives au rétablissement	155
6.2 Entités individuelles non réparables	157
6.2.1 Généralités	157
6.2.2 Disponibilité instantanée [192-08-01]	157
6.2.3 Fiabilité [192-05-05]	158
6.2.4 Taux instantané de défaillance [192-05-06]	159
6.2.5 Taux moyen de défaillance [192-05-07]	160
6.2.6 Durée moyenne de fonctionnement avant défaillance [192-05-11]	161
6.3 Entités individuelles réparables à temps de panne nul	162
6.3.1 Généralités	162
6.3.2 Fiabilité [192-05-05]	162
6.3.3 Intensité instantanée de défaillance [192-05-08]	164
6.3.4 Intensité asymptotique de défaillance [192-05-10]	166

6.3.5	Intensité moyenne de défaillance [192-05-09]	167
6.3.6	Temps moyen entre défaillances (voir 3.3)	168
6.3.7	Durée moyenne de fonctionnement avant défaillance [192-05-11]	168
6.3.8	Moyenne des temps de bon fonctionnement [192-05-13]	169
6.3.9	Disponibilité instantanée [192-08-01], disponibilité moyenne [192-08-05] et disponibilité asymptotique [192-08-07]	169
6.3.10	Temps moyen de disponibilité [192-08-09]	170
6.4	Entités individuelles réparables à temps de panne non nul	170
6.4.1	Généralités	170
6.4.2	Fiabilité [192-05-05]	170
6.4.3	Intensité instantanée de défaillance [192-05-08]	173
6.4.4	Intensité asymptotique de défaillance [192-05-10]	176
6.4.5	Intensité moyenne de défaillance [192-05-09]	177
6.4.6	Durée moyenne de fonctionnement avant défaillance [192-05-11]	179
6.4.7	Temps moyen entre défaillances (voir 3.3)	180
6.4.8	Moyenne des temps de bon fonctionnement [192-05-13]	180
6.4.9	Disponibilité instantanée [192-08-01]	181
6.4.10	Indisponibilité instantanée [192-08-04]	183
6.4.11	Disponibilité moyenne [192-08-05]	184
6.4.12	Indisponibilité moyenne [192-08-06]	186
6.4.13	Disponibilité asymptotique [192-08-07]	188
6.4.14	Indisponibilité asymptotique [192-08-08]	189
6.4.15	Temps moyen de disponibilité [192-08-09]	189
6.4.16	Temps moyen d'indisponibilité [192-08-10]	192
6.4.17	Maintenabilité [192-07-01]	193
6.4.18	Taux de réparation instantané [192-07-20]	195
6.4.19	Durée moyenne de réparation [192-07-21]	197
6.4.20	Durée moyenne de maintenance corrective active [192-07-22]	198
6.4.21	Durée moyenne de panne [192-07-23]	199
6.4.22	Délai administratif moyen [192-07-26]	200
6.4.23	Délai logistique moyen [192-07-27]	201
Annexe A (informative)	Aspects relatifs aux performances et descripteurs	202
Annexe B (informative)	Résumé des mesures relatives au temps avant défaillance	203
Annexe C (informative)	Comparaison de quelques mesures caractéristiques de la sûreté de fonctionnement des EFC	206
Bibliographie		208
Figure 1	– Composantes du temps de disponibilité	117
Figure 2	– Composantes du temps d'indisponibilité	118
Figure 3	– Acronymes associés aux temps de défaillance	119
Figure 4	– Diagramme états-transitions simple	121
Figure 5	– Exemple d'évolution (chronogramme) du système représenté à la Figure 4	122
Figure 6	– Diagramme états-transitions d'une entité individuelle non réparable	123
Figure 7	– Exemple d'évolution d'une entité individuelle non réparable	124
Figure 8	– Diagramme états-transitions d'une entité individuelle réparable instantanément	125
Figure 9	– Exemple d'évolution d'une entité individuelle réparable avec temps de panne nul	126

Figure 10 – Diagramme états-transitions d'une entité individuelle réparable	127
Figure 11 – Exemple d'évolution d'une entité individuelle réparable avec temps de panne non nul.....	128
Figure 12 – Comparaison du temps de capacité pour une EFC et une EFI.....	129
Figure 13 – Temps de fonctionnement équivalent pour les EFI.....	130
Figure 14 – Graphe états-transitions pour un système redondant simple	131
Figure 15 – Graphe de Markov pour un système redondant simple.....	131
Figure 16 – Évolution des probabilités des états associées au graphe de Markov de la Figure 15.....	132
Figure 17 – Évolution de $A(t)$ et $U(t)$ associées au graphe de Markov de la Figure 15	133
Figure 18 – Évolution de $Ast_i(0, t)$ associée au graphe de Markov de la Figure 15	135
Figure 19 – Disponibilité instantanée et disponibilité moyenne d'une entité soumise à des tests périodiques	137
Figure 20 – Exemple d'un système de production simple	138
Figure 21 – Évolution de $A(t)$ et $K(t)$	139
Figure 22 – Représentation, pour un système, d'un comportement fiable sur l'intervalle $[0, t]$	141
Figure 23 – Représentation, pour un système, d'un comportement fiable sur l'intervalle $[t_1, t_2]$	142
Figure 24 – Graphe états-transitions et graphe de Markov pour les calculs de fiabilité.....	143
Figure 25 – Évolution des probabilités des états associées au graphe de Markov de la Figure 24	144
Figure 26 – Évolution de $R(t)$ et $F(t)$ associées au graphe de Markov de la Figure 24	145
Figure 27 – Évolution des $Ast_i(0, t)$ associées au graphe de Markov de la Figure 24	146
Figure 28 – Comparaison entre le temps entre défaillances et le temps de bon fonctionnement.....	147
Figure 29 – Comparaison entre $\lambda(t)$ et $\lambda_V(t)$ associés au modèle de la Figure 24.....	150
Figure 30 – Comparaison entre $z(t)$ et $f(t)$	154
Figure 31 – Comparaison de $\lambda(t)$, $\lambda_V(t)$, $z(t)$ et $f(t)$ pour des valeurs élevées et faibles de MTTR	154
Figure 32 – Représentation, pour une entité individuelle à temps de panne nul, d'un comportement fiable sur l'intervalle $[t_1, t_2]$	163
Figure 33 – Exemple du numéro possible de la défaillance à l'instant de renouvellement t	165
Figure 34 – Représentation, pour une entité individuelle à temps de panne non nul, d'un comportement fiable sur l'intervalle $[t_1, t_2]$	171
Figure 35 – Évolution de $R(t, t + 1/4)$	173
Figure 36 – Exemple du numéro possible de la défaillance à l'instant de renouvellement t	173
Figure 37 – Évolution de l'intensité de défaillance $z(t)$	176
Figure 38 – Évolution de l'intensité moyenne de défaillance $z(t, t + 1/4)$	179
Figure 39 – Représentation, pour une entité individuelle à temps de panne non nul, d'un comportement disponible à l'instant t	181
Figure 40 – Évolution de la disponibilité instantanée $A(t)$	183
Figure 41 – Représentation, pour une entité individuelle à temps de panne non nul, d'un comportement indisponible à l'instant t	183
Figure 42 – Évolution de l'indisponibilité instantanée $U(t)$	184

Figure 43 – Évolution de la disponibilité moyenne $\bar{A}(t, t+1/4)$	186
Figure 44 – Évolution de l'indisponibilité moyenne $\bar{U}(t, t+1/4)$	188
Figure 45 – Échantillon, pour une entité individuelle, d'une réalisation de l'évolution de son état	191
Figure 46 – Graphe du taux de transition d'un état de disponibilité à un état d'indisponibilité $\lambda_U(t)$	191
Figure 47 – Évolution de la maintenabilité $M(t, t+16h)$	195
Figure 48 – Évolution du taux de réparation log-normal $\mu(t)$	197
Figure A.1 – Aspects relatifs aux performances et descripteurs	202
Tableau B.1 – Relations entre les mesures relatives au temps avant défaillance des EFC	203
Tableau B.2 – Résumé des caractéristiques de quelques lois de probabilité continues du temps avant défaillance des EFC	204
Tableau B.3 – Résumé des caractéristiques de quelques lois de probabilité du temps de réparation	205
Tableau C 1 – Comparaison de quelques mesures caractéristiques de la sûreté de fonctionnement des EFC ayant un taux de défaillance λ et un taux de rétablissement μ_R constants	206

COMMISSION ÉLECTROTECHNIQUE INTERNATIONALE

EXPRESSIONS MATHÉMATIQUES POUR LES TERMES DE FIABILITÉ, DE DISPONIBILITÉ, DE MAINTENABILITÉ ET DE LOGISTIQUE DE MAINTENANCE

AVANT-PROPOS

- 1) La Commission Electrotechnique Internationale (IEC) est une organisation mondiale de normalisation composée de l'ensemble des comités électrotechniques nationaux (Comités nationaux de l'IEC). L'IEC a pour objet de favoriser la coopération internationale pour toutes les questions de normalisation dans les domaines de l'électricité et de l'électronique. À cet effet, l'IEC – entre autres activités – publie des Normes internationales, des Spécifications techniques, des Rapports techniques, des Spécifications accessibles au public (PAS) et des Guides (ci-après dénommés "Publication(s) de l'IEC"). Leur élaboration est confiée à des comités d'études, aux travaux desquels tout Comité national intéressé par le sujet traité peut participer. Les organisations internationales, gouvernementales et non gouvernementales, en liaison avec l'IEC, participent également aux travaux. L'IEC collabore étroitement avec l'Organisation Internationale de Normalisation (ISO), selon des conditions fixées par accord entre les deux organisations.
- 2) Les décisions ou accords officiels de l'IEC concernant les questions techniques représentent, dans la mesure du possible, un accord international sur les sujets étudiés, étant donné que les Comités nationaux de l'IEC intéressés sont représentés dans chaque comité d'études.
- 3) Les Publications de l'IEC se présentent sous la forme de recommandations internationales et sont agréées comme telles par les Comités nationaux de l'IEC. Tous les efforts raisonnables sont entrepris afin que l'IEC s'assure de l'exactitude du contenu technique de ses publications. L'IEC ne peut pas être tenue responsable de l'éventuelle mauvaise utilisation ou interprétation qui en est faite par un quelconque utilisateur final.
- 4) Dans le but d'encourager l'uniformité internationale, les Comités nationaux de l'IEC s'engagent, dans toute la mesure possible, à appliquer de façon transparente les Publications de l'IEC dans leurs publications nationales et régionales. Toutes divergences entre toutes Publications de l'IEC et toutes publications nationales ou régionales correspondantes doivent être indiquées en termes clairs dans ces dernières.
- 5) L'IEC elle-même ne fournit aucune attestation de conformité. Des organismes de certification indépendants fournissent des services d'évaluation de conformité et, dans certains secteurs, accèdent aux marques de conformité de l'IEC. L'IEC n'est responsable d'aucun des services effectués par les organismes de certification indépendants.
- 6) Tous les utilisateurs doivent s'assurer qu'ils sont en possession de la dernière édition de cette publication.
- 7) Aucune responsabilité ne doit être imputée à l'IEC, à ses administrateurs, employés, auxiliaires ou mandataires, y compris ses experts particuliers et les membres de ses comités d'études et des Comités nationaux de l'IEC, pour tout préjudice causé en cas de dommages corporels et matériels, ou de tout autre dommage de quelque nature que ce soit, directe ou indirecte, ou pour supporter les coûts (y compris les frais de justice) et les dépenses découlant de la publication ou de l'utilisation de cette Publication de l'IEC ou de toute autre Publication de l'IEC, ou au crédit qui lui est accordé.
- 8) L'attention est attirée sur les références normatives citées dans cette publication. L'utilisation de publications référencées est obligatoire pour une application correcte de la présente publication.
- 9) L'attention est attirée sur le fait que certains des éléments de la présente Publication de l'IEC peuvent faire l'objet de droits de brevet. L'IEC ne saurait être tenue pour responsable de ne pas avoir identifié de tels droits de brevets et de ne pas avoir signalé leur existence.

La Norme internationale IEC 61703 a été établie par le comité d'études 56 de l'IEC: Sûreté de fonctionnement.

Cette deuxième édition annule et remplace la première édition parue en 2001. Cette édition constitue une révision technique.

Cette édition inclut les modifications techniques majeures suivantes par rapport à l'édition précédente:

- a) norme aussi autonome que possible;
- b) entité scindée entre entités individuelles et systèmes;
- c) généralisation des concepts de sûreté de fonctionnement pour les systèmes constitués de plusieurs composants;

- introduction de l'intensité conditionnelle de défaillance (taux de défaillance de Vesely);
 - introduction des modèles états-transitions et des modèles de Markov;
 - généralisation de la disponibilité à la disponibilité de production;
- d) introduction de courbes pour représenter les différents concepts.

Le texte de cette norme est issu des documents suivants:

FDIS	Rapport de vote
56/1682/FDIS	56/1693/RVD

Le rapport de vote indiqué dans le tableau ci-dessus donne toute information sur le vote ayant abouti à l'approbation de cette norme.

Cette publication a été rédigée selon les Directives ISO/IEC, Partie 2.

La présente Norme internationale doit être utilisée conjointement avec l'IEC 60050-192:2015.

Le comité a décidé que le contenu de cette publication ne sera pas modifié avant la date de stabilité indiquée sur le site web de l'IEC sous "<http://webstore.iec.ch>" dans les données relatives à la publication recherchée. À cette date, la publication sera

- reconduite,
- supprimée,
- remplacée par une édition révisée, ou
- amendée.

INTRODUCTION

L'IEC 60050-192 fournit des définitions relatives à la sûreté de fonctionnement et aux facteurs qui la conditionnent, fiabilité, disponibilité, maintenabilité et logistique de maintenance, ainsi que des définitions d'autres termes associés couramment employés dans ce domaine. Certains de ces termes sont des mesures de caractéristiques spécifiques liées à la sûreté de fonctionnement, qui peuvent être exprimées mathématiquement.

Il est important que les utilisateurs comprennent le sens mathématique de ces expressions et la façon dont elles sont établies. Il s'agit de l'objet de la présente Norme internationale qui, utilisée conjointement avec l'IEC 60050-192, fournit des lignes directrices pratiques essentielles pour l'expression quantitative de ces mesures. Les utilisateurs pour qui des informations complémentaires sont nécessaires, par exemple le détail des méthodes statistiques, il convient de se reporter à la série IEC 60605 [23]¹.

L'annexe A explique, sous forme de diagramme, les relations entre certains termes fondamentaux de la sûreté de fonctionnement, les variables aléatoires associées, les descripteurs probabilistes et leurs qualificatifs.

L'annexe B présente, sous forme résumée, les termes relatifs au temps avant défaillance.

L'annexe C compare quelques mesures caractéristiques de la sûreté de fonctionnement pour des entités à fonctionnement continu.

La bibliographie donne les références des ouvrages relatifs aux mathématiques de base de la présente norme, en particulier, le contenu mathématique s'appuie sur les références [2], [6], [8], [9], [13], [14] et [18]; la théorie du renouvellement (processus de renouvellement et processus de renouvellement alterné) peut être consultée dans les références [6], [8], [9], [10], [11], [13], [15] et [17]; enfin, un traitement plus avancé de la théorie du renouvellement peut être consulté dans les références [1], [3], [12], [16], [19] et [20]. De plus amples informations sur cette théorie et les applications des processus de Markov peuvent être consultées dans les références [3], [9], [10], [15], [16], [17] et [19].

¹ Les nombres entre crochets font référence à la Bibliographie.

EXPRESSIONS MATHÉMATIQUES POUR LES TERMES DE FIABILITÉ, DE DISPONIBILITÉ, DE MAINTENABILITÉ ET DE LOGISTIQUE DE MAINTENANCE

1 Domaine d'application

La présente Norme internationale fournit des expressions mathématiques pour les mesures sélectionnées liées à la fiabilité, à la disponibilité, à la maintenabilité et à la logistique de maintenance définies dans l'IEC 60050-192:2015. En outre, elle présente certains termes non couverts par l'IEC 60050-192:2015. Ces termes sont liés aux aspects relatifs aux items de la classe système (voir ci-après).

Selon l'IEC 60050-192:2015, la sûreté de fonctionnement [192-01-22] est l'aptitude d'une entité à fonctionner quand et tel que requis; une entité [192-01-01] peut être une pièce isolée, un composant, un dispositif, une unité fonctionnelle, un équipement, un sous-système ou un système.

Pour tenir compte des contraintes mathématiques, la présente norme effectue une distinction entre les entités individuelles considérées dans leur ensemble (par exemple, des composants individuels) et les systèmes composés de plusieurs entités individuelles. Elle fournit des considérations générales sur les expressions mathématiques liées aux systèmes et aux entités individuelles. Les entités individuelles plus facilement modélisables sont, quant à elles, analysées plus en détail pour ce qui concerne leurs aspects de réparation.

Les classes d'entités suivantes sont considérées séparément:

- Systèmes;
- Entités individuelles:
 - non réparables [192-01-12];
 - réparables [192-01-11]:
 - i) à temps de panne nul (ou négligeable);
 - ii) à temps de panne non nul.

Pour expliquer les concepts vraiment complexes de la sûreté de fonctionnement et garder aussi autonome que possible la norme et aussi simples que possible les formules mathématiques, les modèles mathématiques de base suivants sont utilisés dans la présente norme pour calculer les mesures caractéristiques de la sûreté de fonctionnement:

- Systèmes:
 - modèles états-transitions;
 - modèles de Markov.
- Entités individuelles:
 - variable aléatoire (temps avant défaillance) pour les entités non réparables;
 - processus de renouvellement simple (ordinaire) pour les entités réparables à temps de panne nul;
 - processus de renouvellement alternés simple (ordinaire) pour les entités réparables à temps de panne non nul.

L'application de chaque mesure caractéristique de sûreté de fonctionnement est représentée au moyen d'exemples simples.

La présente norme s'applique principalement à la sûreté de fonctionnement du matériel, mais de nombreux termes et leurs définitions peuvent être appliqués à des entités contenant du logiciel.

2 Références normatives

Les documents suivants sont cités en référence de manière normative, en intégralité ou en partie, dans le présent document et sont indispensables pour son application. Pour les références datées, seule l'édition citée s'applique. Pour les références non datées, la dernière édition du document de référence s'applique (y compris les éventuels amendements).

IEC 60050-192:2015, *Vocabulaire électrotechnique international – Partie 192: Sûreté de fonctionnement* (disponible à l'adresse <http://www.electropedia.org>)

ISO 3534-1:2006, *Statistique – Vocabulaire et symboles – Partie 1: Termes statistiques généraux et termes utilisés en calcul des probabilités*

3 Termes et définitions

Pour les besoins du présent document, les termes et définitions donnés dans l'IEC 60050-192:2015 et l'ISO 3534-1, ainsi que les suivants, s'appliquent.

NOTE Pour faciliter la localisation de la définition complète, la référence du terme défini dans l'IEC 60050-192 est indiquée [entre crochets] immédiatement après le terme, par exemple:

durée moyenne de panne [192-07-23]

Les termes et définitions donnés à l'Article 3 qui ne figurent pas dans l'IEC 60050-192 sont utilisés afin de faciliter la présentation des expressions mathématiques de certains termes de l'IEC 60050-192. Certains termes issus de l'IEC 60050-192 ont été modifiés pour les besoins de la présente norme.

3.1

intensité instantanée de rétablissement

intensité de rétablissement

fréquence de rétablissement

$\nu(t)$

limite, si elle existe, du quotient du nombre moyen de rétablissements [192-06-23] d'une entité réparable [192-01-11] pendant l'intervalle de temps $[t, t + \Delta t]$, par Δt , lorsque Δt tend vers zéro, en supposant que l'entité est aussi bonne que neuve à l'instant $t = 0$

$$\nu(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0+} \frac{E[N_R(t + \Delta t) - N_R(t) | \text{aussi bonne que neuve à } t = 0]}{\Delta t}$$

où

$N_R(t)$ est le nombre de rétablissements pendant l'intervalle de temps $[0, t]$;

E désigne l'espérance mathématique

Note 1 à l'article: La différence entre l'intensité de rétablissement et le taux de réparation relève des conditions suivantes: l'entité est aussi bonne que neuve à l'instant $t = 0$ pour l'intensité de rétablissement et la réparation commence à l'instant $t = 0$ pour le taux de réparation. D'un point de vue mathématique, l'intensité de rétablissement est semblable à l'intensité inconditionnelle de défaillance (voir 3.8).

Note 2 à l'article: L'unité de mesure de l'intensité instantanée de rétablissement est l'unité de temps à la puissance -1 .

3.2

taux de réparation instantané taux de réparation

 $\mu(t)$

limite, si elle existe, du quotient de la probabilité conditionnelle d'achèvement de la réparation dans l'intervalle de temps $[t, t + \Delta t]$ par Δt , lorsque Δt tend vers zéro, en supposant que la réparation a commencé à $t = 0$ et ne s'est pas terminée avant le temps t

Note 1 à l'article: La différence entre l'intensité de rétablissement et le taux de réparation relève des conditions suivantes: l'entité est aussi bonne que neuve à l'instant $t = 0$ pour l'intensité de rétablissement et la réparation commence à l'instant $t = 0$ pour le taux de réparation. D'un point de vue mathématique, le taux de réparation est semblable au taux de défaillance (voir 3.6)

[SOURCE: IEC 60050-192:2015, 192-07-20, modifiée — La note 1 à l'article a été remplacée et la note 2 à l'article a été supprimée]

3.3

temps moyen entre défaillances METBF

espérance mathématique du temps qui s'écoule entre des défaillances consécutives

Note 1 à l'article: Le concept du temps moyen entre défaillances a été omis dans l'IEC 60050-192. Il était défini dans l'IEC 60050-191 comme «espérance mathématique du temps entre défaillances». La définition a été modifiée pour expliquer l'acronyme METBF (mean elapsed time between failures) utilisé dans la présente norme et ainsi éviter toute confusion entre le temps moyen entre défaillances (METBF) et la moyenne des temps de bon fonctionnement (MTBF ou MOTBF).

[SOURCE: IEC 60050-191:1990, 191-12-08, modifiée — l'acronyme et la Note 1 à l'article ont été ajoutés]

3.4

fonction de répartition de la durée de disponibilité

fonction donnant, pour toute valeur du temps t , la probabilité qu'un temps de disponibilité ait une durée inférieure ou égale à t

Note 1 à l'article: Si le temps de disponibilité est une variable aléatoire continue (strictement) positive, alors:

$$F_U(0) = 0 \text{ et}$$

$$F_U(t) = 1 - \exp\left(-\int_0^t \lambda_U(x) dx\right)$$

où

$\lambda_U(t)$ est la fonction relative au taux de transition instantané d'un état de disponibilité à un état d'indisponibilité.

Note 2 à l'article: La fonction de répartition de la durée de disponibilité est la fonction de répartition générale de la durée de disponibilité valide à la fois pour les entités à fonctionnement continu (EFC) et les entités à fonctionnement intermittent (EFI). Pour les EFC, $F_U(t) = F(t)$.

Note 3 à l'article: Si la fonction de répartition de la durée de disponibilité est exponentielle, alors

$$F_U(t) = 1 - \exp(-t/\text{TMD})$$

où TMD est le temps moyen de disponibilité.

Dans ce cas, l'inverse de TMD est indiqué par λ_U et $\lambda_U = 1/\text{TMD}$

3.5

taux de transition instantané d'un état de disponibilité à un état d'indisponibilité taux de transition d'un état de disponibilité à un état d'indisponibilité

 $\lambda_U(t)$

limite, si elle existe, du quotient de la probabilité conditionnelle d'achèvement du temps de disponibilité pendant l'intervalle de temps $[t, t + \Delta t]$ par Δt , lorsque Δt tend vers zéro, en

supposant que le temps de disponibilité a commencé à l'instant $t = 0$ et qu'il ne s'est pas terminé avant l'instant t

Note 1 à l'article: Le taux de transition instantané d'un état de disponibilité à un état d'indisponibilité est exprimé par la formule:

$$\lambda_U(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0+} \frac{1}{\Delta t} \frac{F_U(t + \Delta t) - F_U(t)}{1 - F_U(t)} = \frac{f_U(t)}{1 - F_U(t)}$$

où $F_U(t)$ est la fonction de répartition de la durée de disponibilité et $f_U(t)$ la fonction de densité de probabilité de la durée de disponibilité.

Note 2 à l'article: $\lambda_U(t)$ est le taux de transition général pour les temps de disponibilité valide à la fois pour les EFC et les EFL. Pour les EFC, $\lambda_U(t) = \lambda(t)$ (voir 3.6).

Note 3 à l'article: Si le temps de disponibilité est régi par une loi exponentielle, le taux de transition instantané d'un état de disponibilité à un état d'indisponibilité est constant dans le temps et désigné par λ_U .

Note 4 à l'article: L'unité de mesure du taux de transition instantané d'un état de disponibilité à un état d'indisponibilité est l'unité de temps à la puissance -1 .

3.6

taux instantané de défaillance

taux de défaillance

$\lambda(t)$

limite, si elle existe, du quotient de la probabilité conditionnelle pour que la défaillance d'une entité soit comprise dans l'intervalle de temps $[t, t + \Delta t]$ par Δt , lorsque Δt tend vers zéro, en supposant qu'une défaillance ne se soit pas produite dans l'intervalle de temps $[0, t]$

Note 1 à l'article: Le taux instantané de défaillance est exprimé par la formule:

$$\lambda(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0+} \frac{1}{\Delta t} \frac{F(t + \Delta t) - F(t)}{R(t)} = \frac{f(t)}{R(t)}$$

où $F(t)$ et $f(t)$ sont, respectivement, la fonction de répartition et la densité de probabilité à l'instant de la défaillance, et où $R(t)$ est la fonction de fiabilité, liée à la fiabilité $R(t_1, t_2)$ par la relation $R(t) = R(0, t)$.

Note 2 à l'article: La restriction aux entités non réparables imposée dans la définition fournie par l'IEC 60050-192 peut être levée afin que cette définition puisse s'appliquer à toutes sortes d'entités, c'est-à-dire les systèmes ou les entités individuelles, réparables ou non.

Note 3 à l'article: Le taux instantané de défaillance est le taux de transition d'un état de disponibilité à un état d'indisponibilité pour les EFC. Dans ce cas, $\lambda(t) = \lambda_U(t)$ (voir 3.5).

Note 4 à l'article: Lorsque $\Delta t \rightarrow 0+$, le taux de défaillance est la probabilité conditionnelle par unité de temps pour que l'entité subisse une défaillance entre les instants t et $t + \Delta t$, en supposant qu'elle est dans un état de disponibilité sur tout l'intervalle de temps $[0, t]$. L'entité est généralement censée être aussi bonne que neuve à l'instant 0.

Note 5 à l'article: Le taux instantané de défaillance peut également être exprimé par la formule:

$$\lambda(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0+} \frac{E[N(t + \Delta t) - N(t) | \text{disponible sur } [0, t]]}{\Delta t}$$

où $N(t)$ est le nombre de défaillances pendant l'intervalle de temps $[0, t]$, où E désigne l'espérance mathématique.

La forme de ces définitions permet de comparer le taux de défaillance aux intensités conditionnelles et inconditionnelles de défaillance.

[SOURCE: IEC 60050-192:2015, 192-05-06, modifiée — généralisée aux systèmes avec composants réparables et notes à l'article ajoutées]

3.7

intensité conditionnelle de défaillance taux de défaillance de Vesely

$\lambda_V(t)$

limite, si elle existe, du quotient du nombre moyen de défaillances d'une entité réparable pendant l'intervalle de temps $[t, t + \Delta t]$ par Δt lorsque Δt tend vers zéro, en supposant que l'entité est dans un état de disponibilité à l'instant t et aussi bonne que neuve à l'instant 0

Note 1 à l'article: L'intensité conditionnelle de défaillance est exprimée par la formule:

$$\lambda_V(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0+} \frac{E[N(t + \Delta t) - N(t) | \text{disponible à } t \text{ et aussi bonne que neuve à l'instant } 0]}{\Delta t}$$

où $N(t)$ est le nombre de défaillances pendant l'intervalle de temps $[0, t]$, où E désigne l'espérance mathématique.

Note 2 à l'article: Lorsque $\Delta t \rightarrow 0+$, l'intensité conditionnelle de défaillance est la probabilité par unité de temps pour que l'entité subisse une défaillance entre les instants t et $t + dt$, en supposant qu'elle est dans un état de disponibilité à l'instant t et aussi bonne que neuve à l'instant 0. Dans certains cas (rétablissement rapide des défaillances), elle fournit de bonnes approximations du taux de défaillance. Ce paramètre introduit en 1970 par W.E. Vesely [26] est également appelé taux de défaillance de Vesely.

Note 3 à l'article: Selon les définitions, $\lambda_V(t)$ et $z(t)$ sont liés par la formule $\lambda_V(t) = z(t)/A(t)$, où $A(t)$ représente la disponibilité instantanée de l'entité à l'instant t .

3.8

intensité inconditionnelle de défaillance intensité instantanée de défaillance intensité de défaillance fréquence de défaillance

$z(t)$

limite, si elle existe, du quotient par Δt de l'espérance mathématique du nombre de défaillances d'une entité réparable pendant l'intervalle de temps $[t, t + \Delta t]$ lorsque Δt tend vers zéro, en supposant que l'entité est aussi bonne que neuve à l'instant $t = 0$

Note 1 à l'article: L'intensité instantanée de défaillance est exprimée par la formule:

$$z(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0+} \frac{E[N(t + \Delta t) - N(t) | \text{aussi bonne que neuve à } t = 0]}{\Delta t}$$

où $N(t)$ est le nombre de défaillances dans l'intervalle de temps $[0, t]$, où E désigne l'espérance mathématique et où la condition implicite que l'entité soit aussi bonne que neuve à l'instant $t = 0$ a été ajoutée.

Note 2 à l'article: L'intensité inconditionnelle de défaillance est l'intensité de défaillance telle que définie dans l'IEC 60050-192:2015 [192-05-08]. Parfois, elle est également appelée ROCOF (rate of occurrence of failure en anglais soit taux d'occurrence des défaillances).

Note 3 à l'article: Lorsque $\Delta t \rightarrow 0+$, l'intensité inconditionnelle de défaillance est la probabilité par unité de temps pour que l'entité subisse une défaillance entre les instants t et $t + dt$, en supposant que l'entité est en état de disponibilité à l'instant $t = 0$. Dans le cas présent, l'entité peut être dans un état quelconque à l'instant t . C'est la raison pour laquelle l'adjectif «inconditionnelle» est utilisé.

Note 4 à l'article: Selon les définitions, $\lambda_V(t)$ et $z(t)$ sont liés par la formule $z(t) = A(t) \cdot \lambda_V(t)$, où $A(t)$ représente la disponibilité instantanée de l'entité à l'instant t .

[SOURCE: IEC 60050-192:2015, 192-05-08, modifiée — des synonymes ont été ajoutés et l'entrée a été révisée]

3.9

entité à fonctionnement continu EFC

entité pour laquelle le temps de fonctionnement [192-02-05] est égal au temps de capacité [192-02-17]

3.10

entité à fonctionnement intermittent

EFI

entité pour laquelle le temps de fonctionnement [192-02-05] est inférieur au temps de capacité [192-02-17]

Note 1 à l'article: Dans ce cas, le temps de capacité de l'entité est la somme des temps passés dans l'état de fonctionnement [192-02-04], dans l'état vacant [192-02-14] et dans l'attente [192-02-10].

4 Glossaire des symboles et abréviations

4.1 Généralités

Les symboles et abréviations donnés dans l'Article 4 sont largement employés et sont recommandés. Cependant, ils ne sont pas obligatoires. Par souci de cohérence dans la présentation, la notation utilisée dans le présent document peut être différente de celle utilisée dans un document de référence.

4.2 Acronymes utilisés dans la présente norme

Acronyme/abréviation	Signification
EFC	Entité à fonctionnement continu
EFI	Entité à fonctionnement intermittent
MACMT	Durée moyenne de maintenance corrective active (<i>Mean active corrective maintenance time</i>), c'est-à-dire espérance mathématique du temps de maintenance corrective active
$\hat{MACMT}$	Estimateur ponctuel de la durée moyenne de maintenance corrective active
MAD	Délai administratif moyen (<i>Mean administrative delay</i>)
$\hat{MAD}$	Estimateur ponctuel du délai administratif moyen
$MADT(t_1, t_2)$	Durée cumulée moyenne d'indisponibilité (<i>Mean accumulated down time</i>) sur l'intervalle de temps $[t_1, t_2]$
$\hat{MADT}(t_1, t_2)$	Estimateur ponctuel de la durée cumulée moyenne d'indisponibilité sur l'intervalle de temps $[t_1, t_2]$
$MAUT(t_1, t_2)$	Durée cumulée moyenne de disponibilité (<i>Mean accumulated up time</i>) sur l'intervalle de temps $[t_1, t_2]$
$\hat{MAUT}(t_1, t_2)$	Estimateur ponctuel de la durée cumulée moyenne de disponibilité sur l'intervalle de temps $[t_1, t_2]$
METBF	Temps moyen (écoulé) entre défaillances
MFDT	Temps moyen de détection de panne (<i>Mean fault detection time</i>), c'est-à-dire espérance mathématique du temps de détection de panne
MLD	Délai logistique moyen (<i>Mean logistic delay</i>)
$\hat{MLD}$	Estimateur ponctuel du délai logistique moyen
MMAT	Durée moyenne d'une tâche de maintenance (<i>Mean maintenance action time</i>), c'est-à-dire espérance mathématique de la durée d'une tâche de maintenance donnée
MRT	Durée moyenne de réparation (<i>Mean repair time</i>)
$\hat{MRT}$	Estimateur ponctuel de la durée moyenne de réparation

Acronyme/abréviation	Signification
MOTBF	Moyenne des temps de bon fonctionnement (<i>Mean operating time between failures</i>)
MTD	Durée moyenne du délai technique (<i>Mean technical delay</i>), c'est-à-dire espérance mathématique de la durée du délai technique
MTTF	Durée moyenne de fonctionnement avant défaillance (<i>Mean time to failure</i>)
$\hat{MTTF}$	Estimateur ponctuel de la durée moyenne de fonctionnement avant défaillance
MTTR	Durée moyenne de panne (<i>Mean time to restoration</i>)
$\hat{MTTR}$	Estimateur ponctuel de la durée moyenne de panne
TMD	Temps moyen de disponibilité
$\hat{TMD}$	Estimateur ponctuel du temps moyen de disponibilité
TMI	Temps moyen d'indisponibilité
$\hat{TMI}$	Estimateur ponctuel du temps moyen d'indisponibilité
RT_i	Temps de réparation (<i>repair time</i>) observé pour l'entité i
TTF_i	Temps avant défaillance (<i>Time to failure</i>) observée pour l'entité i
VRT	La variance du temps de réparation (<i>variance of repair time</i>), $VRT = Var[\zeta] = E[\zeta^2] - MRT^2$, où ζ est une variable aléatoire représentant le temps de réparation, Var désigne la variance et E désigne l'espérance mathématique

4.3 Symboles utilisés dans la présente norme

Symbole	Signification
$[t_1, t_2]$	Intervalle où t_1 est la limite inférieure et t_2 la limite supérieure ($t_1 < t_2$)
$Ast_i(t_1, t_2)$	Durée moyenne de séjour cumulée dans l'état i sur l'intervalle $[t_1, t_2]$
A	Disponibilité asymptotique
$A(t)$	Disponibilité instantanée (ou disponibilité), c'est-à-dire probabilité pour qu'une entité soit dans un état de disponibilité à l'instant t
$\bar{A}(t_1, t_2)$	Disponibilité moyenne pendant l'intervalle de temps $[t_1, t_2]$
$\bar{A}$	Disponibilité moyenne asymptotique
$\hat{A}(t_1, t_2)$	Estimateur ponctuel de la disponibilité moyenne pendant l'intervalle de temps $[t_1, t_2]$
Δt	Petit incrément de temps strictement positif, $\Delta t > 0$
dt	Incrément infinitésimal de temps strictement positif (c'est-à-dire, un Δt qui tend vers zéro)
$E[.]$	Espérance mathématique
$F_U(t)$	Fonction de répartition du temps de disponibilité
$f_U(t)$	Densité de probabilité des temps de disponibilité
	NOTE Pour les EFC, $f_U(t) = f(t)$.
$f(t)$	Densité de probabilité des temps (de fonctionnement) avant défaillance

Symbole	Signification
$\hat{f}(t)$	Estimateur ponctuel de la densité de probabilité du temps (de fonctionnement) avant défaillance à l'instant t
$f_{R+U}(t)$	Densité de probabilité de la somme du temps de panne et du temps de disponibilité subséquent
$G(t)$	Fonction de répartition des temps de réparation
$G_{ACM}(t)$	Fonction de répartition du temps de maintenance corrective active
$G_R(t)$	Fonction de répartition des temps de panne
$g(t)$	Densité de probabilité des temps de réparation
$\hat{g}(t)$	Estimateur ponctuel de la densité de probabilité du temps de réparation à l'instant t
$g_{ACM}(t)$	Densité de probabilité des temps de maintenance corrective active
$g_{AD}(t)$	Densité de probabilité des délais administratifs
$g_D(t)$	Densité de probabilité des temps d'indisponibilité
$g_{LD}(t)$	Densité de probabilité des délais logistiques
$g_{MA}(t)$	Densité de probabilité de la durée d'une tâche de maintenance donnée
$g_R(t)$	Densité de probabilité des temps de panne
$h_{CTTF}^{(n)}(t)$	Densité de probabilité des durées calendaires jusqu'à la $n^{\text{ième}}$ défaillance, $n \geq 1$
K_A, K_S, K_i	Capacité nominale (de production) associée à une entité A, un système S ou un état i
$K(t)$	Capacité instantanée (de production) associée à un système
k	Nombre de temps de réparation pendant une période donnée d'observation
k_{ACM}	Nombre de temps de maintenance corrective active pendant une période donnée d'observation
k_{AD}	Nombre de délais administratifs pendant une période donnée d'observation
k_D	Nombre de temps d'indisponibilité pendant une période donnée d'observation
k_F	Nombre de défaillances pendant une période donnée d'observation
k_{LD}	Nombre de délais logistiques pendant une période donnée d'observation
k_O	Nombre de défaillances pendant le temps de fonctionnement au cours d'une période donnée d'observation
k_R	Nombre de temps de panne pendant une période donnée d'observation
k_U	Nombre de temps de disponibilité pendant une période donnée d'observation
λ	Taux de défaillance constant, c'est-à-dire inverse de la durée moyenne de fonctionnement avant défaillance (MTTF) lorsque le temps avant défaillance est à répartition exponentielle
$\lambda(t)$	Taux instantané de défaillance
$\lambda(\infty)$	Taux asymptotique de défaillance
$\hat{\lambda}$	Estimateur ponctuel du taux de défaillance constant

Symbole	Signification
$\hat{\lambda}(t)$	Estimateur ponctuel du taux instantané de défaillance à l'instant t
$\bar{\lambda}(t_1, t_2)$	Taux moyen de défaillance pendant l'intervalle de temps $[t_1, t_2]$
λ_U	Taux de transition constant d'un état de disponibilité à un état d'indisponibilité, c'est-à-dire inverse du temps moyen de disponibilité (TMD) lorsque les temps de disponibilité sont à répartition exponentielle NOTE 1 Pour les EFC, $\lambda_U = \lambda$
$\lambda_U(t)$	Taux de transition d'un état de disponibilité à un état d'indisponibilité NOTE 2 Pour les EFC, $\lambda_U(t) = \lambda(t)$
$\lambda_V(t)$	Intensité conditionnelle de défaillance (taux de défaillance de Vesely)
$\lambda_V(\infty)$	Intensité conditionnelle de défaillance asymptotique (taux de défaillance de Vesely asymptotique)
$M(t)$	Maintenabilité, c'est-à-dire probabilité d'achever une tâche donnée de maintenance à l'instant t : $M(t) = M(t_1, t_2)$ pour $t_1 = 0$ et $t_2 = t$
$\hat{M}(t)$	Estimateur ponctuel de la maintenabilité à l'instant t
$M(t_1, t_2)$	Maintenabilité pendant l'intervalle de temps $[t_1, t_2]$
m	Nombre de tâches de maintenance observées
$m_{MAT}(t)$	Nombre de tâches de maintenance dont la durée est supérieure à t ($m_{MAT}(0) = m$)
μ	Taux de réparation constant, c'est-à-dire inverse de la durée moyenne de réparation (MRT) lorsque les temps de réparation sont à répartition exponentielle
$\mu(t)$	Taux de réparation instantané
$\hat{\mu}(t)$	Estimateur ponctuel du taux de réparation instantané à l'instant t
μ_{ACM}	Inverse de la durée moyenne de maintenance corrective active (MACMT) lorsque les temps de maintenance corrective active sont à répartition exponentielle
μ_{AD}	Inverse du délai administratif moyen (MAD) lorsque les délais administratifs sont à répartition exponentielle
μ_D	Inverse du temps moyen d'indisponibilité (TMI) lorsque les temps d'indisponibilité sont à répartition exponentielle
μ_{LD}	Inverse du délai logistique moyen (MLD) lorsque les délais logistiques sont à répartition exponentielle
μ_{MA}	Taux constant de l'achèvement d'une tâche de maintenance donnée, lorsque la durée de la tâche de maintenance est à répartition exponentielle
μ_R	Taux de rétablissement constant, c'est-à-dire inverse de la durée moyenne de panne (MTTR) lorsque les temps de panne sont à répartition exponentielle
$N(t)$	Nombre de défaillances pendant l'intervalle de temps $[0, t]$
$N_R(t)$	Nombre de rétablissements pendant l'intervalle de temps $[0, t]$
n	Nombre d'entités dans la population
$n_D\{t\}$	Nombre d'entités en état d'indisponibilité à l'instant t

Symbole	Signification
$n_F(t, t + \Delta t)$	Nombre de défaillances observées pendant l'intervalle de temps $[t, t + \Delta t]$, en supposant que l'échelle de temps comprenne à la fois des temps de disponibilité et d'indisponibilité
$n_F(t_1, t_2)$	Nombre de défaillances observées pendant l'intervalle de temps $[t_1, t_2]$, en supposant que l'échelle de temps comprenne à la fois des temps de disponibilité et d'indisponibilité
$n_R(t)$	Nombre d'entités réparables toujours en cours de réparation à l'instant t ($n_R(0) = n$)
$n_R(t + \Delta t) - n_R(t)$	Nombre d'entités réparées pendant l'intervalle de temps $[t, t + \Delta t]$
$n_S(t)$	Nombre d'entités (non réparables) qui sont encore en fonctionnement à l'instant t ($n_S(0) = n$)
$n_S(t_1, t_2)$	Nombre d'entités qui étaient en fonctionnement à l'instant t_1 et qui ont fonctionné sans défaillance pendant l'intervalle de temps $[t_1, t_2]$
$n_S(t + \Delta t) - n_S(t)$	Nombre d'entités qui subissent une défaillance pendant l'intervalle de temps $[t, t + \Delta t]$
$n_U\{t\}$	Nombre d'entités en état de disponibilité à l'instant t
$v(t)$	Intensité instantanée de rétablissement
$P(.)$	Fonction de probabilité. Le point représente tout événement ou toute variable aléatoire pertinent(e)
$P_i(t), P_i^{(av)}(t), P_i^{(rel)}(t)$	Probabilité d'un état i dans les modèles états-transitions, probabilité d'un état i pour un graphe de Markov «de disponibilité» (voir 6.1.2.1), probabilité d'un état i pour un graphe de Markov «de fiabilité» (voir 6.1.3.1)
$Prod(t)$	Production instantanée à l'instant t
$\overline{Prod}(t_1, t_2)$	Disponibilité de production moyenne sur l'intervalle $[t_1, t_2]$
$R(t)$	Fiabilité, c'est-à-dire probabilité de survie jusqu'à l'instant t $R(t) = R(t_1, t_2)$ pour $t_1 = 0$ et $t_2 = t$
$\hat{R}(t)$	Estimateur ponctuel de la fiabilité à l'instant t
$R(t_1, t_2)$	Fiabilité pendant l'intervalle de temps $[t_1, t_2]$
$\hat{R}(t_1, t_2)$	Estimateur ponctuel de la fiabilité pendant l'intervalle de temps $[t_1, t_2]$
$R(t, t + x t)$	Fiabilité conditionnelle pendant l'intervalle de temps $[t, t + x]$, en supposant que l'entité est en état de disponibilité à l'instant t
ρ	Production par unité de temps
t	Instant
T	Instant ou durée en fonction du contexte
$\overline{Tbf}(t)$	Temps moyen écoulé entre l'apparition de défaillances successives sur l'intervalle de temps $[0, t]$
τ	Instant ou intervalle entre tests en fonction du contexte
U	Indisponibilité asymptotique
$U(t)$	Indisponibilité instantanée (fonction d'indisponibilité)
$\overline{U}(t_1, t_2)$	Indisponibilité moyenne pendant l'intervalle de temps $[t_1, t_2]$
$\overline{U}$	Indisponibilité moyenne asymptotique

Symbole	Signification
$\hat{U}(t_1, t_2)$	Estimateur ponctuel de l'indisponibilité moyenne pendant l'intervalle de temps $[t_1, t_2]$
$V(t_1, t_2)$	Nombre moyen de rétablissements sur l'intervalle $[t_1, t_2]$
$Z(t)$	Espérance mathématique du nombre de défaillances pendant l'intervalle de temps $[0, t]$ $Z(t) = E[N(t)]$, où E désigne l'espérance mathématique
$z(t)$	Intensité instantanée de défaillance (fréquence de défaillance)
$z(\infty)$	Intensité asymptotique de défaillance
$\hat{z}(t)$	Estimateur ponctuel de l'intensité instantanée de défaillance à l'instant t
$\bar{z}(t_1, t_2)$	Intensité moyenne de défaillance pendant l'intervalle de temps $[t_1, t_2]$
$\hat{\bar{z}}(t_1, t_2)$	Estimateur ponctuel de l'intensité moyenne de défaillance pendant l'intervalle de temps $[t_1, t_2]$

5 Modèles et hypothèses d'ordre général

5.1 Composantes des temps de disponibilité et d'indisponibilité

Afin de comprendre les expressions mathématiques spécifiées dans la présente norme, il est important de comprendre les composantes du temps de disponibilité et du temps d'indisponibilité. L'IEC 60050-192 scinde le temps de disponibilité (pendant lequel l'entité fonctionne comme requis) et le temps d'indisponibilité (pendant lequel l'entité ne fonctionne pas comme requis) en composantes spécifiques. Cela est résumé dans les Figure 1 et Figure 2 de l'IEC 60050-192:2015, qui fournit également des définitions relatives aux valeurs moyennes pour certaines de ces composantes.

La Figure 1 et la Figure 2 (adaptées de l'IEC 60050-192) résument respectivement les composantes du temps de disponibilité et du temps d'indisponibilité qui sont pertinentes pour la présente norme (le «temps de maintenance préventive» et le «temps d'incapacité externe» ne sont pas pris en compte). Les acronymes correspondant aux valeurs moyennes utilisées dans la présente norme ont été ajoutés dans les Figures 1 et 2.

Up time [192-02-02]		
Enabled time [192-02-17]		
Operating time [192-02-05]	Non operating time [192-02-07]	
	Idle time [192-02-15]	Standby time [192-02-13]
MUT [192-08-09]		

IEC

Anglais	Français
Up time	Temps de disponibilité
Enabled time	Temps de capacité
Operating time	Temps de fonctionnement
Non operating time	Temps de non-fonctionnement
Idle time	Temps mort
Standby time	Période d'attente
MUT	TMD

Figure 1 – Composantes du temps de disponibilité

Down time [192-02-21]						
Non-operating time [192-02-07]						
Time to restoration [192-07-06]						
Corrective maintenance time [192-07-07]					Fault detection time [192-07-11]	Administrative delay [192-07-12]
Logistic delay [192-07-13]	Active corrective maintenance time [192-07-10]					
	Technical delay [192-07-15]	Repair time [192-07-19]				
		Fault localization time [192-07-18]	Fault correction time [192-07-14]	Function checkout time [192-07-16]		
MLD [192-07-27]	MTD	MRT [192-07-21]			MFDT	MAD [192-07-26]
MACMT [192-07-22]						
MTTR [192-07-23]						
MDT [192-08-10]						

IEC

Anglais	Français
Down time	Temps d'indisponibilité
Non-operating time	Temps de non-fonctionnement
Time to restoration	Temps de panne
Corrective maintenance time	Temps de maintenance corrective
Logistic delay	Délai logistique
MLD	MLD
Active corrective maintenance time	Temps de maintenance corrective active
Technical delay	Délai technique
MTD	MTD
Repair time	Temps de réparation
Fault localization time	Temps de localisation de panne
Fault correction time	Temps de correction de panne
Function checkout time	Temps de vérification de fonctionnement
MRT	MRT
MACMT	MACMT
MTTR	MTTR
MDT	TMI
Fault detection time	Temps de détection de panne
MFD	MFD
Administrative delay	Délai administratif
MAD	MAD

Figure 2 – Composantes du temps d'indisponibilité

L'IEC 60050-192 définit plusieurs acronymes pour le temps moyen associé aux défaillances de l'entité se produisant pendant l'état de fonctionnement. Cela est résumé dans la Figure 3.

Non-repairable item [192-01-12]			
Operating time to 1st failure [192-05-02]	Operating time to failure [192-05-01]	Operating time between failures [192-05-04]	(Elapsed) time between failures [192-05-03]
MTTFF [192-05-12]	MTTF [192-05-11]	MOTBF / MTBF [192-05-13]	METBF
Repairable item [192-01-11]			

IEC

Anglais	Français
Non-repairable item	Entité non réparable
Operating time to 1st failure	Temps de fonctionnement avant la première défaillance
MTTFF	MTTFF
Operating time to failure	Temps de fonctionnement avant défaillance
MTTF	MTTF
Operating time between failures	Temps de bon fonctionnement
MOTBF / MTBF	MOTBF / MTBF
(Elapsed) time between failures	Temps (écoulé) entre défaillances
METBF	METBF
Repairable item	Entité réparable

Figure 3 – Acronymes associés aux temps de défaillance

NOTE Dans les ouvrages traitant de la fiabilité, l'acronyme MTBF est souvent utilisé pour désigner le temps moyen entre défaillances. Selon l'IEC 60050-192, cet acronyme est utilisé pour désigner la moyenne des temps de «bon fonctionnement». Par conséquent, afin d'éviter toute confusion, l'acronyme METBF (voir 3.3) est utilisé dans la présente norme pour désigner le temps moyen entre défaillances.

5.2 Introduction aux modèles et aux hypothèses

Pour établir des expressions mathématiques correctes des mesures caractéristiques de la sûreté de fonctionnement sélectionnées et définies dans l'IEC 60050-192, la distinction est faite entre les entités considérées comme un ensemble (entités individuelles) et les entités composées de plusieurs entités individuelles (systèmes). Les classes d'entités suivantes sont traitées séparément dans la présente norme:

- Systèmes:
- Entités individuelles:
 - entités non réparables [192-01-12];
 - entités réparables [192-01-11]:
 - i) à temps de panne nul;
 - ii) à temps de panne non nul.

NOTE 1 Le terme «entité» est utilisé dans la présente norme lorsqu'il s'applique aux systèmes et aux entités individuelles.

NOTE 2 Le terme entité «non réparable» inclut soit les entités qui ne sont pas réparables, soit les entités qui sont réparables mais qui ne sont pas réparées après avoir subi une défaillance. Le terme entité «réparable» inclut uniquement les entités réparables qui sont effectivement réparées après avoir subi une défaillance.

Pour conserver aussi autonome que possible la norme et aussi simples que possible les formules mathématiques, les modèles mathématiques de base suivants sont utilisés pour calculer les mesures caractéristiques de la sûreté de fonctionnement:

- modèles états-transitions pour les systèmes;
- processus de renouvellement pour les entités individuelles.

La méthode générale visant à modéliser une entité consiste à identifier ses différents états et à analyser la façon dont elle passe d'un état à l'autre lorsque le temps s'écoule: cela peut être réalisé au moyen de modèles états-transitions. Ces modèles sont utiles pour représenter le développement des expressions mathématiques correspondant aux différentes mesures caractéristiques de la sûreté de fonctionnement. Lorsqu'aucune hypothèse particulière n'est formulée sur les lois de probabilité, ces modèles ne peuvent être traités au moyen de calculs analytiques que dans des cas particuliers simples. Autrement, il est nécessaire d'utiliser la simulation de Monte-Carlo. C'est la raison pour laquelle l'hypothèse relative aux taux de transition constants pour les systèmes et les entités individuelles est souvent formulée afin d'utiliser des modèles de Markov, à la fois bien connus et pour lesquels des algorithmes analytiques puissants sont disponibles.

Pour les entités individuelles et sous l'hypothèse qu'elles ont seulement deux états, des formules générales comportant des taux de transition non constants peuvent être dérivées dans une certaine mesure. Cela est présenté en 6.2, 6.3 et 6.4 pour les entités individuelles suivantes:

- entités individuelles non réparables: il s'agit du modèle mathématique le plus simple, car une seule variable aléatoire est concernée: le temps de fonctionnement avant défaillance de l'entité [192-05-01]. Il peut être caractérisé par sa fiabilité $R(t)$, son taux instantané de défaillance, $\lambda(t)$ [192-05-06], aussi appelé taux de hasard associé à la répartition du temps avant défaillance (c'est-à-dire, la défiabilité), ou sa durée moyenne de fonctionnement avant défaillance MTTF [192-05-11], qui est également sa durée moyenne de fonctionnement avant la première défaillance MTTF [192-05-12].
- entités individuelles réparables: le modèle de base est un processus de renouvellement simple (ordinaire), lorsque le temps de panne de l'entité peut être négligé, ou un processus de renouvellement alterné simple (ordinaire) lorsque le temps de panne de l'entité est non nul. Dans ce dernier cas, l'entité évolue alternativement entre un état de disponibilité et un état d'indisponibilité, et, en plus des mesures de sûreté de fonctionnement habituelles, l'intensité de défaillance [192-05-08] est aussi largement utilisée pour mesurer la fiabilité de l'entité. Dans ce cas, elle est égale à la densité de renouvellement.

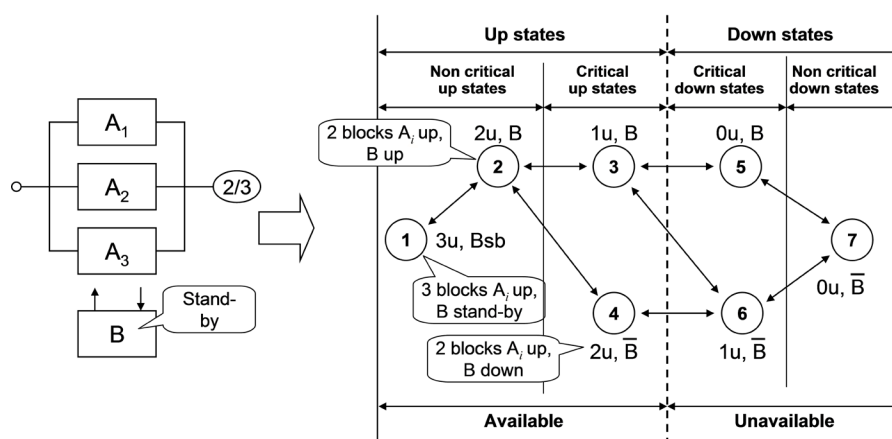
Pour éviter un emploi incorrect de ces expressions mathématiques, susceptible de produire des résultats erronés, il convient d'observer les hypothèses spécifiques détaillées en 5.4 et 5.5.

Pour faciliter la compréhension, quelques définitions sont reprises si nécessaire dans différentes parties de la présente norme.

5.3 Approche états-transitions

Une méthode simple pour présenter les concepts liés à la sûreté de fonctionnement consiste à analyser le comportement d'une entité (c'est-à-dire une entité individuelle ou un système) au cours de son évolution entre les états de disponibilité et d'indisponibilité.

Cela peut être réalisé au moyen d'un graphe états-transitions tel que celui présenté dans la partie droite de la Figure 4. Il est associé au système représenté par le diagramme de fiabilité (voir l'IEC 61078 [25]) de la partie gauche de la figure. Ce système est composé de trois blocs similaires (A_i) organisés selon une architecture deux sur trois et d'un bloc B en position d'attente qui reprend immédiatement la fonction du premier des blocs A_i qui passe à l'état d'indisponibilité. La commutation entre A_i et B est considérée comme étant parfaite (c'est-à-dire instantanée et sans défaillance).



Anglais	Français
Standby	Attente
Up states	États de disponibilité
Non critical up states	États non critiques de disponibilité
2 blocks A_i up, B up	2 blocs A_i disponibles, B disponible
3 blocks A_i up, B standby	3 blocs A_i disponibles, B en attente
2 blocks A_i up, B down	2 blocs A_i disponibles, B indisponible
Critical up states	États critiques de disponibilité
Available	Disponible
Down states	États d'indisponibilité
Critical down states	États critiques d'indisponibilité
Non critical down states	États non critiques d'indisponibilité
Unavailable	Indisponible

Figure 4 – Diagramme états-transitions simple

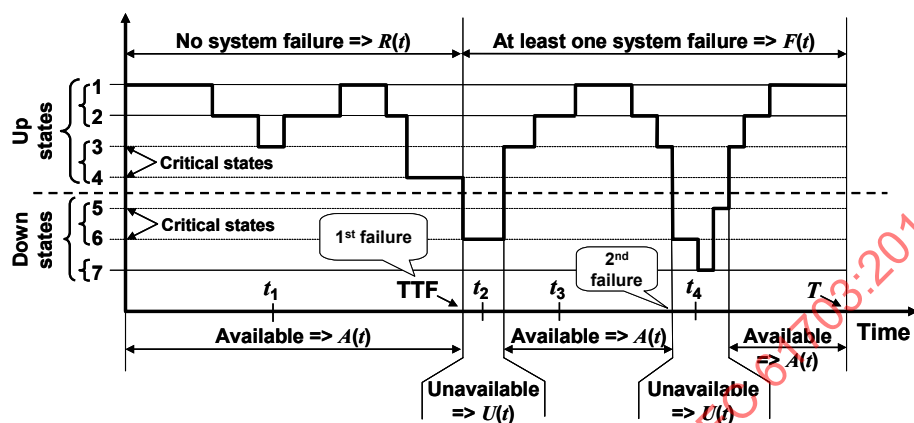
Étant donné que les blocs (A_i) sont similaires, les états similaires peuvent être rassemblés pour obtenir le diagramme états-transitions présenté dans la partie droite de la Figure 4. Ce diagramme comprend sept états représentés par des cercles et seize transitions représentées par des flèches. Par exemple, l'état 3 rassemble trois états similaires (A_1 et B en état de disponibilité et les autres blocs en état d'indisponibilité, A_2 et B en état de disponibilité et les autres blocs en état d'indisponibilité, A_3 et B en état de disponibilité et les autres blocs en état d'indisponibilité) et la ligne fléchée à ses deux extrémités reliant les états 2 et 3 signifie que le système peut passer de l'état 2 à l'état 3 et inversement.

Ce diagramme états-transitions suffit à identifier les classes d'états qui sont indispensables pour définir et comprendre les mesures caractéristiques de la sûreté de fonctionnement (par exemple: disponibilité, fiabilité, taux de défaillance, intensités de défaillance, densité de défaillance).

Les états peuvent être regroupés en deux classes principales, qui peuvent elles-mêmes être divisées en deux sous-classes:

- classe des états de disponibilité du système: états 1, 2, 3 et 4 (où au moins 2 des blocs sont dans des états de disponibilité). Elle se divise en deux sous-classes:
 - classe des états non critiques de disponibilité: états 1 et 2 séparés de la classe des états d'indisponibilité par plus d'une transition;
 - classe des états critiques de disponibilité: états 3 et 4 séparés de la classe des états d'indisponibilité par une seule transition;

- classe des états d'indisponibilité du système: états 5, 6 et 7 (où moins de 2 des blocs sont dans des états de disponibilité). Elle se divise en deux sous-classes:
 - classe des états non critiques d'indisponibilité: l'état 7 est séparé de la classe des états de disponibilité par plus d'une transition;
 - classe des états critiques d'indisponibilité: les états 5 et 6 sont séparés de la classe des états de disponibilité par une seule transition.



IEC

Anglais	Français
Up states	États de disponibilité
Down states	États d'indisponibilité
No system failure	Aucune défaillance du système
Critical states	États critiques
1 st failure	1 ^{re} défaillance
TTF	TTF
Available	Disponible
Unavailable	Indisponible
At least one system failure	Au moins une défaillance du système
2 nd failure	2 ^e défaillance
Available	Disponible
Unavailable	Indisponible
Time	Temps

Figure 5 – Exemple d'évolution (chronogramme) du système représenté à la Figure 4

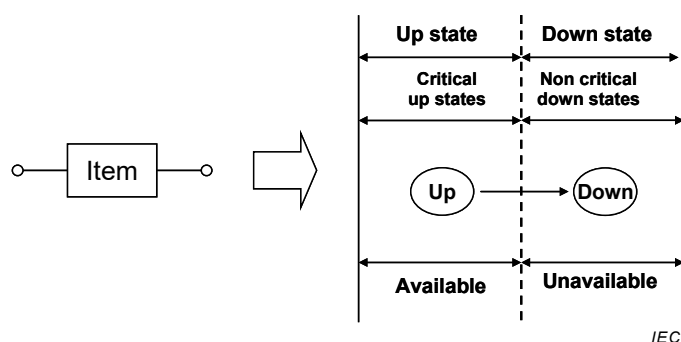
Lorsque les transitions entre les états se produisent de façon aléatoire (par exemple, en fonction des défaillances et des rétablissements des différents blocs), le comportement du système constitue un processus stochastique. Un exemple de réalisation de ce processus stochastique (c'est-à-dire, une trajectoire du processus) pendant l'intervalle de temps $[0, T]$ est représenté à la Figure 5:

- le système est en état de disponibilité (c'est-à-dire, disponible) à l'instant t_1 , t_3 ou T ;
- le système est en état d'indisponibilité (c'est-à-dire, indisponible) à l'instant t_2 ou t_4 ;
- le système est resté de manière continue en état de disponibilité (c'est-à-dire, fiable) jusqu'à la première défaillance survenant à l'instant TTF (temps avant défaillance).

Cet exemple inclut tous les cas pouvant être rencontrés.

5.4 Modèle et hypothèses pour entités individuelles non réparables

Cela s'applique à la fois aux entités individuelles solitaires et aux entités individuelles faisant partie d'un système. Il s'agit de l'exemple particulier le plus simple qui peut être dérivé de la Figure 5, puisque seulement deux états doivent être pris en compte (voir Figure 6 et Figure 7).



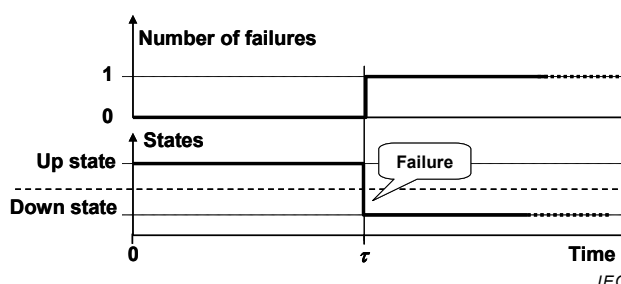
Anglais	Français
Item	Entité
Up state	État de disponibilité
Critical up states	États critiques de disponibilité
Up	Disponibilité
Available	Disponible
Down state	État d'indisponibilité
Non critical down states	États non critiques d'indisponibilité
Down	Indisponibilité
Unavailable	Indisponible

Figure 6 – Diagramme états-transitions d'une entité individuelle non réparable

À tout instant, l'entité non réparable est soit:

- dans l'état de disponibilité à partir duquel elle peut subir une défaillance (c'est-à-dire, passer en état d'indisponibilité) à l'instant τ (temps avant défaillance);
- dans l'état d'indisponibilité où elle a subi une défaillance et y reste indéfiniment.

Par conséquent, dans ce cas simple, l'état de disponibilité est aussi un état critique de disponibilité et l'état d'indisponibilité est un état non critique d'indisponibilité dans la mesure où aucune réparation ne peut se produire. Le comportement d'une telle entité est représenté à la Figure 7.



Anglais	Français
Up state	État de disponibilité
Down state	État d'indisponibilité
Number of failures	Nombre de défaillances
States	États
Failure	Défaillance
Time	Temps

Légende

τ Temps avant défaillance

Figure 7 – Exemple d'évolution d'une entité individuelle non réparable

Le nombre de défaillances observées peut, dans le cas présent, être 0 ou 1 et le nombre de réparations est égal à 0.

Sauf indication contraire, les hypothèses utilisées pour obtenir les formules mathématiques sont les suivantes:

- Lorsque l'entité est en état de disponibilité, elle est considérée comme étant à fonctionnement continu.

NOTE Les expressions mathématiques données en 5.4 peuvent ne pas être toujours valides pour des EFi.

- À l'instant $t = 0$, l'entité est dans un état de fonctionnement et aussi bonne que neuve. Les pannes latentes ne sont pas prises en compte et peuvent, si elles surviennent, invalider certaines expressions mathématiques.
- La maintenance préventive ou d'autres tâches programmées susceptibles d'entraîner l'incapacité de l'entité à accomplir une fonction requise ne sont pas prises en compte.
- Le temps avant défaillance est une variable aléatoire continue positive qui présente une densité de probabilité et une espérance mathématique finie.

5.5 Hypothèses et modèle pour entités individuelles réparables

5.5.1 Hypothèse pour entités individuelles réparables

Sauf indication contraire, les hypothèses utilisées pour dériver les formules mathématiques sont les suivantes:

- À l'instant $t = 0$, l'entité est dans un état de disponibilité et aussi bonne que neuve. Par conséquent, $R(0) = A(0) = 1$. Les pannes latentes ne sont pas prises en compte.
- Lorsque l'entité est dans un état de disponibilité, elle est considérée comme étant à fonctionnement continu.
- Les temps successifs de disponibilité de l'entité sont des variables aléatoires continues positives, identiquement distribuées et statistiquement indépendantes qui présentent une densité de probabilité commune et une espérance mathématique finie.

- d) Si la durée du temps d'indisponibilité n'est pas nulle, les temps successifs d'indisponibilité de l'entité sont des variables aléatoires continues positives, identiquement distribuées et statistiquement indépendantes qui présentent une densité de probabilité commune et une espérance mathématique finie.
- e) Les temps de disponibilité sont statistiquement indépendants des temps d'indisponibilité.
- f) La maintenance préventive ou d'autres tâches programmées susceptibles d'entraîner l'incapacité de l'entité à accomplir une fonction requise ne sont pas prises en compte.
- g) Sauf indication contraire, toute autre variable aléatoire (par exemple, temps avant défaillance, temps de réparation, délai logistique) prise en compte dans la norme est une variable aléatoire continue positive qui présente une densité de probabilité et une espérance mathématique finie.

En résumé:

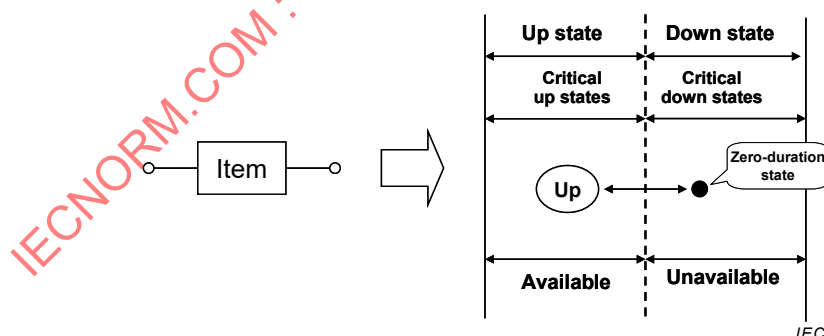
- toute transition d'un état de disponibilité à un état d'indisponibilité est une défaillance;
- toute transition d'un état d'indisponibilité à un état de disponibilité est un rétablissement;
- tout état d'indisponibilité est une panne et, par conséquent, le temps d'indisponibilité est identique au temps de panne;
- après chaque rétablissement, une entité individuelle est aussi bonne que neuve.

NOTE 1 Selon la dernière hypothèse, toutes les expressions mathématiques des mesures de fiabilité concernant le temps avant défaillance d'une entité individuelle non réparable peuvent aussi être appliquées à chaque temps avant défaillance d'une entité individuelle réparable à fonctionnement continu.

NOTE 2 Les composants d'un système sont aussi bons que neufs après rétablissement, mais l'ensemble du système devient aussi bon que neuf uniquement lorsque tous les composants ayant subi une défaillance ont été rétablis.

5.5.2 Réparation instantanée

Cela s'applique à la fois aux entités individuelles solitaires et aux entités individuelles faisant partie d'un système et qui sont indépendantes les unes des autres. Il s'agit d'un autre exemple simple qui peut être dérivé de la Figure 5. Ici encore, seulement deux états doivent être pris en compte (voir Figure 8 et Figure 9), mais l'état d'indisponibilité est un état à durée nulle dans la mesure où les réparations sont instantanées.



Anglais	Français
Item	Entité
Up state	État de disponibilité
Critical up states	États critiques de disponibilité
Up	Disponibilité
Available	Disponible
Down state	État d'indisponibilité
Critical down states	États critiques d'indisponibilité
Zero-duration state	État à durée nulle
Unavailable	Indisponible

Figure 8 – Diagramme états-transitions d'une entité individuelle réparable instantanément

À tout instant, l'entité réparable est soit:

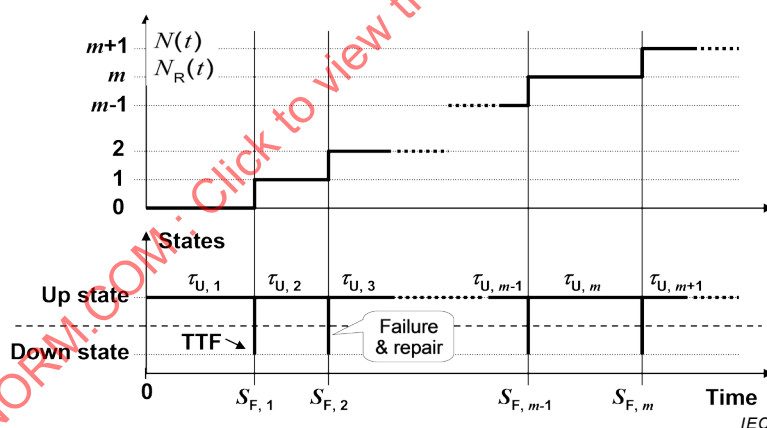
- dans l'état de disponibilité à partir duquel elle peut subir une défaillance (c'est-à-dire, passe en état d'indisponibilité). Dans la Figure 9, $S_{F,1}$, $S_{F,2}$, $S_{F,3}$... sont des instants de défaillance;
- dans l'état d'indisponibilité où elle est réparée instantanément (c'est-à-dire, passe en état de disponibilité). Dans la Figure 9, $S_{F,1}$, $S_{F,2}$, $S_{F,3}$... sont également des instants de réparation.

Le comportement d'une telle entité est représenté à la Figure 9. Lorsque l'entité est aussi bonne que neuve après avoir été réparée, elle peut être modélisée par un processus de renouvellement simple (ordinaire).

L'entité réparable étant en état de disponibilité à tout instant, elle est disponible à tout instant. Par conséquent, ce modèle est principalement utile pour compter le nombre de défaillances se produisant sur un intervalle de temps donné (voir Figure 9).

Lorsque cette approche est utilisée pour modéliser une entité sans prendre en compte les temps de panne, le temps pris en compte à la Figure 9 comprend uniquement les temps de fonctionnement et ce modèle permet de calculer le nombre de défaillances se produisant sur une période donnée de temps de fonctionnement cumulés.

Lorsque cette approche est utilisée pour modéliser une entité dans laquelle les temps de panne sont petits en comparaison avec les temps avant défaillance, le temps pris en compte à la Figure 9 est le temps calendaire qui comprend à la fois le temps de fonctionnement et le temps de panne. Ce temps calendaire surévalue le temps de fonctionnement et le nombre calculé de défaillances est conservatif.



Anglais	Français
Up state	État de disponibilité
Down state	État d'indisponibilité
States	États
TTF	TTF
Failure & repair	Défaillance & réparation
Time	Temps

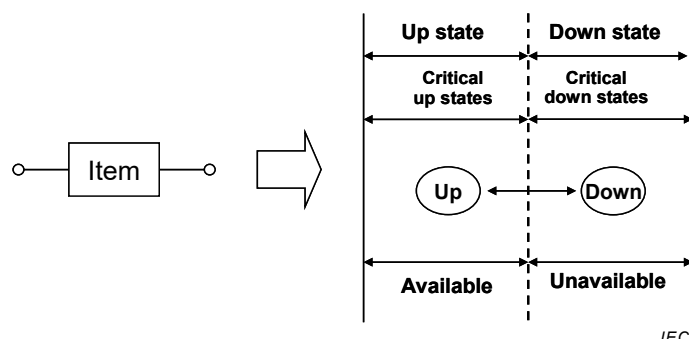
Légende

$N(t)$	Nombre de défaillances pendant l'intervalle de temps $[0, t]$
$N_R(t)$	Nombre de rétablissements pendant l'intervalle de temps $[0, t]$
$S_{F,1}, S_{F,2}, S_{F,3}$	Instants successifs de défaillance
$\tau_{U,1}, \tau_{U,2}, \tau_{U,3}$	Temps successifs de disponibilité

Figure 9 – Exemple d'évolution d'une entité individuelle réparable avec temps de panne nul

5.5.3 Réparation non instantanée

Il s'agit du même cas que celui présenté en 5.5.2, à l'exception du fait que l'état d'indisponibilité dure un certain temps dans la mesure où les réparations ne sont pas instantanées (voir Figure 10 et Figure 11).



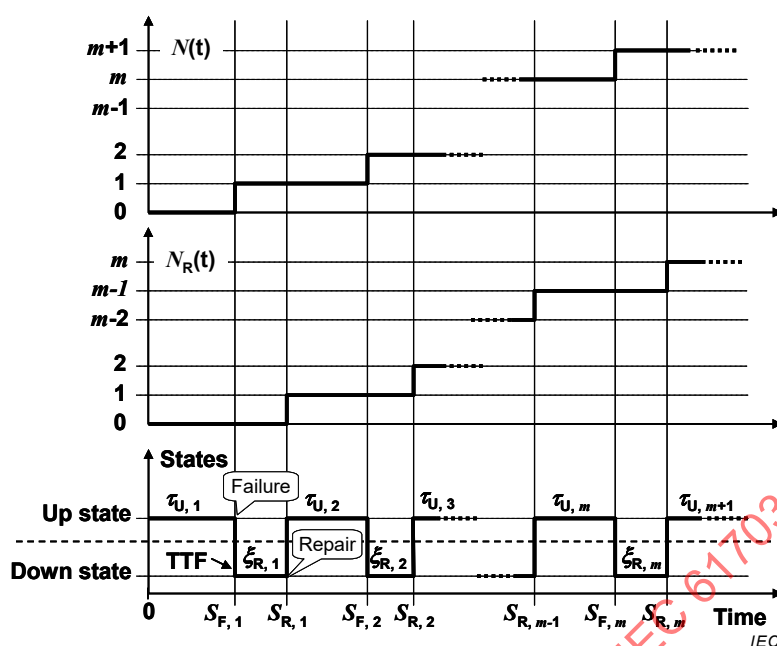
Anglais	Français
Item	Entité
Up state	État de disponibilité
Critical up states	États critiques de disponibilité
Up	Disponibilité
Available	Disponible
Down state	État d'indisponibilité
Critical down states	États critiques d'indisponibilité
Down	Indisponibilité
Unavailable	Indisponible

Figure 10 – Diagramme états-transitions d'une entité individuelle réparable

À tout instant, l'entité individuelle réparable sera soit:

- dans l'état de disponibilité à partir duquel elle peut subir une défaillance (c'est-à-dire, peut passer en état d'indisponibilité). Dans la Figure 11, $S_{F,1}$, $S_{F,2}$, $S_{F,3}$... sont des instants de défaillance;
- dans l'état d'indisponibilité où elle peut être réparée (c'est-à-dire, peut passer en état de disponibilité). Dans la Figure 11, $S_{R,1}$, $S_{R,2}$, $S_{R,3}$... sont des instants de réparations;

Le comportement d'une telle entité est représenté à la Figure 11. Lorsque l'entité est aussi bonne que neuve après avoir été réparée, elle peut être modélisée par un processus de renouvellement alternatif simple (ordinaire).



Anglais	Français
Up state	État de disponibilité
Down state	État d'indisponibilité
States	États
Failure	Défaillance
Repair	Réparation
Time	Temps

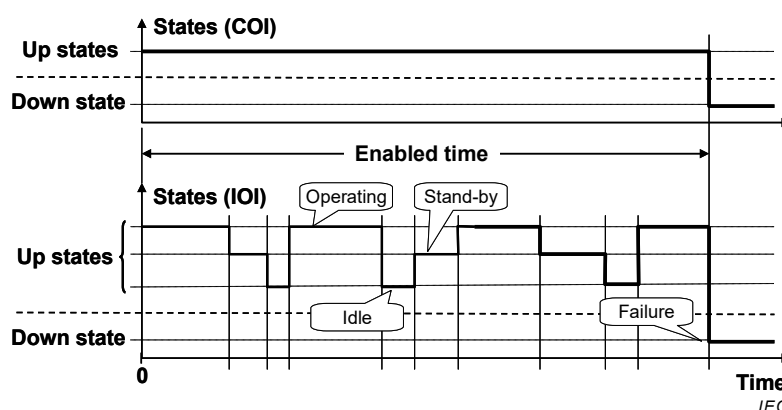
Légende

$N(t)$	Nombre de défaillances pendant l'intervalle de temps $[0, t]$
$N_R(t)$	Nombre de rétablissements pendant l'intervalle de temps $[0, t]$
$S_{F,1}, S_{F,2}, S_{F,3}$	Instants successifs de défaillance
$S_{R,1}, S_{R,2}, S_{R,3}$	Instants successifs de rétablissement
$\tau_{U,1}, \tau_{U,2}, \tau_{U,3}$	Temps successifs de disponibilité
$\xi_{R,1}, \xi_{R,2}, \xi_{R,3}$	Temps successifs de panne

Figure 11 – Exemple d'évolution d'une entité individuelle réparable avec temps de panne non nul

5.6 Comparaison entre les entités à fonctionnement continu (EFC) et les entités individuelles à fonctionnement intermittent (EFI)

Pour les entités à fonctionnement continu (EFC), l'état de disponibilité est réduit à l'état de fonctionnement et le temps de disponibilité est alors égal au temps de fonctionnement. Pour les entités à fonctionnement intermittent (EFI), la classe des états de disponibilité est scindée en plusieurs types d'états, par exemple l'état de fonctionnement [192-02-04], l'état vacant [192-02-14] et l'attente [192-02-10] (voir Figure 12).

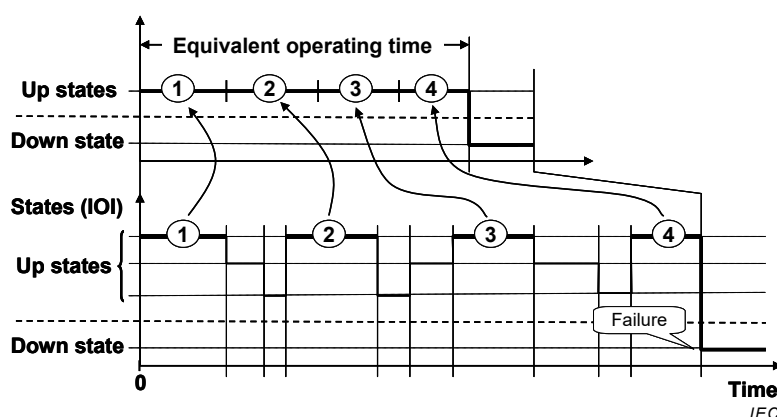


Anglais	Français
Up states	États de disponibilité
Down state	État d'indisponibilité
Up states	États de disponibilité
Down state	État d'indisponibilité
States (COI)	États (EFC)
States (IOI)	États (EFI)
Enabled time	Temps de capacité
Operating	Temps de fonctionnement
Stand-by	Période d'attente
Idle	Temps mort
Failure	Défaillance
Time	Temps

NOTE Pour les EFC, Temps de capacité = Temps de fonctionnement; pour les EFI, Temps de capacité = Temps de fonctionnement + Période d'attente + Temps mort.

Figure 12 – Comparaison du temps de capacité pour une EFC et une EFI

Les expressions utilisées pour les mesures de fiabilité des entités réparables à fonctionnement continu peuvent ne pas s'appliquer aux EFI. Cependant, sous l'hypothèse que l'entité ne peut pas subir de défaillance (c'est-à-dire passer en état d'indisponibilité) lorsqu'elle n'est pas en état de fonctionnement, les expressions restent valides à condition que le temps de fonctionnement équivalent soit utilisé comme cela est représenté à la Figure 13. Si l'entité subit une défaillance au cours des états de non-fonctionnement (par exemple, au cours des états vacants ou des attentes), il convient de prendre en compte les processus stochastiques généraux comme ceux représentés à la Figure 5.



Anglais	Français
Up states	États de disponibilité
Down state	État d'indisponibilité
States (IOI)	États (EFI)
Equivalent operating time	Temps de fonctionnement équivalent
Failure	Défaillance
Time	Temps

NOTE L'équivalence représentée n'est valide que si l'entité ne peut pas subir de défaillance pendant les périodes d'attente ou les temps morts.

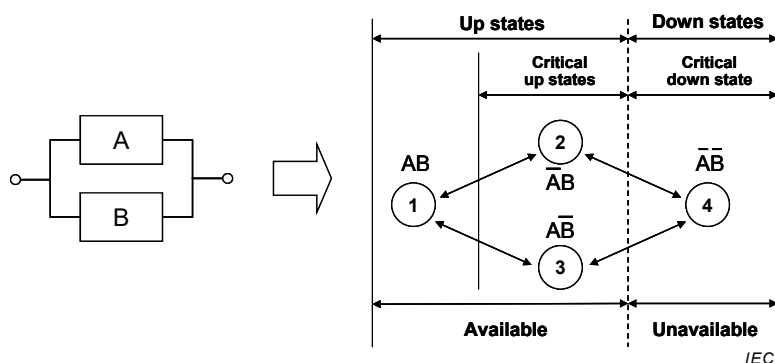
Figure 13 – Temps de fonctionnement équivalent pour les EFI

6 Modèles et expressions mathématiques

6.1 Systèmes

6.1.1 Généralités

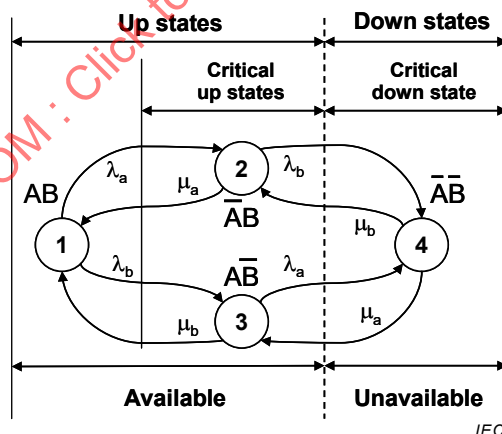
Le graphe d'état représenté à la Figure 14 est utilisé pour expliquer les différents termes. Il modélise un système composé de deux composants réparables redondants A et B. Il comprend seulement 4 états: 3 états de disponibilité, dont 2 sont critiques, et un seul état critique d'indisponibilité. Ce système simple suffit pour représenter les concepts de disponibilité/indisponibilité, fiabilité/défiabilité, taux de défaillance, densité de défaillance et intensités conditionnelle et inconditionnelle de défaillance.



Anglais	Français
Up states	États de disponibilité
Down states	États d'indisponibilité
Critical up states	États critiques de disponibilité
Available	Disponible
Critical down state	État critique d'indisponibilité
Unavailable	Indisponible

Figure 14 – Graphe états-transitions pour un système redondant simple

Dans ce graphe états-transitions, aucune hypothèse n'est formulée sur les règles de transition permettant au système de passer d'un état i à un autre état j à l'instant t . Dans le cas général, cela dépend à la fois des états i et j , mais aussi du temps passé dans l'état i avant l'apparition de la transition et de la façon dont l'état i a été atteint précédemment. Par conséquent, sauf dans des cas particuliers, il n'existe généralement aucune expression analytique simple et la simulation de Monte Carlo doit être mise en œuvre.



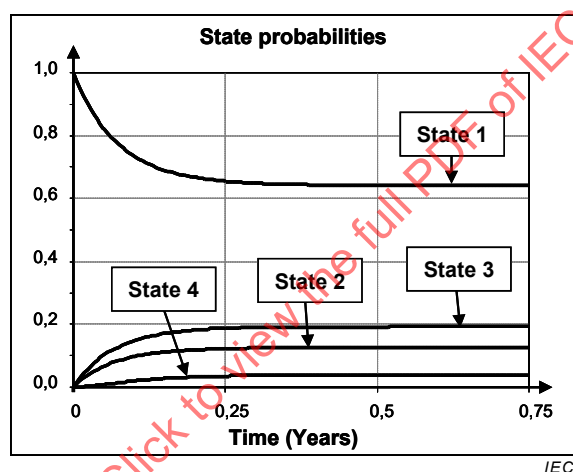
Anglais	Français
Up states	États de disponibilité
Critical up states	États critiques de disponibilité
Available	Disponible
Down states	États d'indisponibilité
Critical down state	État critique d'indisponibilité
Unavailable	Indisponible

Figure 15 – Graphe de Markov pour un système redondant simple

Heureusement, les taux de défaillance et de réparation des composants peuvent souvent être considérés comme raisonnablement constants et le graphe états-transitions devient un graphe de Markov [27] permettant des calculs analytiques. Dans ce cas, les règles de transition d'un état i à un autre état j sont décrites par les taux de transition constants qui dépendent uniquement des états i et j . Ainsi, lorsque les composants A et B de l'exemple ci-dessus présentent des taux de défaillance (λ_a , λ_b) et de réparation (μ_a , μ_b) constants, la Figure 14 peut être tracée en tant que graphe de Markov comme celui représenté à la Figure 15.

Ce graphe de Markov sert à établir les expressions mathématiques valides lorsque l'hypothèse de Markov est vérifiée. Des algorithmes sont disponibles pour calculer les probabilités des différents états. La Figure 16 présente l'évolution typique des probabilités des états lorsque le temps s'écoule. Ces courbes ont été tracées à l'aide des paramètres suivants: $\lambda_a = 2 \text{ année}^{-1}$, $\lambda_b = 3 \text{ année}^{-1}$ et $\mu_a = \mu_b = 10 \text{ année}^{-1}$.

Des taux de défaillance élevés ainsi que des taux de réparation relativement faibles ont été choisis: cela entraîne une disponibilité assez basse, mais permet de visualiser clairement la période transitoire avant que les valeurs asymptotiques ne soient atteintes.



Anglais	Français
State probabilities	Probabilités des états
State 1	État 1
State 2	État 2
State 3	État 3
State 4	État 4
Time (Years)	Temps (Années)

Figure 16 – Évolution des probabilités des états associées au graphe de Markov de la Figure 15

6.1.2 Expressions relatives à la disponibilité

6.1.2.1 Disponibilité instantanée [192-08-01] et indisponibilité instantanée [192-08-04]

Selon sa définition, la disponibilité instantanée, $A(t)$, est la probabilité pour qu'une entité soit en état de fonctionner comme requis à un instant donné t .

Selon sa définition [192-02-01], un état de disponibilité est caractérisé par l'aptitude à fonctionner comme requis.

Par conséquent, la disponibilité instantanée $A(t)$ est la probabilité d'être en état de disponibilité à un instant donné t :

$$A(t) = P(\text{état de disponibilité à l'instant } t)$$

De la même façon, l'indisponibilité instantanée $U(t)$ est la probabilité pour qu'une entité soit en état d'indisponibilité à un instant donné t :

$$U(t) = P(\text{état d'indisponibilité à l'instant } t)$$

et

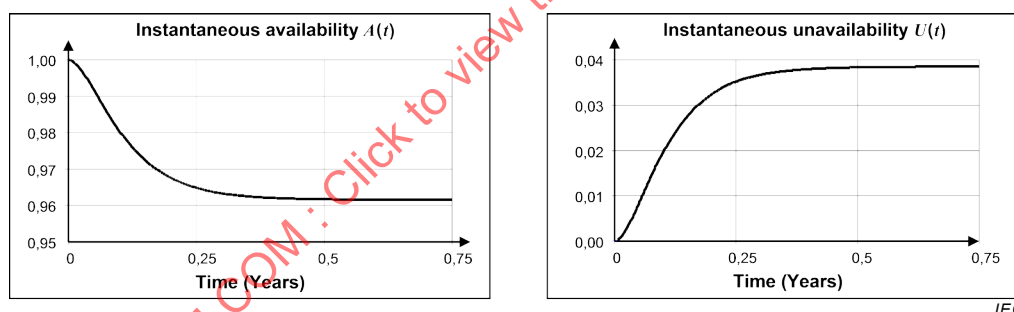
$$A(t) = 1 - U(t)$$

En ce qui concerne le graphe états-transitions (Figure 14) ou le graphe de Markov (Figure 15), la disponibilité instantanée et l'indisponibilité instantanée de l'entité modélisée sont les suivantes:

$$A(t) = P_1(t) + P_2(t) + P_3(t)$$

$$U(t) = P_4(t)$$

L'évolution de $A(t)$ et $U(t)$ est représentée à la Figure 17. Les courbes de cette Figure ont été tracées à l'aide des valeurs des probabilités des états présentées dans la Figure 16.



IEC

Anglais	Français
Instantaneous availability $A(t)$	Disponibilité instantanée $A(t)$
Instantaneous unavailability $U(t)$	Indisponibilité instantanée $U(t)$
Time (Years)	Temps (Années)

Figure 17 – Évolution de $A(t)$ et $U(t)$ associées au graphe de Markov de la Figure 15

NOTE Le graphe de Markov de la Figure 15 permet de calculer la disponibilité du système. Ce graphe de Markov est appelé «graphe de Markov de disponibilité» pour souligner cette propriété.

6.1.2.2 Disponibilité en régime établi [192-08-07] et indisponibilité en régime établi [192-08-08]

La disponibilité en régime établi A est la limite, si elle existe, de la disponibilité instantanée:

$$A = \lim_{t \rightarrow \infty} A(t)$$

De la même façon, l'indisponibilité en régime établi est donnée par:

$$U = \lim_{t \rightarrow \infty} U(t)$$

Les valeurs en régime établi existent dans le cas markovien, car les probabilités $P_i(t)$ des états atteignent des valeurs asymptotiques P_i (voir par exemple la Figure 16). Lorsqu'un régime établi est atteint (voir NOTE), les probabilités asymptotiques représentent également la proportion de la durée passée dans les états correspondants. Cela permet également de calculer la disponibilité ou l'indisponibilité moyenne (voir Figure 17).

NOTE Le régime établi ne caractérise pas un état de l'entité elle-même, mais un état du processus stochastique sous-jacent devenant stationnaire. Un tel régime établi existe si, lorsque la durée augmente, un équilibre statistique est atteint où la probabilité que l'entité passe dans un état donné devient égale à la probabilité que l'entité sorte de cet état. Dans ce cas, la probabilité qu'elle soit dans un état donné atteint une valeur de régime établi (c'est-à-dire une valeur asymptotique) qui caractérise le fait que le régime établi est atteint. Par extension, le terme «régime établi d'une entité» est utilisé pour décrire le régime établi de son processus stochastique sous-jacent modélisant la façon dont elle passe d'un état à un autre. Voir la référence [27] pour plus de détails concernant le régime établi des processus de Markov.

6.1.2.3 Disponibilité moyenne [192-08-05] et indisponibilité moyenne [192-08-06]

6.1.2.3.1 Formules générales pour la disponibilité et l'indisponibilité moyennes

La disponibilité moyenne $\bar{A}(t_1, t_2)$ sur un intervalle $[t_1, t_2]$ est calculée simplement par l'intégration de la disponibilité instantanée $A(t)$ divisée par l'intervalle de temps:

$$\bar{A}(t_1, t_2) = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} A(t) dt$$

Elle peut également être calculée par la somme des durées cumulées de séjour moyennes $Ast_i(t_1, t_2)$ passées dans les états i de disponibilité pendant l'intervalle de temps $[t_1, t_2]$:

$$Ast_i(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} P_i(t) dt$$

Par conséquent, la disponibilité moyenne est obtenue par la formule suivante:

$$\bar{A}(t_1, t_2) = \frac{\sum_{i \in \text{états de disponibilité}} Ast_i(t_1, t_2)}{t_2 - t_1}$$

De la même façon, l'indisponibilité moyenne $\bar{U}(t_1, t_2)$ est définie comme suit:

$$\bar{U}(t_1, t_2) = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} U(t) dt = \frac{\sum_{j \in \text{états d'indisponibilité}} Ast_j(t_1, t_2)}{t_2 - t_1}$$

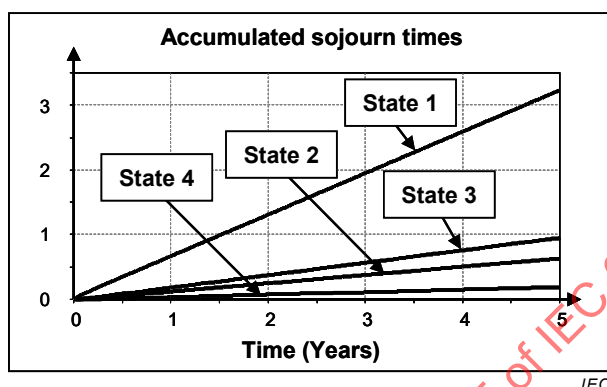
NOTE L'indisponibilité moyenne est appelée PFDavg (probabilité moyenne de défaillance à la sollicitation) lorsqu'elle est utilisée dans le cadre de la sécurité fonctionnelle des systèmes instrumentés de sécurité (par exemple, IEC 61508 [21] ou IEC 61511 [22]).

En ce qui concerne le graphe états-transitions (voir Figure 14) ou le graphe de Markov (voir Figure 15), la disponibilité moyenne et l'indisponibilité moyenne de l'entité modélisée sont définies comme suit:

$$\bar{A}(t_1, t_2) = \frac{Ast_1(t_1, t_2) + Ast_2(t_1, t_2) + Ast_3(t_1, t_2)}{t_2 - t_1}$$

$$\bar{U}(t_1, t_2) = \frac{Ast_4(t_1, t_2)}{t_2 - t_1}$$

Des algorithmes sont disponibles pour calculer les durées cumulées de séjour moyennes dans les états d'un modèle markovien. Cela est représenté à la Figure 18.



Anglais	Français
Accumulated sojourn times	Durées cumulées de séjour
State 1	État 1
State 2	État 2
State 3	État 3
State 4	État 4
Time (Years)	Temps (Années)

Figure 18 – Évolution de $Ast_i(0, t)$ associée au graphe de Markov de la Figure 15

La durée moyenne cumulée passée dans les différents états peut être obtenue en collectant le retour d'expérience sur les sites où l'entité est utilisée. Par conséquent, la disponibilité ou l'indisponibilité moyenne peut être estimée de façon statistique. Ceci permet d'établir le lien entre les calculs mathématiques et les données (retour d'expérience) réellement observées.

6.1.2.3.2 Disponibilité moyenne asymptotique et indisponibilité moyenne asymptotique

Lorsqu'un régime établi existe, $A(t)$ a une valeur asymptotique A et l'indisponibilité $U(t)$ une valeur asymptotique U . Il résulte de calculs élémentaires (voir NOTE ci-après et la référence [7] pour plus de détails) que, dans ce cas, ces valeurs asymptotiques sont également les valeurs moyennes sur l'intervalle de temps $[t_1, t_2]$ lorsque $t_2 \rightarrow \infty$. Par conséquent, la disponibilité moyenne asymptotique est donnée par:

$$\stackrel{\text{def.}}{A} = \lim_{t_2 \rightarrow \infty} \bar{A}(t_1, t_2) = \lim_{t_2 \rightarrow \infty} \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} A(t) dt = A$$

Dans la mesure où $t_2 > t_1$, la formule ci-dessus est également valide pour un intervalle de temps $[t_1, t_2]$ lorsque $t_1 \rightarrow \infty$ car, dans ce cas, $t_2 \rightarrow \infty$ également. Par conséquent, elle est valide pour un intervalle de temps $[t_1, t_2 \rightarrow \infty]$ lorsque le régime établi est établi à l'instant t_2 (par exemple un grand intervalle de temps $[0, t_2 \rightarrow \infty]$) et également pour un intervalle de temps

$[t_1 \rightarrow \infty, t_2]$ lorsque le régime établi est établi à l'instant t_1 (par exemple un petit intervalle de temps $[t_1 \rightarrow \infty, t_1 + x]$).

La disponibilité moyenne pour ces intervalles est donnée par:

$$\lim_{t_1 \rightarrow \infty} \bar{A}(t_1, t_2) = \lim_{t_2 \rightarrow \infty} \bar{A}(t_1, t_2) = \bar{A} = A$$

Et, de la même façon: $\lim_{t_1 \rightarrow \infty} \bar{U}(t_1, t_2) = \lim_{t_2 \rightarrow \infty} \bar{U}(t_1, t_2) = \bar{U} = U$

NOTE En termes mathématiques, la valeur asymptotique A et le régime établi sont atteints lorsque $t \rightarrow \infty$, mais en termes numériques, dans de nombreux cas pratiques industriels, $A(t)$ tend vers A (avec une précision suffisante) plutôt rapidement. Par exemple, pour les modèles de Markov dont tous les composants ont une MTTR bien plus petite que la MTTF, la valeur asymptotique et le régime établi sont atteints après une durée égale à deux ou trois fois la MTTR la plus élevée des composants du système.

En ce qui concerne le graphe états-transitions (Figure 14) ou le graphe de Markov (Figure 15) et si un régime établi existe, la disponibilité en régime établi et l'indisponibilité instantanée de l'entité modélisée sont les suivantes:

$$A = P_1 + P_2 + P_3$$

$$U = P_4$$

Ces valeurs asymptotiques sont représentées à la Figure 17.

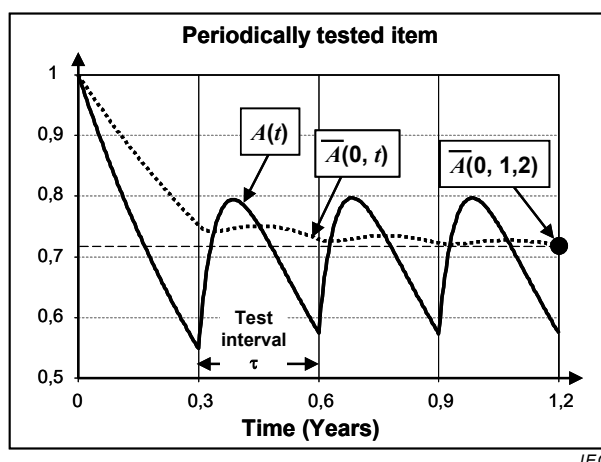
À ce stade, il est possible d'établir le lien entre les valeurs asymptotiques, le temps moyen de disponibilité (TMD) et le temps moyen d'indisponibilité (TMI). Lorsqu'un régime établi existe, la disponibilité asymptotique et la disponibilité moyenne asymptotique sont données par (voir références [9] et [10]):

$$\bar{A} = A = \frac{\text{TMD}}{\text{TMD} + \text{TMI}}$$

De la même façon, l'indisponibilité asymptotique et l'indisponibilité moyenne asymptotique sont données par:

$$\bar{U} = U = \frac{\text{TMI}}{\text{TMD} + \text{TMI}}$$

Les formules ci-dessus ont été établies en partant de l'hypothèse que $A(t)$ ou $U(t)$ atteignent des valeurs asymptotiques. Elles peuvent être utilisées pour estimer A et U à partir des données collectées par retour d'expérience sur site et relatives aux temps de disponibilité et d'indisponibilité. Dans certains cas, elles sont toujours valides pour $\bar{A}$ et $\bar{U}$ même si A et U n'existent pas. C'est le cas, par exemple, des systèmes qui mettent en œuvre des composants soumis à tests périodiques, où $A(t)$ et $U(t)$ n'ont pas de valeurs asymptotiques, mais où $\bar{A} = \lim_{t_2 \rightarrow \infty} \bar{A}(t_1, t_2)$ et $\bar{U} = \lim_{t_2 \rightarrow \infty} \bar{U}(t_1, t_2)$ peuvent exister.



Anglais	Français
Periodically tested item	Entité soumise à des tests périodiques
Test interval	Intervalle entre tests
Time (Years)	Temps (Années)

Figure 19 – Disponibilité instantanée et disponibilité moyenne d'une entité soumise à des tests périodiques

La Figure 19 représente l'évolution d'une entité normalement dormante soumise à des tests périodiques avec un taux de défaillance de 2 année⁻¹, un taux de réparation de 20 année⁻¹ (MTTR = 438 h) et un intervalle entre tests τ de 0,3 année (4 mois). La disponibilité instantanée $A(t)$ diminue au cours du premier intervalle entre tests. Si une défaillance se produit au cours du premier intervalle entre tests, sa réparation commence au début du deuxième intervalle entre tests. À partir de là, les cas où l'entité se trouvait en état de disponibilité au début du deuxième intervalle entre tests (et pouvait passer en état d'indisponibilité) entrent en concurrence avec les cas où le système est en cours de réparation au début du deuxième intervalle entre tests (et peut passer en état de disponibilité). Par conséquent, $A(t)$ augmente jusqu'à ce qu'une durée soit à peu près égale à la MTTR, puis diminue jusqu'au prochain test. Cela produit la courbe typique en dents de scie qui caractérise la disponibilité instantanée de telles entités soumises à des tests périodiques. La disponibilité instantanée $A(t)$ ne présente aucune valeur asymptotique, mais après quelques intervalles entre tests, la courbe de $A(t)$ atteint une limite (par exemple, elle devient identique d'un intervalle au suivant) et conserve la forme correspondante pendant les intervalles entre tests suivants. Bien que la disponibilité $A(t)$ ne présente pas de valeur asymptotique, la disponibilité moyenne $\bar{A}(0, t)$ converge quant à elle vers une valeur asymptotique (voir la courbe en pointillés de la Figure 19) qui est égale à la disponibilité moyenne au cours d'un intervalle entre tests situé à l'infini:

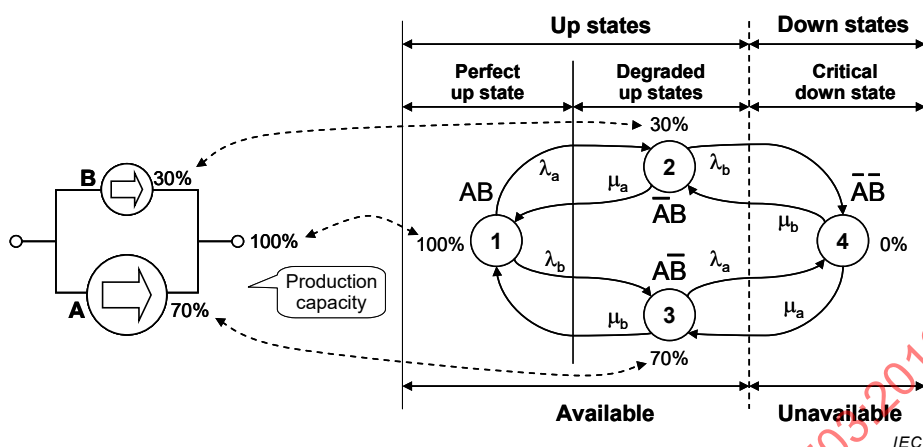
$$\bar{A} = \bar{A}(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} \bar{A}(0, t) = \lim_{i \rightarrow \infty} \bar{A}(i\tau, [i+1] \cdot \tau) = \frac{\text{TMD}}{\text{TMD} + \text{TMI}}$$

Dans la mesure où la maintenance préventive n'est pas prise en compte dans le présent document, le TMI peut être remplacé par la MTTR (voir Figure 2) dans les formules ci-dessus.

6.1.2.4 Extension du concept de disponibilité aux entités à plusieurs états

Comme spécifié précédemment, le concept de disponibilité est lié aux états de disponibilité de l'entité considérée. Aucune distinction n'est faite entre les états considérés comme des états de disponibilité. L'entité dans tous ses états de disponibilité est censée offrir le même service à l'utilisateur. Tandis que cette hypothèse peut être pertinente pour les entités individuelles, elle peut être remise en cause lorsque des systèmes sont concernés. C'est en

particulier le cas des systèmes de production utilisés par l'industrie pour produire des produits tels que pétrole, gaz, électricité, eau, etc.



Anglais	Français
Production capacity	Capacité de production
Up states	États de disponibilité
Perfect up state	État parfait de disponibilité
Degraded up states	États dégradés de disponibilité
Available	Disponible
Down states	États d'indisponibilité
Critical down state	État critique d'indisponibilité
Unavailable	Indisponible

Figure 20 – Exemple d'un système de production simple

La partie gauche de la Figure 20 représente un système de production simple composé de 2 unités de production A et B. La production nominale par unité de temps du système est ρ (par exemple 5 m³ d'eau par heure, 1 500 miches de pain par heure, ...). L'unité A possède une capacité de production K_A égale à 70 %, tandis que l'unité B possède une capacité de production K_B égale à 30 %. Par conséquent, le système de production dans son ensemble possède une capacité de production K_S égale à $(70 \% + 30 \%) = 100 \%$.

NOTE Une entité de production A ayant une capacité de production de K_A fournit une production de $K_A \cdot \rho$ par unité de temps.

Le graphe de Markov modélisant ce système est identique à celui représenté à la Figure 15. La différence est que le niveau de service fourni est propre à chaque état de disponibilité:

- dans l'état 1, la production par unité de temps du système est de $1 \cdot \rho = \rho$
- dans l'état 2, la production par unité de temps du système est de $0,7 \cdot \rho$
- dans l'état 3, la production par unité de temps du système est de $0,3 \cdot \rho$

L'état d'indisponibilité 4 se caractérise par une production par unité de temps de $0 \cdot \rho = 0$.

Du point de vue de la production, il est impossible de scinder simplement les états entre états de disponibilité et états d'indisponibilité et il est nécessaire d'affiner la classification. Un tel système est appelé système multiétat (voir [28]), car ces états doivent être scindés en plus de deux classes. La mesure d'intérêt d'un tel système n'est pas sa disponibilité ni même sa fiabilité, mais l'espérance mathématique de la valeur moyenne de sa production sur un intervalle de temps donné.

Selon les hypothèses formulées ci-dessus, la capacité instantanée de production $K(t)$ du système à l'instant t est égale à:

$$K(t) = 100\% \cdot P_1(t) + 30\% \cdot P_2(t) + 70\% \cdot P_3(t) + 0\% \cdot P_4(t)$$

Cette formule peut facilement être généralisée aux systèmes présentant n états:

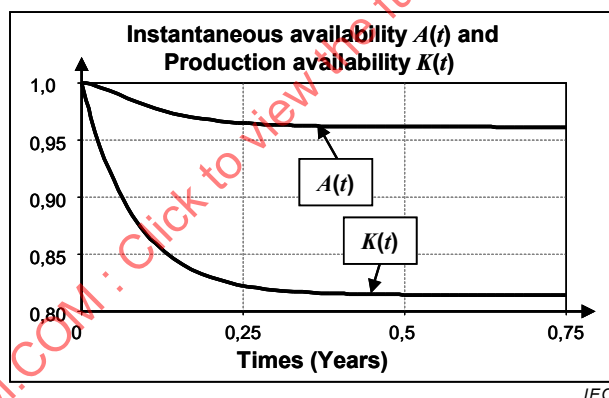
$$K(t) = \sum_{i=1}^n K_i \cdot P_i(t)$$

À partir de la capacité de production, l'espérance mathématique de la production instantanée $Prod(t)$ est donnée par:

$$Prod(t) = K(t) \cdot \rho$$

Un cas particulier de $K(t)$ est la disponibilité instantanée [192-08-01] conventionnelle, pour laquelle $K_i = 100\%$ pour tous les états de disponibilité et $K_i = 0\%$ pour tous les états d'indisponibilité. Il en est de même pour $Prod(t)$ lorsque, en outre, ρ est égal à 1. Dans ces cas, $A(t) \equiv K(t) \equiv Prod(t)$.

La Figure 21 représente l'évolution de la disponibilité instantanée $A(t)$ et de la capacité de production $K(t)$ à l'instant t en fonction des hypothèses formulées ci-dessus.



Anglais	Français
Instantaneous availability $A(t)$ and Production availability $K(t)$	Disponibilité instantanée $A(t)$ et Disponibilité de production $K(t)$
Times (Years)	Temps (Années)

Figure 21 – Évolution de $A(t)$ et $K(t)$

L'espérance mathématique de la production $Prod(t_1, t_2)$ du système sur un intervalle $[t_1, t_2]$ peut être calculée au moyen des durées cumulées de séjour moyennes passées dans les différents états:

$$Prod(t_1, t_2) = [100\% \cdot Ast_1(t_1, t_2) + 30\% \cdot Ast_2(t_1, t_2) + 70\% \cdot Ast_3(t_1, t_2) + 0\% \cdot Ast_4(t_1, t_2)] \cdot \rho$$

Et par conséquent, l'espérance mathématique de la production moyenne est obtenue comme suit:

$$\overline{Prod}(t_1, t_2) = \frac{Prod(t_1, t_2)}{(t_2 - t_1) \cdot \rho}$$

où $(t_2 - t_1) \cdot \rho$ est la production maximale possible sur $[t_1, t_2]$.

Enfin, l'espérance mathématique de la production moyenne sur $[t_1, t_2]$ est obtenue comme suit:

$$\overline{Prod}(t_1, t_2) = \frac{100\% \cdot Ast_1(t_1, t_2) + 30\% \cdot Ast_2(t_1, t_2) + 70\% \cdot Ast_3(t_1, t_2) + 0\% \cdot Ast_4(t_1, t_2)}{t_2 - t_1}$$

Cette formule peut être généralisée aux systèmes présentant n états:

$$\overline{Prod}(t_1, t_2) = \frac{\sum_{i=1}^n K_i \cdot Ast_i(t_1, t_2)}{t_2 - t_1}$$

où K_i représente la capacité de production de l'état i .

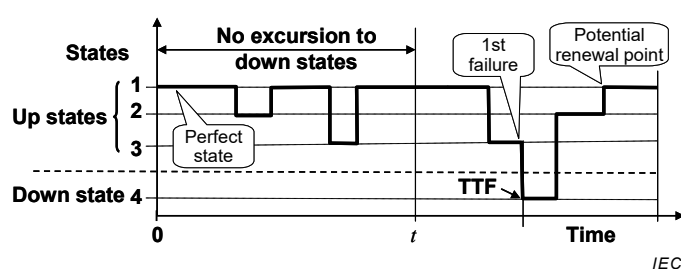
Bien entendu, lorsqu'un régime établi existe, l'espérance mathématique de la production moyenne tend vers une valeur asymptotique égale à la valeur asymptotique de la capacité instantanée de production $K(\infty)$. Cela est représenté à la Figure 21.

Une telle mesure est une extension de la disponibilité moyenne aussi l'espérance mathématique de la production moyenne est-elle souvent appelée «disponibilité de production» du système. De façon plus générale, elle est aussi appelée «efficacité» de l'entité. Elle est utile chaque fois que le service fourni par un état du système est proportionnel au temps passé dans cet état.

6.1.3 Expressions relatives à la fiabilité

6.1.3.1 Fiabilité [192-05-05] et défiabilité

Selon sa définition [192-05-05], Note 3, la fiabilité $R(t)$ est la probabilité de fonctionner comme requis pendant l'intervalle de temps $[0, t]$ dans des conditions données. La Figure 22 représente un comportement fiable pendant l'intervalle $[0, t]$ du système modélisé par le graphe états-transitions proposé dans la Figure 14. Il se trouvait dans l'état de disponibilité parfait 1 (c'est-à-dire, aussi bon que neuf) à l'instant $t = 0$ et est resté dans les états de disponibilité 1, 2 et 3 pendant tout l'intervalle $[0, t]$.



Anglais	Français
States	États
Up states {1, 2, 3}	États de disponibilité {1, 2, 3}
Down state 4	État d'indisponibilité 4
No excursion to down states	Pas de passage dans les états d'indisponibilité
Perfect state	État parfait
1 st failure	1 ^{re} défaillance
Potential renewal point	Point de renouvellement potentiel
TTF	TTF
Time	Temps

Figure 22 – Représentation, pour un système, d'un comportement fiable sur l'intervalle [0, t]

Il s'agit d'un exemple typique où le taux de défaillance du système $\lambda(t)$ [192-05-06] n'est pas constant en ce qu'il peut changer au moins en fonction de l'état de disponibilité étudié.

La fiabilité a un lien direct avec le taux de défaillance $\lambda(t)$ et la densité de défaillance $f(t)$ par les formules suivantes (voir 6.1.5.1 NOTE 1):

$$R(t) = \exp\left[-\int_0^t \lambda(\tau) d\tau\right] = \int_t^\infty f(\tau) d\tau$$

Si des données observées de défaillance sont disponibles pour n entités appartenant à une population homogène, la valeur estimée de $R(t)$ peut être calculée par

$$\hat{R}(t) = \frac{n_S(t)}{n}$$

où $n_S(t)$ est le nombre d'entités qui n'ont subi aucune défaillance sur l'intervalle $[0, t]$ et $n = n_S(0)$.

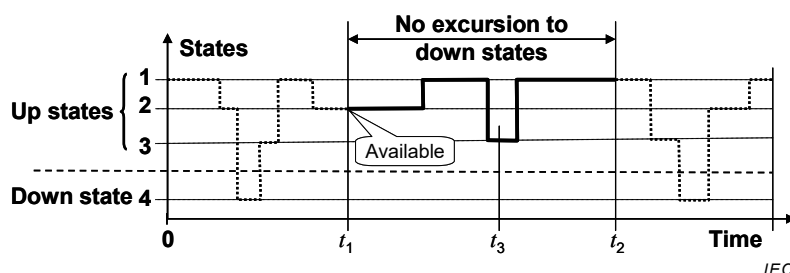
NOTE Si le système est aussi bon que neuf après avoir été rétabli à l'état parfait, tout instant de rétablissement vers l'état parfait peut alors être utilisé en tant qu'instant initial 0 (point de renouvellement, voir Figure 22).

Selon sa définition [192-05-05], la fiabilité $R(t_1, t_2)$ est la probabilité de fonctionner comme requis pendant l'intervalle de temps $[t_1, t_2]$ dans des conditions données. Par conséquent, la fiabilité d'un système est la probabilité qu'il se trouve en état de disponibilité pendant tout l'intervalle $[t_1, t_2]$. Cela signifie que:

- le système est en état de disponibilité à l'instant t_1 , c'est-à-dire qu'il est disponible;
- le système ne passe jamais en état d'indisponibilité de t_1 à t_2 .

Cela est représenté à la Figure 23 à partir du graphe états-transitions représenté à la Figure 14. Ce qui s'est produit avant l'instant t_1 n'a pas d'importance, si ce n'est que le

système doit être disponible à l'instant t_1 . Ce qui se produit après l'instant t_2 n'a pas d'importance non plus.



Anglais	Français
Up states {1, 2, 3}	États de disponibilité {1, 2, 3}
Down state 4	État d'indisponibilité 4
States	États
No excursion to down states	Pas de passage dans les états d'indisponibilité
Available	Disponible
Time	Temps

Figure 23 – Représentation, pour un système, d'un comportement fiable sur l'intervalle $[t_1, t_2]$

À partir de l'instant t_1 (voir Figure 23), le système a atteint l'état 3 à l'instant t_3 selon la séquence 2→1→3. Toutefois, les graphes présentés à la Figure 14 ou à la Figure 15 codent toutes les séquences d'événements de l'état 2 à l'état 3. Par conséquent, ils codent deux types de séquences:

- a) séquences allant de 2 à 3 sans passer par l'état d'indisponibilité (par exemple 2→1→3);
- b) séquences allant de 2 à 3 en passant par l'état d'indisponibilité (par exemple 2→4→3).

Seules les séquences de type a) garantissent que le système reste en état de disponibilité sur l'ensemble de l'intervalle de temps. Par conséquent, les séquences de type b) ne participent pas à la fiabilité du système et doivent être exclues du calcul de la fiabilité. Cela peut être obtenu en empêchant le système de revenir aux états de disponibilité après être passé en état d'indisponibilité tel que cela a été effectué dans la Figure 24.

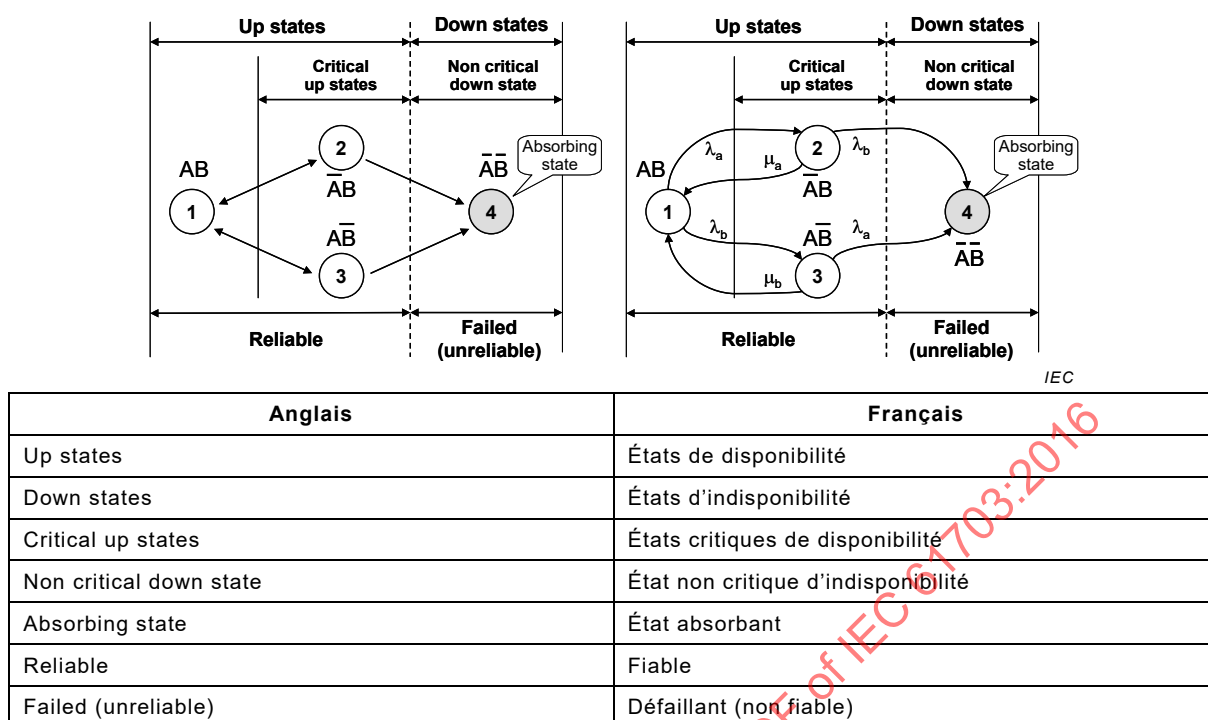


Figure 24 – Graphe états-transitions et graphe de Markov pour les calculs de fiabilité

NOTE Le graphe de Markov de la Figure 24 permet de calculer la fiabilité du système. Ce graphe de Markov est appelé «graphe de Markov de fiabilité» pour souligner cette propriété.

Dans la Figure 24, tout état de disponibilité peut être atteint uniquement à partir d'autres états de disponibilité. Lorsque le système atteint l'état d'indisponibilité, il y reste bloqué indéfiniment. C'est pourquoi il est appelé état «absorbant». À la fin, la probabilité devant se trouver dans cet état est de 1 et $\lim_{t_2 \rightarrow \infty} R(t_1, t_2) = 0$.

Lorsque le système est modélisé par un graphe de Markov, la fiabilité $R(t_1, t_2)$ de l'exemple peut être calculée en deux étapes:

- 1) calculs des probabilités $P_1^{(av)}(t_1)$, $P_2^{(av)}(t_1)$, $P_3^{(av)}(t_1)$ et $P_4^{(av)}(t_1)$ au moyen du graphe de Markov sans l'état absorbant (voir Figure 15);
- 2) calculs des probabilités $P_1^{(rel)}(\theta)$, $P_2^{(rel)}(\theta)$, $P_3^{(rel)}(\theta)$ et $P_4^{(rel)}(\theta)$ pour $\theta = t_2 - t_1$ au moyen du graphe de Markov avec l'état absorbant (partie gauche de la Figure 24) et des probabilités calculées à l'étape 1) en tant que conditions initiales.

Cela permet d'obtenir à la fois la fiabilité $R(t_1, t_2)$ et la défiabilité $F(t_1, t_2)$:

$$R(t_1, t_2) = P_1^{(rel)}(\theta) + P_2^{(rel)}(\theta) + P_3^{(rel)}(\theta)$$

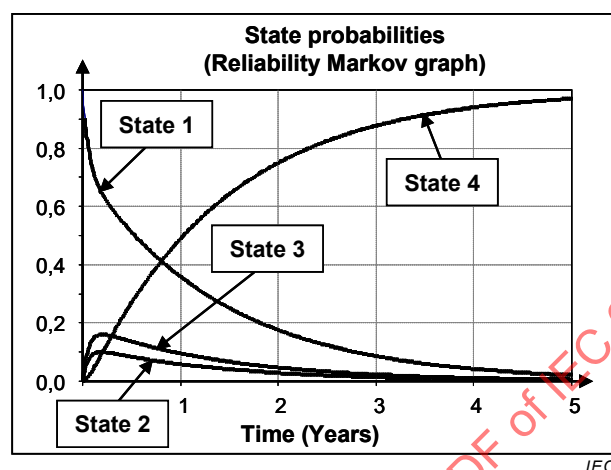
$$F(t_1, t_2) = P_4^{(rel)}(\theta)$$

où $\theta = t_2 - t_1$

Et par conséquent: $F(t_1, t_2) = 1 - R(t_1, t_2)$.

Lorsque t_1 est égal à 0 et que le calcul de la fiabilité/défiabilité est effectué sur l'intervalle $[0, t]$, l'étape 1) ci-dessus n'est pas nécessaire et les probabilités doivent être calculées au moyen des graphes avec les états absorbants (voir Figure 24).

La Figure 25 représente les probabilités des états du système modélisé par le graphe de Markov de fiabilité (c'est-à-dire un graphe de Markov avec un état absorbant) de la Figure 24. Comme dans le cas de la disponibilité, ces probabilités atteignent des valeurs asymptotiques, mais ces valeurs sont de 0 pour les 3 états de disponibilité et de 1 pour l'état d'indisponibilité.



Anglais	Français
State probabilities (Reliability Markov graph)	Probabilités des états (graphe de Markov de fiabilité)
State 1	État 1
State 2	État 2
State 3	État 3
State 4	État 4
Time (Years)	Temps (Années)

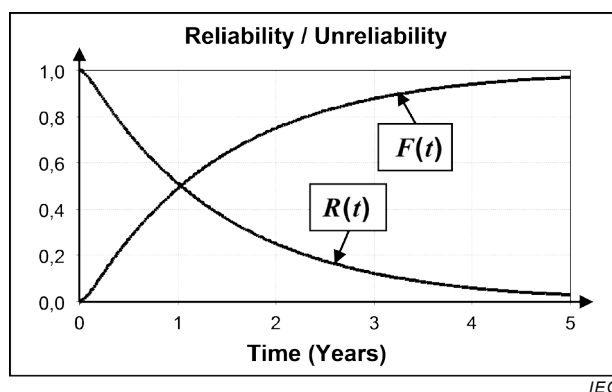
Figure 25 – Évolution des probabilités des états associées au graphe de Markov de la Figure 24

Les probabilités des états sont représentées à la Figure 25, ainsi:

$$R(t) = P_1(t) + P_2(t) + P_3(t)$$

$$F(t) = P_4(t)$$

En raison de l'état absorbant, l'évolution de la fiabilité et de la défiabilité sont telles que représentées à la Figure 26.



Anglais	Français
Reliability / Unreliability	Fiabilité / Défiabilité
Time (Years)	Temps (Années)

Figure 26 – Évolution de $R(t)$ et $F(t)$ associées au graphe de Markov de la Figure 24

Les formules relatives à la fiabilité/défiabilité sont similaires à celles utilisées pour les calculs de la disponibilité/indisponibilité. La différence observée entre les résultats s'explique uniquement par la présence ou l'absence de l'état absorbant:

- graphe sans état absorbant: calculs de la disponibilité/indisponibilité;
- graphes avec état absorbant: calcul de la fiabilité/défiabilité.

En observant les graphes de la Figure 24, il est possible de constater que les composants du système sont réparables à la seule condition que l'entité dans son ensemble ne soit pas passée en état d'indisponibilité. Par conséquent, les calculs de la fiabilité introduisent des dépendances systémiques entre les composants, ce qui rend ces calculs plus difficiles en comparaison avec les calculs de la disponibilité.

En raison de l'état absorbant, la fiabilité et la défiabilité atteignent les valeurs asymptotiques suivantes lorsque la durée augmente.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} R(t) = 0.$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} F(t) = 1.$$

Cela est représenté à la Figure 26.

6.1.3.2 Durée moyenne de fonctionnement avant la première défaillance – MTTF [192-05-12]

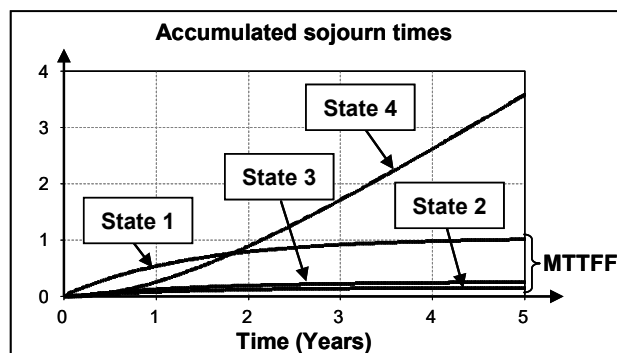
Selon la définition donnée dans l'IEC 60050-192, la MTTF est l'espérance mathématique du temps de fonctionnement avant la première défaillance. Elle est liée aux fonctions de densité de fiabilité et de défaillance par la formule suivante:

$$MTTF = \int_0^{\infty} t f(t) dt = \int_0^{\infty} R(t) dt$$

Dans le cas d'entités à fonctionnement continu (EFC), les états de disponibilité sont également des états de fonctionnement. La MTTF peut donc être calculée par la somme des durées cumulées de séjour moyennes dans les états de disponibilité d'un graphe de fiabilité:

$$MTTFF = \lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{i \in \text{états de disponibilité}} Ast_i(0, t)$$

La Figure 27 représente l'évolution des durées cumulées de séjour moyennes $Ast_i(t)$ sur l'intervalle $[0, t]$ dans le cas du graphe de Markov de fiabilité représenté à la Figure 24.



Anglais	Français
Accumulated sojourn times	Durées cumulées de séjour
State 1	État 1
State 2	État 2
State 3	État 3
State 4	État 4
MTTF	MTTF
Time (Years)	Temps (Années)

Figure 27 – Évolution des $Ast_i(0, t)$ associées au graphe de Markov de la Figure 24

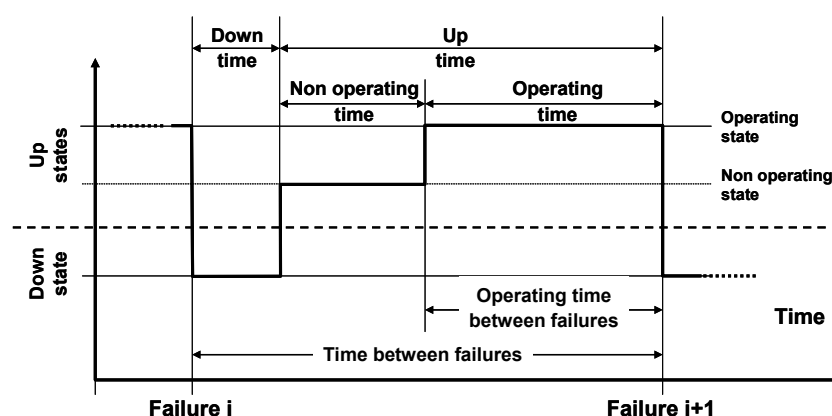
Lorsque la durée augmente, les durées cumulées de séjour moyennes passées dans les états de disponibilité (1, 2 et 3) tendent vers des valeurs asymptotiques, alors que la durée cumulée de séjour moyenne passée dans l'état d'indisponibilité (4) tend vers l'infini (c'est la caractéristique d'un état absorbant). Par conséquent, la MTTFF peut être calculée comme suit:

$$MTTFF = \lim_{t \rightarrow \infty} [Ast_1(0, t) + Ast_2(0, t) + Ast_3(0, t)]$$

Les durées cumulées de séjour moyennes passées dans les états de disponibilité augmentent jusqu'à atteindre des valeurs asymptotiques lorsque la probabilité pour qu'une entité soit en état d'indisponibilité est proche de 1. Par conséquent, la formule ci-dessus converge plus rapidement pour les entités non fiables que pour les entités fiables.

6.1.4 Moyenne des temps de bon fonctionnement [192-05-13] et temps moyen entre défaillances

L'IEC 60050-192 utilise l'acronyme MTBF ou MOTBF pour désigner la moyenne des temps de bon fonctionnement [192-05-13]. Il est donc incorrect d'utiliser l'acronyme MTBF pour désigner le temps moyen entre défaillances. Afin d'éviter toute confusion, le temps moyen entre défaillances est alors désigné par l'acronyme METBF dans la présente norme (voir définition 3.3).



IEC

Anglais	Français
Up states	États de disponibilité
Down state	État d'indisponibilité
Down time	Temps d'indisponibilité
Up time	Temps de disponibilité
Non operating time	Temps de non-fonctionnement
Operating time	Temps de fonctionnement
Operating time between failures	Temps de bon fonctionnement
Time between failures	Temps entre défaillances
Failure i	Défaillance i
Failure i + 1	Défaillance i + 1
Operating state	État de fonctionnement
Non operating state	État de non-fonctionnement
Time	Temps

Figure 28 – Comparaison entre le temps entre défaillances et le temps de bon fonctionnement

La Figure 28 représente la différence entre le temps (écoulé) entre défaillances et le temps de bon fonctionnement entre deux défaillances successives: le temps entre défaillances est la somme des temps de disponibilité et d'indisponibilité, alors que le temps de bon fonctionnement est seulement la partie du temps de disponibilité pendant laquelle l'entité est en état de fonctionnement.

Le temps moyen entre défaillances est donc obtenu par la formule suivante:

$$\text{METBF} = \text{TMD} + \text{TMI}$$

Si la maintenance préventive n'est pas prise en compte, comme c'est le cas dans le présent document, le TMD est égal à la MTTR (durée moyenne de panne), ce qui donne:

$$\text{METBF} = \text{TMD} + \text{MTTR}$$

Pour les EFC, le temps moyen de disponibilité est égal au temps moyen avant défaillance, ce qui donne:

$$\text{METBF} = \text{MTTF} + \text{MTTR}$$

6.1.5 Taux instantané de défaillance [192-05-06] et intensité conditionnelle de défaillance (taux de défaillance de Vesely)

6.1.5.1 Valeurs instantanées

Selon la définition 3.6, le taux instantané de défaillance est la limite, si elle existe, du quotient de la probabilité conditionnelle pour que la défaillance d'une entité se produise dans l'intervalle de temps $[t, t + \Delta t]$ par Δt , lorsque Δt tend vers zéro, en supposant qu'une défaillance ne se soit pas produite dans l'intervalle de temps $[0, t]$:

$$\lambda(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \frac{F(t + \Delta t) - F(t)}{R(t)} = \frac{f(t)}{R(t)}$$

L'IEC 60050-192 fournit une définition qui se limite aux entités non réparables. Toutefois, elle peut être généralisée, dans la mesure où une densité de défaillance $f(t)$ et une fiabilité $R(t)$ peuvent être définies pour n'importe quelle entité (entités individuelles ou systèmes, réparables ou non).

Selon la définition ci-dessus, le taux de défaillance $\lambda(t)$ est une probabilité conditionnelle par unité de temps:

$$\lambda(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0^+} \frac{P(\text{défaillance entre } t \text{ et } t + \Delta t \mid \text{aussi bonne que neuve à } t = 0 \text{ et état de disponibilité sur } [0, t])}{\Delta t}$$

NOTE 1 $\lim_{\Delta t \rightarrow 0^+} \lambda(t) \cdot \Delta t$ est la probabilité conditionnelle que le système subisse une défaillance à l'instant t en supposant qu'aucune défaillance ne s'est produite depuis $t = 0$. À l'aide de la notation différentielle, cette probabilité peut s'écrire $\lambda(t)dt$ et l'incrément $dF(t)$ de la probabilité d'une défaillance dans l'intervalle $[t, t+dt]$ est égal à $R(t) \cdot \lambda(t)dt$. Étant donné que $dF(t) = d[1 - R(t)] = -dR(t)$, $\lambda(t) = -dR(t)/R(t)$ et le taux de défaillance est aussi directement lié à la dérivée logarithmique de la fiabilité $R(t)$. L'intégration de cette dérivée conduit à l'équation

$$R(t) = \exp\left[-\int_0^t \lambda(\tau) d\tau\right] \text{ introduite en 6.1.3.1.}$$

La condition «état de disponibilité sur $[0, t]$ » (c'est-à-dire «aucune défaillance sur $[0, t]$ ») est très forte et introduit la même dépendance systémique que celle associée aux calculs de la fiabilité.

En observant l'exemple de la Figure 24 ci-dessus, il peut être constaté que:

- la condition «état de disponibilité sur $[0, t]$ » implique que le système
 - ne peut pas repasser des états d'indisponibilité aux états de disponibilité; cela est assuré par l'état absorbant;
 - est en état de disponibilité à l'instant t ; la probabilité de cet événement est la fiabilité $R(t) = P_1^{(rel)}(t) + P_2^{(rel)}(t) + P_3^{(rel)}(t)$;
- l'entité peut passer en état d'indisponibilité seulement à partir des états critiques 2 et 3;
- la probabilité de défaillance entre les instants t et $t + dt$ à partir de l'état 2 est $\lambda_b dt$ par défaillance du composant B;
- la probabilité de défaillance entre les instants t et $t + dt$ à partir de l'état 3 est $\lambda_a dt$ par défaillance du composant A.

Par conséquent, le résultat suivant est obtenu:

$$\lambda(t) = \frac{\lambda_b P_2^{(rel)}(t) + \lambda_a P_3^{(rel)}(t)}{R(t)} = \frac{\lambda_b P_2^{(rel)}(t) + \lambda_a P_3^{(rel)}(t)}{P_1^{(rel)}(t) + P_2^{(rel)}(t) + P_3^{(rel)}(t)}$$

Dans le cas général et lorsque l'entité présente un comportement markovien, son taux de défaillance peut être calculé à partir de ses états critiques de disponibilité et des taux constants de transition vers les états d'indisponibilité.

Le taux de défaillance est un paramètre très important en ce qu'il est directement lié à la fiabilité $R(t)$:

$$R(t) = e^{-\int_0^t \lambda(\tau) d\tau}$$

Si le même calcul est effectué à partir d'un graphe sans état absorbant (graphe de disponibilité) comme dans la Figure 14 ou la Figure 15, un autre paramètre important, qui n'a pas encore été défini dans l'IEC 60050-192, est obtenu: l'intensité conditionnelle de défaillance, aussi appelée taux de défaillance de Vesely $\lambda_V(t)$. De façon formelle, elle peut être définie comme suit:

$$\lambda_V(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0^+} \frac{P(\text{défaillance entre } t \text{ et } t + \Delta t \mid \text{aussi bonne que neuve à l'instant } 0 \text{ et en état de disponibilité à l'instant } t)}{\Delta t}$$

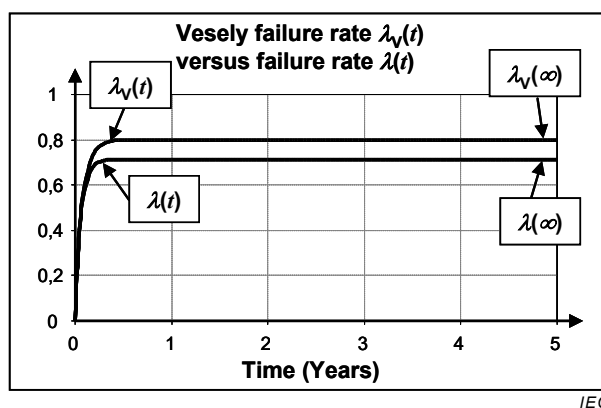
C'est également une probabilité conditionnelle par unité de temps, mais la condition est plus faible que pour le taux de défaillance réel, $\lambda(t)$: ce qui s'est produit pendant l'intervalle $[0, t]$ ne compte pas (c'est-à-dire, l'entité peut avoir été en état d'indisponibilité plusieurs fois avant l'instant t) et le graphe ne présente aucun état absorbant. La seule condition est que l'entité doit être disponible à l'instant t .

NOTE 2 $\lim_{\Delta t \rightarrow 0^+} \lambda_V(t) \cdot \Delta t$ est la probabilité conditionnelle que le système subisse une défaillance à l'instant t en supposant qu'il soit en état de disponibilité à l'instant t et était en état de disponibilité à l'instant $t = 0$.

Dans le cas représenté à la Figure 15, la formule suivante est obtenue:

$$\lambda_V(t) = \frac{\lambda_b P_2^{(av)}(t) + \lambda_a P_3^{(av)}(t)}{A(t)} = \frac{\lambda_b P_2^{(av)}(t) + \lambda_a P_3^{(av)}(t)}{P_1^{(av)}(t) + P_2^{(av)}(t) + P_3^{(av)}(t)}$$

La Figure 29 représente la différence entre le taux de défaillance $\lambda(t)$ obtenu à la Figure 15 et le taux de défaillance de Vesely $\lambda_V(t)$ obtenu à la Figure 24. Les deux paramètres se comportent de la même façon lorsque la durée augmente. Ils sont identiques pour les courtes durées et convergent vers différentes valeurs asymptotiques, $\lambda(\infty)$ et $\lambda_V(\infty)$, lorsque la durée devient plus importante.



Anglais	Français
Vesely failure rate $\lambda_V(t)$ versus failure rate $\lambda(t)$	Taux de défaillance de Vesely $\lambda_V(t)$ versus taux de défaillance $\lambda(t)$
Time (Years)	Temps (Années)

Figure 29 – Comparaison entre $\lambda(t)$ et $\lambda_V(t)$ associés au modèle de la Figure 24

6.1.5.2 Valeurs moyennes et valeurs (asymptotiques) en régime établi

Le taux moyen de défaillance est défini dans l'IEC 60050-192. Il doit être utilisé avec prudence, car il ne s'agit pas d'un taux de défaillance à proprement parler et la relation fondamentale $R(t) = \exp\left[-\int_0^t \lambda(\tau) d\tau\right]$ ne s'applique pas si $\lambda(\tau)$ est remplacé par un taux moyen de défaillance. Par conséquent, il ne peut pas être utilisé pour calculer la fiabilité de l'entité $R(t)$ sans précaution particulière.

Comme cela est représenté à la Figure 29, l'inégalité $\lambda_V(\infty) > \lambda(\infty) > \lambda(t) \forall t$ est vérifiée pour le système modélisé par le processus de Markov. De manière plus générale, l'inégalité $\lambda_V(\infty) \geq \lambda(\infty)$ s'applique aux systèmes constitués de composants indépendants réparables avec des taux constants de défaillance et de réparation.

En réalité, plus les rétablissements des composants ayant subi des défaillances sont effectués rapidement, plus le système est fiable/disponible, plus le régime établi est atteint rapidement ainsi donc que les valeurs asymptotiques et plus $\lambda(\infty)$ et $\lambda_V(\infty)$ sont proches. L'utilisation de $\lambda_V(\infty)$ permet d'obtenir une très bonne approximation de $R(t)$ après une durée égale à deux à trois fois la plus grande MTTR des composants du système. Ceci couvre une grande partie des études réalisées par les ingénieurs fiabilistes.

NOTE Les résultats ci-dessus ne s'appliquent pas aux systèmes ayant des composants ou des états non réparés.

Les conditions de calcul du taux de défaillance de Vesely sont plus faibles que pour le taux de défaillance (voir 6.1.5.1). Par conséquent, il est plus facile à calculer que le taux de défaillance. Pour les études sur les systèmes industriels réels comportant des composants réparables, le taux de défaillance peut souvent ne pas être calculé alors que le taux de défaillance de Vesely peut être obtenu plutôt facilement. Ainsi, le taux de défaillance de Vesely est souvent utilisé au lieu du taux de défaillance. Cette propriété est, par exemple, à la base des calculs de la fiabilité à partir des arbres de défaillances (voir l'IEC 61025 [24]) ou des diagrammes de fiabilité (voir l'IEC 61078 [25]) modélisant des composants réparables.

Lorsque les défaillances sont rapidement détectées et réparées (c'est-à-dire: taux de défaillance $\ll$ taux de réparation), $\lambda(\infty) \approx \lambda_V(\infty)$ peut être obtenu directement à partir du graphe de Markov à l'aide du principe suivant appliqué au petit exemple modélisé dans la Figure 15 (ou dans la Figure 24):

- identifier une séquence de l'état parfait 1 à l'état d'indisponibilité 4, par exemple 1→2→4;
- l'entité peut passer de 1 à 2 avec le taux de transition λ_a ;
- la durée passée dans l'état 2 est négligeable par rapport à la durée passée dans l'état 1. Par conséquent, lorsque l'entité atteint l'état 2, et selon les propriétés des taux de transition constants, elle le quitte presque immédiatement pour l'état 1 (probabilité $\frac{\mu_a}{\lambda_b + \mu_a}$) ou l'état 4 (probabilité $\frac{\lambda_b}{\lambda_b + \mu_a}$);
- le taux de transition de 1 à 4 par la séquence 1→2→4 est donc $\lambda_a \frac{\lambda_b}{\lambda_b + \mu_a}$;
- poursuivre avec les autres séquences (par exemple 1→3→4) jusqu'à ce que toutes les séquences aient été traitées;
- rassembler tous les résultats afin d'obtenir une bonne approximation de la valeur asymptotique de $\lambda(\infty) \approx \lambda_V(\infty)$.

Dans l'exemple, seulement deux séquences (1→2→4 et 1→3→4) doivent être prises en compte et, par ailleurs, les deux graphes de Markov donnent le même résultat:

$$\lambda(\infty) \approx \lambda_V(\infty) = \lambda_a \frac{\lambda_b}{\lambda_b + \mu_a} + \lambda_b \frac{\lambda_a}{\lambda_a + \mu_b}$$

Les valeurs asymptotiques ci-dessus permettent également d'obtenir le taux moyen de défaillance sur un intervalle de temps important.

6.1.6 Densité de défaillance et intensité inconditionnelle de défaillance [192-05-08]

La défiabilité $F(t)$ est la probabilité pour que le temps avant défaillance TTF soit inférieur ou égal à t . Par conséquent, il s'agit également de la fonction de répartition du temps avant défaillance ou, pour synthétiser, de la fonction de répartition de la défaillance. La dérivée de cette fonction est la densité de défaillance $f(t)$. Cela signifie que $f(t).dt$ est la probabilité pour que l'entité subisse une défaillance entre les instants t et $t+dt$ en supposant qu'elle était en état de disponibilité (et aussi bonne que neuve) à l'instant $t = 0$:

$$f(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0^+} \frac{P(t < \text{temps avant la première défaillance} \leq t + \Delta t \mid \text{aussi bonne que neuve à l'instant } t = 0)}{\Delta t}$$

Cette formule est semblable à la formule relative au taux de défaillance $\lambda(t)$, sauf en ce qui concerne la condition d'être en état de disponibilité sur l'intervalle $[0, t]$, qui est donnée par $R(t)$. Par conséquent, $\lambda(t) = f(t)/R(t)$, et:

$$f(t) = \lambda(t) \cdot R(t)$$

Dans le cadre de l'exemple simple, cela conduit au résultat suivant:

$$f(t) = \lambda_b P_2^{(rel)}(t) + \lambda_a P_3^{(rel)}(t)$$

Une autre façon d'établir cette formule consiste à se rendre compte que, en raison de l'état absorbant du graphe de Markov dans la Figure 24, la probabilité pour que la première défaillance se produise entre $t + dt$ est également la probabilité d'être dans un état critique à l'instant t , par exemple $P_2(t)$, et de passer en état d'indisponibilité entre les instants t et $t + dt$, par exemple $\lambda_b dt$. Dans le cadre de l'exemple simple, cela conduit au résultat suivant:

$$f(t) = \frac{P_2^{(rel)}(t)\lambda_b \cdot dt + P_3^{(rel)}(t)\lambda_a \cdot dt}{dt} = \lambda_b P_2^{(rel)}(t) + \lambda_a P_3^{(rel)}(t)$$

Si le même calcul est effectué à partir d'un graphe sans état absorbant (graphe de disponibilité) comme dans la Figure 14 ou la Figure 15, un autre paramètre important est obtenu, à savoir l'intensité inconditionnelle de défaillance $z(t)$. Il est défini de façon formelle de la façon suivante:

$$z(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0^+} \frac{P(\text{défaillance entre } t \text{ et } t + \Delta t \mid \text{aussi bonne que neuve à l'instant } t = 0)}{\Delta t}$$

De manière similaire à ci-dessus:

$$z(t) = \lambda_V(t) \cdot A(t)$$

Et, dans le cadre de cet exemple, cela conduit à la formule suivante:

$$z(t) = \lambda_b P_2^{(av)}(t) + \lambda_a P_3^{(av)}(t)$$

L'intensité inconditionnelle de défaillance est le même paramètre que l'intensité de défaillance [192-05-08], mais elle est définie de façon différente dans l'IEC 60050-192: limite, si elle existe, du quotient par Δt de l'espérance mathématique du nombre de défaillances d'une entité réparable pendant l'intervalle de temps $[t, t + \Delta t]$ lorsque Δt tend vers zéro:

$$z(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{E[N(t + \Delta t) - N(t)]}{\Delta t}$$

Dans cette formule, $N(t)$ représente le nombre de défaillances se produisant pendant l'intervalle $[0, t]$. Lorsque $\Delta t \rightarrow 0$, une entité physique ne peut pas subir plusieurs défaillances pendant l'intervalle $[t, t + \Delta t]$. Donc $[N(t + \Delta t) - N(t)]$ est égal à 1 si une nouvelle défaillance se produit pendant l'intervalle $[t, t + \Delta t]$ et égal à 0 dans le cas contraire. Finalement, lorsque $\Delta t \rightarrow 0$, $E[N(t + \Delta t) - N(t)]$ est égal à la probabilité pour qu'une défaillance se produise pendant l'intervalle $[t, t + \Delta t]$, et les deux formules sont équivalentes.

Selon sa définition, $z(t)$ est également la dérivée de l'espérance mathématique du nombre de défaillances $Z(t) = E[N(t)]$ sur l'intervalle $[0, t]$:

$$z(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0^+} \frac{Z(t + \Delta t) - Z(t)}{\Delta t} = \frac{dZ(t)}{dt} \text{ et } Z(t) = \int_0^t z(\tau) d\tau.$$

Lorsque $\Delta t \rightarrow 0$, $z(t) \cdot \Delta t$ est l'espérance mathématique du nombre de défaillances sur l'intervalle $[t, t + \Delta t]$. Donc $z(t) \cdot \Delta t / \Delta t = z(t)$ est aussi la fréquence instantanée de défaillance de l'entité à l'instant t . C'est la raison pour laquelle cette mesure caractéristique est souvent appelée «fréquence de défaillance».

La fréquence moyenne de défaillance sur l'intervalle $[0, t]$ peut être calculée par: $\frac{Z(t)}{t}$. Par conséquent, si un régime établi existe, $z(t)$ atteint une valeur asymptotique, ce qui donne (voir [7]):

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{Z(t)}{t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\int_0^t z(\tau) d\tau}{t} = z(\infty)$$

Si $\overline{Tbf}(t)$ est le temps moyen écoulé entre les défaillances successives se produisant sur un intervalle $[0, t]$, $t / \overline{Tbf}(t)$ est alors égal à l'espérance mathématique du nombre de défaillances sur $[0, t]$, $Z(t)$. Lorsque t tend vers l'infini, $\overline{Tbf}(\infty)$ est le METBF du système modélisé et lorsqu'il existe un régime établi, $z(t)$ atteint une valeur asymptotique $z(\infty)$, ce qui donne:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{Z(t)}{t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{\overline{Tbf}(t)} = \frac{1}{\text{METBF}} = z(\infty)$$

Par conséquent, $\text{METBF} = \frac{1}{z(\infty)}$.

Des informations plus détaillées peuvent être consultées à la référence [10].

Parmi les paramètres analysés ci-dessus (taux de défaillance, taux de défaillance de Vesely et densité de défaillance), seule la valeur moyenne de l'intensité inconditionnelle de défaillance [192-05-09] est véritablement utile:

$$\bar{z}(t_1, t_2) = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} z(t) dt$$

Cela permet de calculer le nombre de défaillances se produisant au cours d'un intervalle de temps donné:

$$E[N(t_1, t_2)] = \bar{z}(t_1, t_2) \cdot (t_2 - t_1)$$

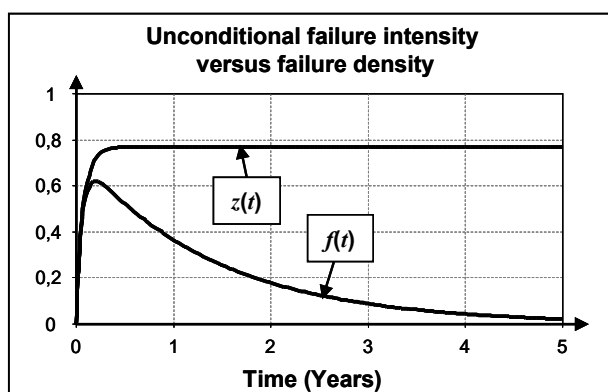
NOTE La fréquence moyenne de défaillance est appelée PFH (probabilité de défaillance par heure) lorsqu'elle est utilisée dans le cadre de la sécurité fonctionnelle des systèmes instrumentés de sécurité (par exemple, IEC 61508 [21] ou IEC 61511 [22]).

Lorsque les événements sont exponentiels (modèles markoviens) et lorsque les défaillances sont détectées et réparées rapidement, $A(t)$ et $\lambda_V(t)$ atteignent les valeurs asymptotiques (régime établi) A et $\lambda_V(\infty)$ après une durée égale à deux ou trois fois la plus grande MTTR des composants constituant le système concerné. Par conséquent, la fréquence de défaillance $z(t)$ atteint également une valeur asymptotique donnée par la formule suivante:

$$z(\infty) = A \cdot \lambda_V(\infty)$$

Lorsque le régime établi est atteint, les valeurs asymptotiques sont également les valeurs moyennes de ces paramètres.

La Figure 30 représente l'évolution de la densité de défaillance $f(t)$ de la Figure 24 et de l'intensité inconditionnelle de défaillance $z(t)$ de la Figure 15. Les comportements sont très différents: $z(t)$ augmente jusqu'à atteindre une valeur asymptotique, alors que $f(t)$ augmente d'abord, puis, après avoir atteint une valeur maximale, diminue vers zéro.



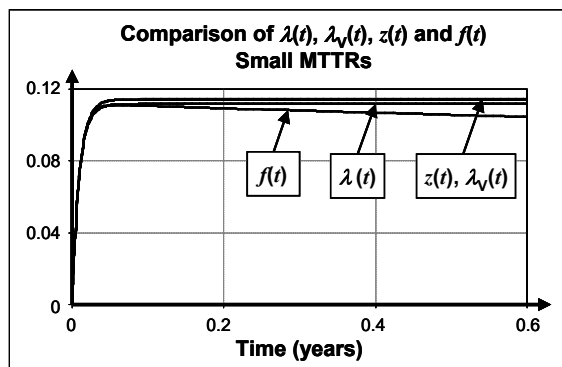
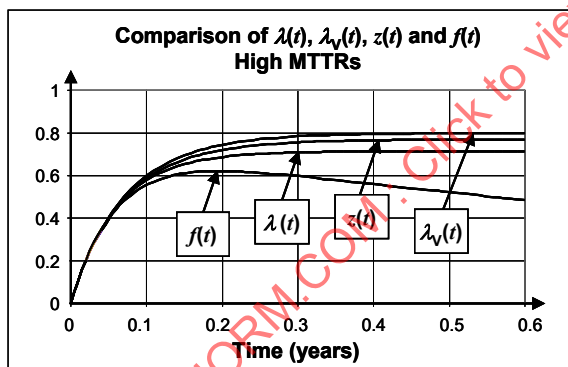
IEC

Anglais	Français
Unconditional failure intensity versus failure density	Intensité inconditionnelle de défaillance versus densité de défaillance
Time (Years)	Temps (Années)

Figure 30 – Comparaison entre $z(t)$ et $f(t)$

$z(t)$ et $f(t)$ représentent tous les deux la fréquence de défaillance du système, mais pour $f(t)$, le système ne peut subir qu'une seule défaillance: après que cette défaillance est survenue, plus aucune autre défaillance ne peut se produire. Par conséquent, lorsque $F(t)$ est proche de 1, la probabilité d'observer l'occurrence d'une défaillance est très faible et $f(t)$ tend vers 0.

6.1.7 Comparaison de $\lambda(t)$, $\lambda_V(t)$, $z(t)$ et $f(t)$ pour des MTTR de valeurs élevées et faibles



IEC

Anglais	Français
Comparison of $\lambda(t)$, $\lambda_V(t)$, $z(t)$ and $f(t)$ High MTTRs	Comparaison de $\lambda(t)$, $\lambda_V(t)$, $z(t)$ et $f(t)$ MTTR de valeurs élevées
Time (Years)	Temps (Années)
Comparison of $\lambda(t)$, $\lambda_V(t)$, $z(t)$ and $f(t)$ Small MTTRs	Comparaison de $\lambda(t)$, $\lambda_V(t)$, $z(t)$ et $f(t)$ MTTR de valeurs faibles

Figure 31 – Comparaison de $\lambda(t)$, $\lambda_V(t)$, $z(t)$ et $f(t)$ pour des valeurs élevées et faibles de MTTR

La partie gauche de la Figure 31 rassemble les résultats présentés à la Figure 29 et à la Figure 30. Sa partie droite présente les mêmes résultats lorsque les MTTR des composants A et B ont été divisés par 10. Dans les deux cas et à court terme, $\lambda(t)$, $\lambda_V(t)$, $z(t)$ et $f(t)$ ont des valeurs numériques proches les unes des autres. Par conséquent, lorsque la durée augmente, $\lambda(t)$, $\lambda_V(t)$, et $z(t)$ convergent vers des valeurs asymptotiques et $f(t)$ diminue pour atteindre 0. Ces résultats sont typiques des modèles de Markov.

La Figure 31 montre que, pour les modèles de Markov:

- Plus les défaillances sont rétablies rapidement, plus les valeurs asymptotiques $\lambda(\infty)$, $\lambda_V(\infty)$ et $z(\infty)$ sont atteintes rapidement et plus elles sont proches. Dans la partie droite, $z(t)$ et $\lambda_V(t)$ sont même fusionnés en raison d'une disponibilité très importante. Les valeurs asymptotiques sont atteintes après une durée égale à environ trois fois la plus grande MTTR, c'est-à-dire 0,3 année (3 x 876 h) pour la partie gauche et 0,03 année (3 x 87,6 h) pour la partie droite. Dans les cas réels, le rétablissement est souvent plus rapide que cela et les valeurs asymptotiques sont atteintes presque immédiatement.
- $\lambda_V(\infty)$ est une valeur conservative de $\lambda(\infty)$. Étant donné qu'il est plus facile de calculer $\lambda_V(\infty)$ que de calculer $\lambda(\infty)$, il est couramment utilisé au lieu de $\lambda(t)$ pour les calculs de la fiabilité.
- $z(\infty)$ est également une valeur conservative de $\lambda(\infty)$.
- En raison des similarités des valeurs numériques $\lambda(\infty)$, $\lambda_V(\infty)$ et $z(\infty)$ peuvent être facilement confondus.

Les résultats ci-dessus s'appliquent uniquement pour les modèles de sûreté de fonctionnement ayant des propriétés markoviennes sous-jacentes (par exemple formules simplifiées, diagrammes de fiabilité, arbres de défaillances, arbres d'événements et réseaux de Petri, lorsqu'ils mettent uniquement en œuvre des taux constants de défaillance et de réparation).

6.1.8 Expressions relatives au rétablissement

6.1.8.1 Taux de réparation [192-07-20] et durée moyenne de réparation [192-07-21]

Le taux de réparation $\mu(t)$ est la limite, si elle existe, du quotient de la probabilité conditionnelle d'achèvement de la réparation dans l'intervalle de temps $[t, t + \Delta t]$ par Δt , lorsque Δt tend vers zéro, en supposant que la réparation a commencé à l'instant $t = 0$ et ne s'est pas terminée avant le temps t .

La différence entre l'intensité de rétablissement et le taux de réparation est que, pour le taux de réparation, la réparation est censée avoir commencé à l'instant $t = 0$, alors que pour l'intensité de rétablissement la condition est que l'entité soit aussi bonne que neuve à l'instant $t = 0$.

La durée moyenne de réparation (MRT) est l'espérance mathématique du temps de réparation.

Ces définitions sont semblables (pour les réparations) aux définitions données (pour les défaillances) pour le taux de défaillance et la MTTF.

En observant la Figure 14 ou la Figure 15 et en considérant que le système se trouve dans l'état 4 à l'instant $t = 0$:

- le taux de réparation est la somme des taux de transition de 4 à 2 et de 4 à 3;
- la MRT est la durée moyenne passée dans l'état 4 chaque fois que l'entité passe en état d'indisponibilité.

Cela conduit à:

$$\mu = \mu_a + \mu_b$$

$$\text{MRT} = \frac{1}{\mu} = \frac{1}{\mu_a + \mu_b}$$

Si la Figure 4 est considérée maintenant, il peut être constaté que le système est composé de 3 états d'indisponibilité. Par conséquent, la condition «en supposant que la réparation a commencé à l'instant $t = 0$ » implique de définir 3 taux de réparation différents en fonction de la probabilité de se trouver dans les états 5, 6 et 7 à l'instant $t = 0$. Un système caractérisé par plusieurs états d'indisponibilité ne présente donc pas un seul taux de réparation. Ce concept est principalement pertinent pour les entités individuelles considérées dans leur ensemble.

6.1.8.2 Intensité de rétablissement et durée moyenne de panne [192-07-23]

L'intensité de rétablissement n'est pas définie dans l'IEC 60050-192 et a été introduite dans l'Article 3 de la présente norme: limite, si elle existe, du quotient du nombre moyen de rétablissements [192-06-23] d'une entité réparable [192-01-11] pendant l'intervalle de temps $[t, t + \Delta t]$ par Δt , lorsque Δt tend vers zéro, en supposant que l'entité est aussi bonne que neuve à l'instant $t = 0$.

$$v(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0^+} \frac{E[N_R(t + \Delta t) - N_R(t) | \text{aussi bonne que neuve à l'instant } t = 0]}{\Delta t}$$

Selon l'IEC 60050-192, le temps d'indisponibilité est composé du temps de panne et d'une partie du temps de maintenance préventive. L'hypothèse ici est que la maintenance préventive n'est pas prise en compte et donc que le temps de panne est identique au temps d'indisponibilité. Voir la Figure 2.

Dans cette formule, $N_R(t)$ représente le nombre de rétablissements se produisant au cours de l'intervalle $[0, t]$. Lorsque $\Delta t \rightarrow 0$, il ne peut pas y avoir plusieurs rétablissements d'une entité physique se terminant pendant l'intervalle $[t, t + \Delta t]$. Donc $[N_R(t + \Delta t) - N_R(t)]$ est égal à 1 si un nouveau rétablissement se produit pendant l'intervalle $[t, t + \Delta t]$ et égal à 0 dans le cas contraire. Par conséquent:

- $v(t)$ est à la fois l'espérance mathématique du nombre de rétablissements par unité de temps et la fréquence instantanée de rétablissement de l'entité.
- Lorsque $\Delta t \rightarrow 0$, $E[N_R(t + \Delta t) - N_R(t)]$ est égal à la probabilité pour qu'un rétablissement se termine pendant l'intervalle $[t, t + \Delta t]$, et l'intensité de rétablissement peut être définie comme suit:

$$v(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0^+} \frac{P(\text{rétablissement se terminant entre } t \text{ et } t + \Delta t | \text{aussi bonne que neuve à } t = 0)}{\Delta t}$$

Cette définition implique que l'entité est dans un état critique d'indisponibilité à l'instant t et passe à l'un des états de disponibilité pendant l'intervalle $[t, t + \Delta t]$.

Dans le cas de l'exemple représenté à la Figure 15:

$$v(t) = (\mu_a + \mu_b)P_4(t)$$

Cela peut être généralisé aux entités présentant plusieurs états critiques d'indisponibilité comme représenté à la Figure 4:

$$v(t) = \mu_{5,3}(t)P_5(t) + [\mu_{6,3}(t) + \mu_{6,4}(t)]P_6(t)$$

où $\mu_{i,j}(t)$ est le taux de transition de l'état i à j à l'instant t .

La fréquence moyenne de rétablissement sur un intervalle de temps donné $[t_1, t_2]$ est obtenue par:

$$\bar{v}(t_1, t_2) = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} v(t) dt$$

Le nombre moyen de rétablissements sur un intervalle de temps donné $[t_1, t_2]$ est alors obtenu par:

$$V(t_1, t_2) = (t_2 - t_1) \bar{v}(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} v(t) dt$$

Le temps global de rétablissement passé au cours d'un intervalle de temps donné $[t_1, t_2]$ est égal à la somme des durées cumulées passées dans les états d'indisponibilité. Par conséquent, la durée moyenne de panne est obtenue par:

$$MTTR = \frac{\sum_{i \in \text{états d'indisponibilité}} Ast_i(t_1, t_2)}{N_R(t_1, t_2)}$$

Lorsque la maintenance préventive n'est pas prise en compte, la MTTR est égale au temps moyen d'indisponibilité, TMI.

Dans le cas de l'exemple représenté à la Figure 15:

$$V(t_1, t_2) = (\mu_a + \mu_b) \int_{t_1}^{t_2} P_4(t) dt = (\mu_a + \mu_b) \cdot Ast_4(t_1, t_2)$$

puis

$$MTTR = \frac{1}{\mu_a + \mu_b}$$

6.2 Entités individuelles non réparables

6.2.1 Généralités

Ce cas particulier est représenté à la Figure 6 et à la Figure 7.

Toutes les expressions de 6.2 ne sont applicables qu'à des EFC.

Pour chaque mesure, les éléments suivants sont présentés:

- l'expression générique;
- l'expression la plus usuelle (pour un temps avant défaillance de l'entité à répartition exponentielle);
- un exemple d'application simple, si nécessaire.

6.2.2 Disponibilité instantanée [192-08-01]

Symbole $A(t)$

Comme l'entité n'est pas réparée, la probabilité $A(t)$ pour l'entité d'être en état de disponibilité à un instant t est aussi la probabilité $R(t)$ d'avoir été en état de disponibilité pendant tout l'intervalle $[0, t]$.

Par conséquent, $A(t) \equiv R(t)$ et, dans ce cas, les deux concepts de fiabilité et de disponibilité sont confondus. En particulier, la valeur asymptotique A de la disponibilité est égale à 0.

6.2.3 Fiabilité [192-05-05]

Symboles $R(t_1, t_2)$ pour $0 \leq t_1 < t_2$ et $R(t) = R(0, t)$ pour $t_1 = 0$ et $t_2 = t$

Dans ce cas, les expressions les plus couramment utilisées sont:

- la fiabilité $R(t) = R(0, t)$, avec $R(0) = 1$, et
- la fiabilité conditionnelle $R(t, t + x | t)$, lorsqu'aucune défaillance ne s'est produite pendant l'intervalle $[0, t]$.

En ce qui concerne les calculs de la fiabilité et de la disponibilité, les propriétés principales des entités non réparables sont les suivantes:

- $R(t) \equiv A(t)$ (voir 6.2.2);
- la probabilité $R(t_1, t_2)$ d'être en état de disponibilité sur un intervalle de temps donné $[t_1, t_2]$, $0 \leq t_1 < t_2$, est également la probabilité $R(t_2)$ d'avoir été en état de disponibilité pendant tout l'intervalle $[0, t_2]$. Dans ce cas, $R(t_1, t_2) \equiv R(t_2)$.

a) D'un point de vue mathématique, la fiabilité est donnée par la formule suivante:

$$R(t) = \exp\left(-\int_0^t \lambda(x) dx\right) = \int_t^\infty f(x) dx$$

où

$\lambda(x)$ est le taux instantané de défaillance de l'entité;

$f(x)$ est la densité de probabilité du temps avant défaillance de l'entité, c'est-à-dire, pour de petites valeurs Δx , $f(x) \Delta x$ est approximativement égale à la probabilité pour que la défaillance de l'entité se produise pendant l'intervalle $(x, x + \Delta x)$.

b) Si des données observées de défaillance (retour d'expérience) sont disponibles pour n entités non réparables appartenant à une population homogène, la valeur estimée de $R(t)$ est donnée par:

$$\hat{R}(t) = \frac{n_S(t)}{n}$$

où

$n_S(t)$ est le nombre d'entités qui sont encore en fonctionnement à l'instant t .

n $n_S(0)$.

c) La probabilité pour que l'entité subisse une défaillance pendant l'intervalle de temps $[t_1, t_2]$, $0 \leq t_1 < t_2$, est donnée par

$$R(t_1) - R(t_2) = \int_{t_1}^{t_2} f(t) dt$$

d) La fiabilité conditionnelle, $R(t, t + x | t)$, est définie comme étant la probabilité conditionnelle pour qu'une entité puisse accomplir une fonction requise pendant un intervalle de temps donné $[t, t + x]$ à condition que l'entité soit dans un état de fonctionnement au début de l'intervalle.

$$R(t, t + x | t) = \exp\left(-\int_t^{t+x} \lambda(t) dt\right) = \frac{R(t+x)}{R(t)}$$

Lorsque $\lambda(t) = \lambda = \text{constante}$, c'est-à-dire lorsque le temps (de fonctionnement) avant défaillance est à répartition exponentielle

$$R(t) = \exp(-\lambda t)$$

$$R(t, t + x | t) = \exp(-\lambda x)$$

NOTE Ce résultat provient de la propriété markovienne fondamentale: si l'entité survit jusqu'à l'instant t , le futur du système modélisé ne dépend pas de ce qui s'est passé avant l'instant t . Cette propriété est appelée absence de mémoire.

- e) Pour une entité ayant un taux de défaillance constant $\lambda = 1 \text{ année}^{-1}$ et un temps requis de fonctionnement de six mois, la fiabilité est donnée par

$$R(6 \text{ mois}) = \exp\left(-1 \times \frac{6}{12}\right) = 0,61$$

6.2.4 Taux instantané de défaillance [192-05-06]

Symbole $\lambda(t)$

Selon la définition [192-05-06]:

$$\lambda(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \frac{R(t) - R(t + \Delta t)}{R(t)} = \frac{f(t)}{R(t)}$$

Pour de petites valeurs de Δt , $\lambda(t) \cdot \Delta t$ est approximativement égale à la probabilité conditionnelle pour qu'une défaillance de l'entité se produise pendant l'intervalle de temps $[t, t + \Delta t]$, en supposant que l'entité a survécu jusqu'à l'instant t .

En utilisant le taux de défaillance, la probabilité pour que l'entité subisse une défaillance pendant l'intervalle de temps $[t_1, t_2]$ est donnée par

$$F(t_1, t_2) = R(t_1) - R(t_2) = \exp\left(-\int_0^{t_1} \lambda(t) dt\right) - \exp\left(-\int_0^{t_2} \lambda(t) dt\right)$$

- a) Si des données observées de défaillance sont disponibles pour n entités non réparables appartenant à une population homogène, la valeur estimée de $\lambda(t)$ à l'instant t est donnée par:

$$\hat{\lambda}(t) = \frac{n_S(t) - n_S(t + \Delta t)}{n_S(t) \Delta t}$$

où

$n_S(t)$ est le nombre d'entités qui sont encore en fonctionnement à l'instant t ;

n $n_S(0)$;

$n_S(t) - n_S(t + \Delta t)$ est le nombre d'entités qui ont subi une défaillance pendant l'intervalle de temps $[t, t + \Delta t]$.

NOTE La valeur estimée de la densité de défaillance $f(t)$ à l'instant t est donnée par

$$\hat{f}(t) = \frac{n_S(t) - n_S(t + \Delta t)}{n \Delta t}$$

- b) Lorsque le temps avant défaillance est à répartition exponentielle, c'est-à-dire lorsque $\lambda(t) = \lambda$ pour toutes les valeurs de t ,

$$f(t) = \lambda \exp(-\lambda t)$$

et

$$R(t) = \exp(-\lambda t)$$

- c) Si des données observées de défaillance sont disponibles pour n entités non réparables à taux de défaillance constant et appartenant à une population homogène, la valeur estimée de λ est alors donnée par l'estimateur du maximum de vraisemblance suivant:

$$\hat{\lambda} = \frac{n}{\sum_{i=1}^n \text{TTF}_i}$$

où TTF_i est le temps avant défaillance de l'entité i .

Pour 10 entités non réparables à taux de défaillance constant et appartenant à une population homogène, la durée totale de fonctionnement observée jusqu'à défaillance de toutes les entités est $\sum_{i=1}^{10} \text{TTF}_i = 2$ années. Par conséquent

$$\hat{\lambda} = \frac{10}{12} = 5 \text{ année}^{-1}$$

- d) Si le temps avant défaillance d'une entité non réparable obéit à une loi de Weibull à deux paramètres, un paramètre d'échelle $\alpha > 0$ et un paramètre de forme $\beta > 0$, alors (voir [9])

$$R(t) = \exp(-(at)^\beta)$$

et

$$f(t) = \frac{-dR(t)}{dt} = \alpha\beta (at)^{\beta-1} \exp(-(at)^\beta)$$

donc

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{R(t)} = \alpha\beta (at)^{\beta-1}$$

Pour $\beta = 2$ et $\alpha = 0,5 \text{ année}^{-1}$

$$\lambda(6 \text{ mois}) = 0,5 \times 2 \times (0,5 \times \frac{6}{12}) = 0,25 \text{ année}^{-1}$$

$$\lambda(1 \text{ année}) = 0,5 \times 2 \times (0,5 \times 1) = 0,5 \text{ année}^{-1}$$

6.2.5 Taux moyen de défaillance [192-05-07]

Symbole $\bar{\lambda}(t_1, t_2)$, $0 \leq t_1 < t_2$

- a) Dans la mesure où $R(t) = e^{-\int_0^t \lambda(\tau) d\tau}$, le taux moyen de défaillance est donné par:

$$\bar{\lambda}(t_1, t_2) = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} \lambda(t) dt = \frac{1}{t_2 - t_1} \ln \frac{R(t_1)}{R(t_2)}$$

Avertissement: La formule $R(t) = e^{-\int_0^t \lambda(\tau) d\tau} = e^{-t \cdot \frac{1}{t} \int_0^t \lambda(\tau) d\tau} = e^{-t \cdot \bar{\lambda}(0, t)}$ montre que le «taux moyen de défaillance» peut être utilisé pour le calcul de $R(t)$. Cependant, il convient de le

faire avec précaution dans la mesure où $\bar{\lambda}(0, t)$ n'est pas un taux de défaillance (voir 6.1.5.2).

- b) Lorsque le temps avant défaillance est à répartition exponentielle

$$\bar{\lambda}(t_1, t_2) = \lambda$$

pour toutes les valeurs de t_1 et t_2 .

- c) Soit $t_1 = 6$ mois, $R(t_1) = 0,8$ et $t_2 = 12$ mois, $R(t_2) = 0,5$, alors

$$\bar{\lambda}(6, 12) = \frac{1}{12-6} \ln \frac{0,8}{0,5} = \ln(1,6)/6 = \frac{0,47}{6} = 0,078 \text{ mois}^{-1}$$

tandis que (avec $R(0) = 1$)

$$\bar{\lambda}(0, 6) = \frac{1}{6-0} \ln \frac{1}{0,8} = \ln(1,25)/6 = \frac{0,22}{6} = 0,037 \text{ mois}^{-1}$$

6.2.6 Durée moyenne de fonctionnement avant défaillance [192-05-11]

MTTF (abréviation)

Dans le cas d'entités non réparables, la MTTF est également la MTTF (durée moyenne de fonctionnement avant la première défaillance). Elle peut être calculée par la formule générale suivante:

$$\text{MTTF} = \text{MTTF} = \int_0^{\infty} t f(t) dt = \int_0^{\infty} R(t) dt$$

- a) Si des données observées de défaillance (retour d'expérience) sont disponibles pour n entités non réparables appartenant à une population homogène, la valeur estimée de la MTTF est donnée par

$$\hat{\text{MTTF}} = \hat{\text{MTTF}} = \frac{\sum_{i=1}^n \text{TTF}_i}{n}$$

où TTF_i est le temps de fonctionnement observé avant défaillance de l'entité i .

NOTE La formule ci-dessus est valide uniquement si les n entités ont subi une défaillance au cours de la période d'observation. Si ce n'est pas le cas, la durée T de la période d'observation peut être utilisée pour les TTF des entités n'ayant pas subi de défaillance afin d'obtenir une estimation conservative de la MTTF.

- b) Lorsque le temps avant défaillance est à répartition exponentielle, c'est-à-dire lorsque $\lambda(t) = \lambda$ pour toutes les valeurs de t ,

$$\text{MTTF} = \frac{1}{\lambda}$$

et le taux de défaillance constant peut être estimé par:

$$\hat{\lambda} = \frac{1}{\hat{\text{MTTF}}}$$

- c) Pour une entité non réparable à taux de défaillance constant $\lambda = 0,5 \text{ année}^{-1}$,

$$\text{MTTF} = 2 \text{ années} = 17\,520 \text{ h}$$

- d) Si le temps avant défaillance d'une entité non réparable obéit à une loi de Weibull à deux paramètres, un paramètre d'échelle $\alpha > 0$ et un paramètre de forme $\beta > 0$, alors

$$R(t) = \exp[-(\alpha t)^\beta]$$

et

$$\text{MTTF} = \frac{\Gamma(1 + \frac{1}{\beta})}{\alpha}$$

où

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt$$

est la fonction gamma complète. (Voir [9])

Pour $\beta = 2$ et $\alpha = 0,5 \text{ année}^{-1}$:

$$\text{MTTF} = \frac{\Gamma(1 + \frac{1}{2})}{0,5} = 2 \times \Gamma(1 + \frac{1}{2})$$

mais

$$\Gamma(1 + \frac{1}{2}) = \Gamma(\frac{1}{2})/2 = \sqrt{\pi}/2$$

donc

$$\text{MTTF} = \sqrt{\pi} \approx 1,8 \text{ année} = 21 \text{ mois}$$

6.3 Entités individuelles réparables à temps de panne nul

6.3.1 Généralités

Ce cas particulier est représenté à la Figure 8 et à la Figure 9.

Toutes les expressions de 6.3 sont applicables à des EFC. Lorsqu'elles sont applicables à des EFI, cela est indiqué.

Pour chaque mesure, les éléments suivants sont présentés:

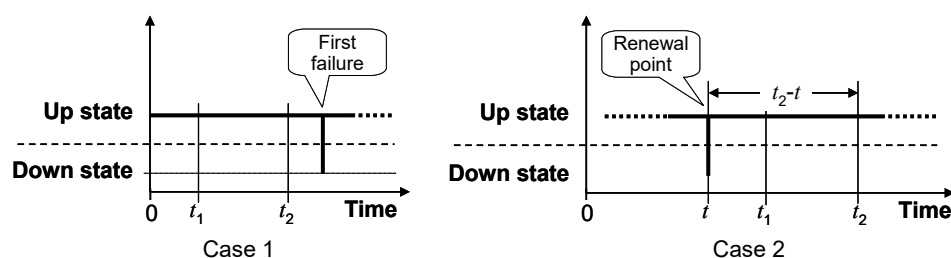
- l'expression générique obtenue grâce à un processus de renouvellement simple [11];
- l'expression la plus usuelle (lorsque les temps avant défaillance de l'entité sont à répartition exponentielle);
- un exemple d'application simple, si nécessaire.

6.3.2 Fiabilité [192-05-05]

Symbole $R(t_1, t_2)$, $0 \leq t_1 < t_2$

La fiabilité $R(t_1, t_2)$ sur l'intervalle de temps $[t_1, t_2]$ est aussi connue sous le nom de fiabilité d'intervalle.

- La fiabilité d'une entité sur un intervalle de temps $[t_1, t_2]$ est représentée à la Figure 32.



IEC

Anglais	Français
Up state	État de disponibilité
Down state	État d'indisponibilité
Case 1	Cas 1
First failure	Première défaillance
Time	Temps
Renewal point	Point de renouvellement
Case 2	Cas 2

Figure 32 – Représentation, pour une entité individuelle à temps de panne nul, d'un comportement fiable sur l'intervalle $[t_1, t_2]$

La Figure 32 montre que deux cas doivent être pris en compte:

- Aucune défaillance ne s'est produite pendant l'intervalle $[0, t_2]$. C'est la fiabilité ordinaire $R(t_2)$.
- Au moins une défaillance s'est produite et a été réparée à un instant t avant un instant t_1 , et aucune défaillance ne s'est produite entre les instants t_1 et t_2 :
 - la probabilité pour qu'une défaillance se soit produite (et ait été réparée) à l'instant t est l'intensité inconditionnelle de défaillance $z(t)$,
 - la probabilité pour que l'entité n'ait subi aucune défaillance pendant l'intervalle $[t, t_2]$, en supposant qu'elle était aussi bonne que neuve après réparation, est la fiabilité sur la durée $t_2 - t$, $R(t_2 - t)$.

Dans la mesure où t peut varier de 0 à t_1 , $R(t_1, t_2)$ peut être écrit comme suit (voir [9] et [13] pour plus d'informations):

$$R(t_1, t_2) = R(t_2) + \int_0^{t_1} R(t_2 - t) z(t) dt$$

$z(t)$ est l'intensité inconditionnelle de défaillance instantanée de l'entité. C'est également la densité de renouvellement du processus de renouvellement sous-jacent, c'est-à-dire, pour de petites valeurs de Δt , $z(t) \cdot \Delta t$ est approximativement égale à la probabilité (inconditionnelle) pour qu'une défaillance de l'entité se produise (et par conséquent une réparation de l'entité lorsque le temps de panne est nul) pendant l'intervalle $[t, t + \Delta t]$, et

$R(t) = R(0, t)$ est la fiabilité de l'entité

$$R(t) = \int_t^{\infty} f(s) ds$$

où $f(t)$ est la densité de probabilité des temps avant défaillance de l'entité (appelée aussi densité de probabilité des défaillances), c'est-à-dire, pour de petites valeurs de Δt , $f(t) \cdot \Delta t$ est approximativement égale à la probabilité pour que l'entité subisse une défaillance pendant l'intervalle de temps $[t, t + \Delta t]$. De façon plus précise, c'est approximativement la probabilité pour qu'un temps avant défaillance donné se termine pendant l'intervalle de temps $[t, t + \Delta t]$, selon l'hypothèse que ce temps avant défaillance a commencé à l'instant $t = 0$.

- b) Si des données observées de défaillance sont disponibles pour n entités réparables appartenant à une population homogène, la valeur estimée de $R(t_1, t_2)$ est donnée par

$$\hat{R}(t_1, t_2) = \frac{n_S(t_1, t_2)}{n}$$

où $n_S(t_1, t_2)$ est le nombre d'entités qui étaient en fonctionnement à l'instant t_1 et n'ont pas subi de défaillance pendant l'intervalle de temps $[t_1, t_2]$.

- c) En posant $t_1 = t$ et $t_2 = t + x$, il est possible d'obtenir la fiabilité d'intervalle asymptotique (voir [13]):

$$\lim_{t \rightarrow \infty} R(t, t + x) = \frac{1}{\text{MTTF}} \int_x^{\infty} R(s) ds$$

qui, pour de grandes valeurs de t , peut être utilisée comme approximation de $R(t, t + x)$, où MTTF est la durée moyenne de fonctionnement avant défaillance.

Cette expression asymptotique découle du théorème clé du renouvellement (voir [9]).

Il convient de ne pas confondre cette fiabilité d'intervalle asymptotique avec la fiabilité asymptotique $R(\infty)$ qui est toujours égale à 0.

- d) Lorsque $\lambda(t) = \lambda$ et est constant, c'est-à-dire lorsque les temps avant défaillance sont à répartition exponentielle,

$$R(t_1, t_2) = \exp [-\lambda \cdot (t_2 - t_1)]$$

Dans ce cas, la fiabilité d'intervalle asymptotique est donnée par

$$\lim_{t \rightarrow \infty} R(t, t + x) = \exp (-\lambda x)$$

- e) Pour une entité réparable à taux de défaillance constant $\lambda = 1 \text{ année}^{-1}$, sa fiabilité sur une période de six mois est donnée par

$$R(t, t + 6) = \exp \left(-1 \times \frac{6}{12} \right) = 0,61$$

où t est l'instant de début de l'intervalle de six mois.

6.3.3 Intensité instantanée de défaillance [192-05-08]

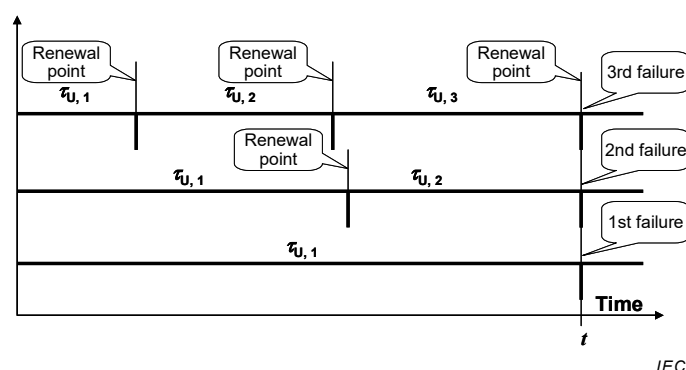
Symbole $z(t)$

Les expressions données en 6.3.3 sont aussi applicables aux EFi.

- a) Selon la définition [192-05-08], $z(t)$ est la dérivée de l'espérance mathématique du nombre de défaillances, $Z(t) = E[N(t)]$, pendant l'intervalle de temps $[0, t]$, où $N(t)$ est le nombre de défaillances pendant l'intervalle de temps $[0, t]$ et où E désigne l'espérance mathématique.

$$z(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0^+} \frac{Z(t + \Delta t) - Z(t)}{\Delta t} = \frac{dZ(t)}{dt}$$

Pour de petites valeurs de Δt , $z(t) \cdot \Delta t$ est approximativement égale à la probabilité (inconditionnelle) pour qu'une défaillance de l'entité se produise pendant l'intervalle $[t, t + \Delta t]$.



Anglais	Français
Renewal point	Point de renouvellement
3 rd failure	3 ^e défaillance
2 nd failure	2 ^e défaillance
1 st failure	1 ^{re} défaillance
Time	Temps

Figure 33 – Exemple du numéro possible de la défaillance à l'instant de renouvellement t

La Figure 33 montre que lorsqu'une défaillance/réparation se produit à l'instant t , il peut s'agir de la première, de la deuxième, de la troisième ... de la $n^{\text{ième}}$ défaillance/réparation.

Soit la variable aléatoire $\Theta_n(t) = \sum_{i=1}^n \tau_{U,i}(t)$. La probabilité pour que la $n^{\text{ième}}$ défaillance se produise entre les instants t et $t+dt$ est identique à la probabilité pour que $t < \Theta_n(t) \leq t+dt$. Cela est donné par la densité de probabilité de $\Theta_n(t)$ qui s'écrit $h_{\text{CTTF}}^{(n)}(t)$ dans les modèles de renouvellement (voir [9]). Il s'ensuit que $z(t)$ peut être écrit comme suit:

$$z(t) = \sum_{n=1}^{\infty} h_{\text{CTTF}}^{(n)}(t)$$

$h_{\text{CTTF}}^{(n)}(t)$ est la densité de probabilité de la durée calendaire totale jusqu'à la $n^{\text{ième}}$ défaillance de l'entité. Elle est associée à une somme de variables aléatoires. Par conséquent, selon les propriétés fondamentales des variables aléatoires, elle est donnée par les produits de convolution des fonctions de densité de probabilité des variables aléatoires de la somme en question. En raison de l'hypothèse «aussi bonne que neuve», toutes les fonctions de densité de probabilité de $\tau_{U,i}$ sont identiques à $f_U(t)$, qui est la densité de probabilité des temps de disponibilité de l'entité, c'est-à-dire, pour de petites valeurs de Δt , $f_U(t) \cdot \Delta t$ est approximativement égale à la probabilité pour qu'un temps de disponibilité donné de l'entité se termine pendant l'intervalle $(t, t + \Delta t)$, en supposant que le temps de disponibilité a commencé à l'instant $t = 0$.

NOTE 1 Lorsque l'entité est à fonctionnement continu, $f_U(t)$ est égal à $f(t)$.

Cela donne

$$h_{\text{CTTF}}^{(n)}(t) = f_U^{(n)}(t)$$

où $f_U^{(n)}(t)$ est la convolution de $f_U(t)$ n fois avec elle-même.

Par conséquent $h_{\text{CTTF}}^{(n)}(t) = f_U^{(n)}(t) = (f_U^{(n-1)} * f_U)(t) = (h_{\text{CTTF}}^{(n-1)} * f_U)(t)$

où «*» est utilisé pour noter le produit de convolution.

NOTE 2 Le produit de convolution de deux fonctions $x(t)$ et $y(t)$ est obtenu par la formule $x(t) * y(t) = \int_0^t x(t-\tau)y(\tau)d\tau$.

Finalement, $h_{CTTF}^{(n)}(t)$ peut être calculée par la formule de récurrence suivante:

$$h_{CTTF}^{(1)}(t) = f_U(t)$$

$$h_{CTTF}^{(n)}(t) = \int_0^t f_U(x) h_{CTTF}^{(n-1)}(t-x) dx, \text{ pour } n > 1$$

En revenant à $z(t)$, les formules suivantes sont obtenues:

$$\begin{aligned} z(t) &= h_{CTTF}^{(1)}(t) + \sum_{n=2}^{\infty} h_{CTTF}^{(n)}(t) = f_U(t) + \sum_{n=2}^{\infty} \int_0^t f_U(x) h_{CTTF}^{(n-1)}(t-x) dx \\ &= f_U(t) + \sum_{j=1}^{\infty} \int_0^t f_U(x) h_{CTTF}^{(j)}(t-x) dx = f_U(t) + \int_0^t f_U(x) \sum_{j=1}^{\infty} h_{CTTF}^{(j)}(t-x) dx \end{aligned}$$

L'intensité instantanée de défaillance, $z(t)$, satisfait à l'équation intégrale suivante (voir [9] et [11]):

$$z(t) = f_U(t) + \int_0^t f_U(x) z(t-x) dx$$

qui peut être résolue par des méthodes numériques.

- b) Si des données observées de défaillance sont disponibles pour n entités réparables appartenant à une population homogène, une estimation de $z(t)$ est donnée par

$$\hat{z}(t) = \frac{n_F(t, t + \Delta t)}{n \Delta t}$$

où $n_F(t, t + \Delta t)$ est le nombre de défaillances observées pendant l'intervalle de temps $[t, t + \Delta t]$.

- c) Lorsque les temps de disponibilité sont à répartition exponentielle, l'intensité inconditionnelle de défaillance est égale à $A(t) \cdot \lambda_U$. L'entité étant réparée immédiatement après la défaillance, elle est disponible à tout instant. Par conséquent, $A(t)=1$, et:

$$z(t) = \lambda_U$$

Pour une entité à fonctionnement continu, λ_U est égal à λ .

6.3.4 Intensité asymptotique de défaillance [192-05-10]

Symbole $z(\infty)$

Les expressions données en 6.3.4 sont aussi applicables aux EFi.

- a) Selon la définition [192-05-10], $z(\infty)$ est la limite, si elle existe, de l'intensité instantanée de défaillance $z(t)$, lorsque t tend vers l'infini:

$$z(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} z(t)$$

Par définition, l'espérance mathématique du nombre de défaillances se produisant pendant l'intervalle $[0, t]$, $Z(t)$, est égale à $Z(t) = \int_0^t z(\tau) d\tau$. Si $z(t)$ atteint une valeur asymptotique lorsque t tend vers l'infini, alors (voir 6.1.6):

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{Z(t)}{t} = z(\infty)$$

Selon la définition du temps moyen entre défaillances METBF, l'espérance mathématique du nombre de défaillances $Z(t)$ sur l'intervalle $[0, t]$ tend vers $\frac{t}{\text{METBF}}$ lorsque t augmente. Dans le cas du temps de panne nul, le TMI est égal à 0 et METBF = TMD. Alors:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{Z(t)}{t} = \frac{1}{\text{TMD}}$$

Enfin, lorsqu'elle existe, l'intensité asymptotique de défaillance $z(\infty)$ est donnée par l'équation

$$z(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} z(t) = \frac{1}{\text{TMD}}$$

En formulant des hypothèses appropriées sur $f_U(t)$, l'équation ci-dessus résulte du théorème de la densité de renouvellement (voir [5], [9], [10] et [12]).

NOTE Les hypothèses les plus simples permettant de vérifier les conditions de l'existence de $z(\infty)$ sont les suivantes:

- TMD < ∞;
 - $f_U(t)$ est une fonction limitée sur $[0, +\infty]$ et tend vers 0 lorsque $t \rightarrow +\infty$.
- b) Si des données observées de défaillance sont disponibles pour n entités réparables appartenant à une population homogène, et si la durée t est suffisante, une estimation de $z(\infty)$ est donnée par

$$\hat{z}(\infty) = \hat{z}(t) = \frac{n_F(t, t + \Delta t)}{n \Delta t}$$

où $n_F(t, t + \Delta t)$ est le nombre de défaillances observées pendant l'intervalle de temps $[t, t + \Delta t]$.

Pour de petites valeurs de Δt et de grandes valeurs de t , $z(\infty) \cdot \Delta t$ est approximativement égale à la probabilité (inconditionnelle) pour qu'une défaillance de l'entité se produise pendant l'intervalle $[t, t + \Delta t]$.

- c) Lorsque les temps de disponibilité sont à répartition exponentielle (voir 6.3.3 c)),

$$z(\infty) = \lambda_U$$

Pour une entité à fonctionnement continu, λ_U est égal à λ . (voir 3.5 Note 2 et 3.6 Note 3)

6.3.5 Intensité moyenne de défaillance [192-05-09]

Symbole $\bar{z}(t_1, t_2)$, $0 \leq t_1 < t_2$

Les expressions données en 6.3.5 sont aussi applicables aux EFi.

$$a) \bar{z}(t_1, t_2) = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} z(t) dt$$

L'intégrale $\int_{t_1}^{t_2} z(t) dt$ est égale à l'espérance mathématique du nombre de défaillances de l'entité pendant l'intervalle de temps $[t_1, t_2]$, donc $\bar{z}(t_1, t_2)$ peut être interprétée comme l'espérance mathématique du nombre de défaillances par unité de temps pendant $[t_1, t_2]$.

- b) Si des données observées de défaillance sont disponibles pour n entités réparables appartenant à une population homogène, une estimation de $\bar{z}(t_1, t_2)$ est donnée par

$$\hat{z}(t_1, t_2) = \frac{n_F(t_1, t_2)}{n.(t_1 - t_2)}$$

où $n_F(t_1, t_2)$ est le nombre de défaillances observées pendant l'intervalle de temps $[t_1, t_2]$.

- c) En posant $t_1 = t$ et $t_2 = t + x$, l'intensité moyenne de défaillance asymptotique peut être obtenue par:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \bar{z}(t, t + x) = \frac{1}{\text{METBF}}$$

NOTE Cette égalité vient de l'équilibre atteint par le processus de renouvellement lorsque t tend vers l'infini. Lorsque cet équilibre est atteint, le nombre de défaillances observées pendant l'intervalle $[t, t + x]$ tend vers x/METBF , donc le nombre moyen de défaillances tend vers $1/\text{METBF}$. Cette égalité peut être démontrée de façon plus mathématique grâce au théorème de Blackwell (voir [9]).

Dans le cas d'un temps de réparation nul, METBF est égal au TMD, et:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \bar{z}(t, t + x) = \frac{1}{\text{TMD}}$$

qui, pour de grandes valeurs de t , peut être utilisé comme approximation de $\bar{z}(t, t + x)$

- d) Lorsque les temps de disponibilité sont à répartition exponentielle (voir 6.3.3 c), alors

$$\bar{z}(t_1, t_2) = \lambda_U$$

Pour une entité à fonctionnement continu, λ_U est égal à λ (voir 3.5 Note 2 et 3.6 Note 3).

Alors $\bar{z}(t_1, t_2) = \lambda$.

6.3.6 Temps moyen entre défaillances (voir 3.3)

Les expressions données en 6.3.6 sont aussi applicables aux EFI.

- a) Dans ce cas, le TMI est égal à zéro et le temps moyen entre défaillances est réduit au TMD (voir 6.1.4):

$$\text{METBF} = \text{TMD} = \int_0^{\infty} t f_U(t) dt$$

où $f_U(t)$ est la densité de probabilité des temps de disponibilité de l'entité (qui comprennent les temps de fonctionnement, les temps morts, les périodes d'attente et les temps d'incapacité externe).

NOTE Dans les cas où l'hypothèse de 5.5.1 f) n'est pas valide, c'est-à-dire lorsque des tâches de maintenance avec arrêt sont réalisées, le temps entre défaillances comprend les durées de ces tâches. Dans ce cas,

$$\text{METBF} > \text{TMD}$$

Si l'entité est à fonctionnement continu,

temps moyen entre défaillances

= durée moyenne de fonctionnement avant défaillance (MTTF)

= moyenne des temps de bon fonctionnement (MOTBF)

= temps moyen de disponibilité (TMD).

- b) Si les temps de disponibilité sont à répartition exponentielle,

$$\text{temps moyen entre défaillances} = \frac{1}{\lambda_U}$$

Si l'entité est à fonctionnement continu, λ_U est égal à λ .

6.3.7 Durée moyenne de fonctionnement avant défaillance [192-05-11]

MTTF (abréviation)

- a) Dans le cas d'une entité individuelle réparable considérée par hypothèse comme «aussi bonne que neuve» après réparation, la MTTF a la même valeur que la MTTF (durée moyenne de fonctionnement avant la première défaillance). Elle peut être calculée par la formule générale suivante:

$$MTTF = MTTF = \int_0^{\infty} tf(t)dt = \int_0^{\infty} R(t)dt$$

- b) Lorsque tous les temps observés de fonctionnement avant défaillance pour n entités appartenant à une population homogène sont disponibles, une estimation de la MTTF est donnée par

$$\hat{MTTF} = \frac{\text{temps total de fonctionnement}}{k_F} = \frac{\sum_{i=1}^n (\text{temps de fonctionnement})_i}{k_F}$$

où

le «temps total de fonctionnement» est le temps de fonctionnement cumulé des n entités pendant une période de temps donnée;

k_F est le nombre total de défaillances observées pendant la période de temps donnée;

le «(temps de fonctionnement) _{i} » est le temps de fonctionnement cumulé de la $i^{\text{ème}}$ entité pendant la période de temps donnée.

- c) Lorsque les temps avant défaillance sont à répartition exponentielle

$$MTTF = \frac{1}{\lambda}$$

- d) Pour une entité réparable à taux de défaillance constant de $0,5 \text{ année}^{-1}$,

$$MTTF = 2 \text{ années} = 17\,520 \text{ h}$$

6.3.8 Moyenne des temps de bon fonctionnement [192-05-13]

MOTBF

- a) Dans la mesure où le temps de panne est égal à zéro, la MOTBF est égale à la MTTF:

$$MOTBF = MTTF = \int_0^{\infty} tf(t)dt = \int_0^{\infty} R(t)dt$$

NOTE Pour les entités à fonctionnement continu, la MOTBF est égale au TMD total. Dans ce cas, MOTBF = MTTF = TMD.

- b) Si les temps avant défaillance sont à répartition exponentielle,

$$MOTBF = \frac{1}{\lambda}$$

6.3.9 Disponibilité instantanée [192-08-01], disponibilité moyenne [192-08-05] et disponibilité asymptotique [192-08-07]

Dans la mesure où l'entité est réparée immédiatement, sa disponibilité instantanée est égale à 1 à tout instant:

$$A(t) \equiv 1, \forall t \in [0, \infty]$$

Par conséquent, la disponibilité moyenne et la disponibilité en régime établi sont également égales à 1: