

# INTERNATIONAL STANDARD

## NORME INTERNATIONALE

**Reliability block diagrams**

**Diagrammes de fiabilité**

IECNORM.COM : Click to view the full PDF of IEC 61078:2016



## THIS PUBLICATION IS COPYRIGHT PROTECTED

Copyright © 2016 IEC, Geneva, Switzerland

All rights reserved. Unless otherwise specified, no part of this publication may be reproduced or utilized in any form or by any means, electronic or mechanical, including photocopying and microfilm, without permission in writing from either IEC or IEC's member National Committee in the country of the requester. If you have any questions about IEC copyright or have an enquiry about obtaining additional rights to this publication, please contact the address below or your local IEC member National Committee for further information.

Droits de reproduction réservés. Sauf indication contraire, aucune partie de cette publication ne peut être reproduite ni utilisée sous quelque forme que ce soit et par aucun procédé, électronique ou mécanique, y compris la photocopie et les microfilms, sans l'accord écrit de l'IEC ou du Comité national de l'IEC du pays du demandeur. Si vous avez des questions sur le copyright de l'IEC ou si vous désirez obtenir des droits supplémentaires sur cette publication, utilisez les coordonnées ci-après ou contactez le Comité national de l'IEC de votre pays de résidence.

IEC Central Office  
3, rue de Varembe  
CH-1211 Geneva 20  
Switzerland

Tel.: +41 22 919 02 11  
Fax: +41 22 919 03 00  
[info@iec.ch](mailto:info@iec.ch)  
[www.iec.ch](http://www.iec.ch)

### About the IEC

The International Electrotechnical Commission (IEC) is the leading global organization that prepares and publishes International Standards for all electrical, electronic and related technologies.

### About IEC publications

The technical content of IEC publications is kept under constant review by the IEC. Please make sure that you have the latest edition, a corrigenda or an amendment might have been published.

#### IEC Catalogue - [webstore.iec.ch/catalogue](http://webstore.iec.ch/catalogue)

The stand-alone application for consulting the entire bibliographical information on IEC International Standards, Technical Specifications, Technical Reports and other documents. Available for PC, Mac OS, Android Tablets and iPad.

#### IEC publications search - [www.iec.ch/searchpub](http://www.iec.ch/searchpub)

The advanced search enables to find IEC publications by a variety of criteria (reference number, text, technical committee,...). It also gives information on projects, replaced and withdrawn publications.

#### IEC Just Published - [webstore.iec.ch/justpublished](http://webstore.iec.ch/justpublished)

Stay up to date on all new IEC publications. Just Published details all new publications released. Available online and also once a month by email.

#### Electropedia - [www.electropedia.org](http://www.electropedia.org)

The world's leading online dictionary of electronic and electrical terms containing 20 000 terms and definitions in English and French, with equivalent terms in 15 additional languages. Also known as the International Electrotechnical Vocabulary (IEV) online.

#### IEC Glossary - [std.iec.ch/glossary](http://std.iec.ch/glossary)

65 000 electrotechnical terminology entries in English and French extracted from the Terms and Definitions clause of IEC publications issued since 2002. Some entries have been collected from earlier publications of IEC TC 37, 77, 86 and CISPR.

#### IEC Customer Service Centre - [webstore.iec.ch/csc](http://webstore.iec.ch/csc)

If you wish to give us your feedback on this publication or need further assistance, please contact the Customer Service Centre: [csc@iec.ch](mailto:csc@iec.ch).

### A propos de l'IEC

La Commission Electrotechnique Internationale (IEC) est la première organisation mondiale qui élabore et publie des Normes internationales pour tout ce qui a trait à l'électricité, à l'électronique et aux technologies apparentées.

### A propos des publications IEC

Le contenu technique des publications IEC est constamment revu. Veuillez vous assurer que vous possédez l'édition la plus récente, un corrigendum ou amendement peut avoir été publié.

#### Catalogue IEC - [webstore.iec.ch/catalogue](http://webstore.iec.ch/catalogue)

Application autonome pour consulter tous les renseignements bibliographiques sur les Normes internationales, Spécifications techniques, Rapports techniques et autres documents de l'IEC. Disponible pour PC, Mac OS, tablettes Android et iPad.

#### Recherche de publications IEC - [www.iec.ch/searchpub](http://www.iec.ch/searchpub)

La recherche avancée permet de trouver des publications IEC en utilisant différents critères (numéro de référence, texte, comité d'études,...). Elle donne aussi des informations sur les projets et les publications remplacées ou retirées.

#### IEC Just Published - [webstore.iec.ch/justpublished](http://webstore.iec.ch/justpublished)

Restez informé sur les nouvelles publications IEC. Just Published détaille les nouvelles publications parues. Disponible en ligne et aussi une fois par mois par email.

#### Electropedia - [www.electropedia.org](http://www.electropedia.org)

Le premier dictionnaire en ligne de termes électroniques et électriques. Il contient 20 000 termes et définitions en anglais et en français, ainsi que les termes équivalents dans 15 langues additionnelles. Egalement appelé Vocabulaire Electrotechnique International (IEV) en ligne.

#### Glossaire IEC - [std.iec.ch/glossary](http://std.iec.ch/glossary)

65 000 entrées terminologiques électrotechniques, en anglais et en français, extraites des articles Termes et Définitions des publications IEC parues depuis 2002. Plus certaines entrées antérieures extraites des publications des CE 37, 77, 86 et CISPR de l'IEC.

#### Service Clients - [webstore.iec.ch/csc](http://webstore.iec.ch/csc)

Si vous désirez nous donner des commentaires sur cette publication ou si vous avez des questions contactez-nous: [csc@iec.ch](mailto:csc@iec.ch).

# INTERNATIONAL STANDARD

## NORME INTERNATIONALE

---

**Reliability block diagrams**

**Diagrammes de fiabilité**

INTERNATIONAL  
ELECTROTECHNICAL  
COMMISSION

COMMISSION  
ELECTROTECHNIQUE  
INTERNATIONALE

---

ICS 03.120.01; 03.120.99

ISBN 978-2-8322-3561-4

**Warning! Make sure that you obtained this publication from an authorized distributor.**  
**Attention! Veuillez vous assurer que vous avez obtenu cette publication via un distributeur agréé.**

## CONTENTS

|                                                                                             |    |
|---------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| FOREWORD.....                                                                               | 8  |
| INTRODUCTION.....                                                                           | 10 |
| 1 Scope.....                                                                                | 11 |
| 2 Normative references.....                                                                 | 11 |
| 3 Terms and definitions .....                                                               | 11 |
| 4 Symbols and abbreviated terms .....                                                       | 18 |
| 5 Preliminary considerations, main assumptions, and limitations.....                        | 22 |
| 5.1 General considerations.....                                                             | 22 |
| 5.2 Pre-requisite/main assumptions.....                                                     | 23 |
| 5.3 Limitations .....                                                                       | 23 |
| 6 Establishment of system success/failed states .....                                       | 24 |
| 6.1 General considerations.....                                                             | 24 |
| 6.2 Detailed considerations .....                                                           | 24 |
| 6.2.1 System operation .....                                                                | 24 |
| 6.2.2 Environmental conditions .....                                                        | 25 |
| 6.2.3 Duty cycles .....                                                                     | 25 |
| 7 Elementary models .....                                                                   | 25 |
| 7.1 Developing the model.....                                                               | 25 |
| 7.2 Series structures.....                                                                  | 25 |
| 7.3 Parallel structures .....                                                               | 26 |
| 7.4 Mix of series and parallel structures.....                                              | 26 |
| 7.5 Other structures .....                                                                  | 27 |
| 7.5.1 $m$ out of $n$ structures.....                                                        | 27 |
| 7.5.2 Structures with common blocks .....                                                   | 28 |
| 7.5.3 Composite blocks.....                                                                 | 29 |
| 7.6 Large RBDs and use of transfer gates .....                                              | 29 |
| 8 Qualitative analysis: minimal tie sets and minimal cut sets.....                          | 30 |
| 8.1 Electrical analogy.....                                                                 | 30 |
| 8.2 Series-parallel representation with minimal success path and cut sets.....              | 32 |
| 8.3 Qualitative analysis from minimal cut sets.....                                         | 33 |
| 9 Quantitative analysis: blocks with constant probability of failure/success .....          | 33 |
| 9.1 Series structures.....                                                                  | 33 |
| 9.2 Parallel structures .....                                                               | 34 |
| 9.3 Mix of series and parallel structures.....                                              | 34 |
| 9.4 $m/n$ architectures (identical items).....                                              | 35 |
| 10 Quantitative analysis: blocks with time dependent probabilities of failure/success ..... | 35 |
| 10.1 General.....                                                                           | 35 |
| 10.2 Non-repaired blocks .....                                                              | 36 |
| 10.2.1 General .....                                                                        | 36 |
| 10.2.2 Simple non-repaired block.....                                                       | 36 |
| 10.2.3 Non-repaired composite blocks.....                                                   | 36 |
| 10.2.4 RBDs with non-repaired blocks.....                                                   | 37 |
| 10.3 Repaired blocks .....                                                                  | 37 |
| 10.3.1 Availability calculations .....                                                      | 37 |
| 10.3.2 Average availability calculations .....                                              | 40 |

|         |                                                                           |    |
|---------|---------------------------------------------------------------------------|----|
| 10.3.3  | Reliability calculations.....                                             | 42 |
| 10.3.4  | Frequency calculations.....                                               | 43 |
| 11      | Boolean techniques for quantitative analysis of large models.....         | 43 |
| 11.1    | General.....                                                              | 43 |
| 11.2    | Method of RBD reduction .....                                             | 44 |
| 11.3    | Use of total probability theorem .....                                    | 45 |
| 11.4    | Use of Boolean truth tables .....                                         | 46 |
| 11.5    | Use of Karnaugh maps .....                                                | 47 |
| 11.6    | Use of the Shannon decomposition and binary decision diagrams .....       | 49 |
| 11.7    | Use of Sylvester-Poincaré formula.....                                    | 50 |
| 11.8    | Examples of RBD application.....                                          | 51 |
| 11.8.1  | Models with repeated blocks .....                                         | 51 |
| 11.8.2  | $m$ out of $n$ models (non-identical items).....                          | 54 |
| 12      | Extension of reliability block diagram techniques .....                   | 54 |
| 12.1    | Non-coherent reliability block diagrams.....                              | 54 |
| 12.2    | Dynamic reliability block diagrams .....                                  | 57 |
| 12.2.1  | General .....                                                             | 57 |
| 12.2.2  | Local interactions.....                                                   | 58 |
| 12.2.3  | Systemic dynamic interactions.....                                        | 59 |
| 12.2.4  | Graphical representations of dynamic interactions .....                   | 59 |
| 12.2.5  | Probabilistic calculations .....                                          | 62 |
| Annex A | (informative) Summary of formulae .....                                   | 63 |
| Annex B | (informative) Boolean algebra methods.....                                | 67 |
| B.1     | Introductory remarks .....                                                | 67 |
| B.2     | Notation.....                                                             | 67 |
| B.3     | Tie sets (success paths) and cut sets (failure paths) analysis.....       | 68 |
| B.3.1   | Notion of cut and tie sets.....                                           | 68 |
| B.3.2   | Series-parallel representation using minimal tie and cut sets.....        | 69 |
| B.3.3   | Identification of minimal cuts and tie sets.....                          | 70 |
| B.4     | Principles of calculations .....                                          | 71 |
| B.4.1   | Series structures .....                                                   | 71 |
| B.4.2   | Parallel structures .....                                                 | 71 |
| B.4.3   | Mix of series and parallel structures .....                               | 73 |
| B.4.4   | $m$ out of $n$ architectures (identical items).....                       | 73 |
| B.5     | Use of Sylvester Poincaré formula for large RBDs and repeated blocks..... | 74 |
| B.5.1   | General .....                                                             | 74 |
| B.5.2   | Sylvester Poincaré formula with tie sets.....                             | 74 |
| B.5.3   | Sylvester Poincaré formula with cut sets.....                             | 76 |
| B.6     | Method for disjointing Boolean expressions .....                          | 77 |
| B.6.1   | General and background .....                                              | 77 |
| B.6.2   | Disjointing principle.....                                                | 78 |
| B.6.3   | Disjointing procedure .....                                               | 79 |
| B.6.4   | Example of application of disjointing procedure.....                      | 79 |
| B.6.5   | Comments .....                                                            | 81 |
| B.7     | Binary decision diagrams .....                                            | 82 |
| B.7.1   | Establishing a BDD .....                                                  | 82 |
| B.7.2   | Minimal success paths and cut sets with BDDs .....                        | 84 |
| B.7.3   | Probabilistic calculations with BDDs .....                                | 86 |

|                       |                                                                                |     |
|-----------------------|--------------------------------------------------------------------------------|-----|
| B.7.4                 | Key remarks about the use of BDDs .....                                        | 87  |
| Annex C (informative) | Time dependent probabilities and RBD driven Markov processes .....             | 88  |
| C.1                   | General.....                                                                   | 88  |
| C.2                   | Principle for calculation of time dependent availabilities .....               | 88  |
| C.3                   | Non-repaired blocks .....                                                      | 89  |
| C.3.1                 | General .....                                                                  | 89  |
| C.3.2                 | Simple non-repaired blocks .....                                               | 89  |
| C.3.3                 | Composite block: example on a non-repaired standby system .....                | 89  |
| C.4                   | RBD driven Markov processes.....                                               | 91  |
| C.5                   | Average and asymptotic (steady state) availability calculations .....          | 92  |
| C.6                   | Frequency calculations.....                                                    | 93  |
| C.7                   | Reliability calculations.....                                                  | 94  |
| Annex D (informative) | Importance factors .....                                                       | 96  |
| D.1                   | General.....                                                                   | 96  |
| D.2                   | Vesely-Fussell importance factor .....                                         | 96  |
| D.3                   | Birnbaum importance factor or marginal importance factor .....                 | 96  |
| D.4                   | Lambert importance factor or critical importance factor .....                  | 97  |
| D.5                   | Diagnostic importance factor .....                                             | 97  |
| D.6                   | Risk achievement worth .....                                                   | 98  |
| D.7                   | Risk reduction worth.....                                                      | 98  |
| D.8                   | Differential importance measure .....                                          | 98  |
| D.9                   | Remarks about importance factors.....                                          | 99  |
| Annex E (informative) | RBD driven Petri nets .....                                                    | 100 |
| E.1                   | General.....                                                                   | 100 |
| E.2                   | Example of sub-PN to be used within RBD driven PN models .....                 | 100 |
| E.3                   | Evaluation of the DRBD state .....                                             | 102 |
| E.4                   | Availability, reliability, frequency and MTTF calculations .....               | 104 |
| Annex F (informative) | Numerical examples and curves .....                                            | 105 |
| F.1                   | General.....                                                                   | 105 |
| F.2                   | Typical series RBD structure .....                                             | 105 |
| F.2.1                 | Non-repaired blocks .....                                                      | 105 |
| F.2.2                 | Repaired blocks .....                                                          | 106 |
| F.3                   | Typical parallel RBD structure .....                                           | 107 |
| F.3.1                 | Non-repaired blocks .....                                                      | 107 |
| F.3.2                 | Repaired blocks .....                                                          | 108 |
| F.4                   | Complex RBD structures .....                                                   | 109 |
| F.4.1                 | Non series-parallel RBD structure.....                                         | 109 |
| F.4.2                 | Convergence to asymptotic values versus MTTR .....                             | 110 |
| F.4.3                 | System with periodically tested components .....                               | 111 |
| F.5                   | Dynamic RBD example.....                                                       | 113 |
| F.5.1                 | Comparison between analytical and Monte Carlo simulation results .....         | 113 |
| F.5.2                 | Dynamic RBD example.....                                                       | 113 |
| Bibliography          | .....                                                                          | 116 |
| Figure 1              | – Shannon decomposition of a simple Boolean expression and resulting BDD ..... | 18  |
| Figure 2              | – Series reliability block diagram .....                                       | 25  |
| Figure 3              | – Parallel reliability block diagram .....                                     | 26  |

|                                                                                                           |    |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Figure 4 – Parallel structure made of duplicated series sub-RBD .....                                     | 26 |
| Figure 5 – Series structure made of parallel reliability block diagram.....                               | 27 |
| Figure 6 – General series-parallel reliability block diagram .....                                        | 27 |
| Figure 7 – Another type of general series-parallel reliability block diagram .....                        | 27 |
| Figure 8 – 2 out of 3 redundancy.....                                                                     | 28 |
| Figure 9 – 3 out of 4 redundancy.....                                                                     | 28 |
| Figure 10 – Diagram not easily represented by series/parallel arrangement of blocks .....                 | 28 |
| Figure 11 – Example of RBD implementing dependent blocks .....                                            | 29 |
| Figure 12 – Example of a composite block.....                                                             | 29 |
| Figure 13 – Use of transfer gates and sub-RBDs .....                                                      | 30 |
| Figure 14 – Analogy between a block and an electrical switch.....                                         | 30 |
| Figure 15 – Analogy with an electrical circuit .....                                                      | 31 |
| Figure 16 – Example of minimal success path (tie set).....                                                | 31 |
| Figure 17 – Example of minimal failure path (cut set).....                                                | 31 |
| Figure 18 – Equivalent RBDs with minimal success paths .....                                              | 32 |
| Figure 19 – Equivalent RBDs with minimal cut sets.....                                                    | 33 |
| Figure 20 – Link between a basic series structure and probability calculations .....                      | 33 |
| Figure 21 – Link between a parallel structure and probability calculations .....                          | 34 |
| Figure 22 – "Availability" Markov graph for a simple repaired block .....                                 | 38 |
| Figure 23 – Standby redundancy.....                                                                       | 38 |
| Figure 24 – Typical availability of a periodically tested block.....                                      | 39 |
| Figure 25 – Example of RBD reaching a steady state.....                                                   | 41 |
| Figure 26 – Example of RBD with recurring phases .....                                                    | 41 |
| Figure 27 – RBD and equivalent Markov graph for reliability calculations .....                            | 42 |
| Figure 28 – Illustrating grouping of blocks before reduction.....                                         | 44 |
| Figure 29 – Reduced reliability block diagrams .....                                                      | 44 |
| Figure 30 – Representation of Figure 10 when item A has failed .....                                      | 45 |
| Figure 31 – Representation of Figure 10 when item A is working.....                                       | 45 |
| Figure 32 – RBD representing three redundant items.....                                                   | 46 |
| Figure 33 – Shannon decomposition equivalent to Table 5.....                                              | 49 |
| Figure 34 – Binary decision diagram equivalent to Table 5.....                                            | 49 |
| Figure 35 – RBD using an arrow to help define system success .....                                        | 51 |
| Figure 36 – Alternative representation of Figure 35 using repeated blocks and success paths.....          | 51 |
| Figure 37 – Other alternative representation of Figure 35 using repeated blocks and minimal cut sets..... | 52 |
| Figure 38 – Shannon decomposition related to Figure 35.....                                               | 53 |
| Figure 39 – 2-out-of-5 non-identical items .....                                                          | 54 |
| Figure 40 – Direct and inverted block .....                                                               | 55 |
| Figure 41 – Example of electrical circuit with a commutator A .....                                       | 55 |
| Figure 42 – Electrical circuit: failure paths .....                                                       | 55 |
| Figure 43 – Example RBD with blocks with inverted states.....                                             | 56 |
| Figure 44 – BDD equivalent to Figure 43 .....                                                             | 57 |
| Figure 45 – Symbol for external elements.....                                                             | 58 |

|                                                                                               |     |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Figure 46 – Dynamic interaction between a CCF and RBDs' blocks.....                           | 60  |
| Figure 47 – Various ways to indicate dynamic interaction between blocks .....                 | 60  |
| Figure 48 – Dynamic interaction between a single repair team and RBDs' blocks .....           | 60  |
| Figure 49 – Implementation of a PAND gate .....                                               | 61  |
| Figure 50 – Equivalent finite-state automaton and example of chronogram for a PAND gate ..... | 61  |
| Figure 51 – Implementation of a SEQ gate .....                                                | 61  |
| Figure 52 – Equivalent finite-state automaton and example of chronogram for a SEQ gate .....  | 62  |
| Figure B.1 – Examples of minimal tie sets (success paths) .....                               | 68  |
| Figure B.2 – Examples of non-minimal tie sets (non minimal success paths) .....               | 68  |
| Figure B.3 – Examples of minimal cut sets .....                                               | 69  |
| Figure B.4 – Examples of non-minimal cut sets.....                                            | 69  |
| Figure B.5 – Example of RBD with tie and cut sets of various order .....                      | 70  |
| Figure B.6 – Reminder of the RBD in Figure 35 .....                                           | 82  |
| Figure B.7 – Shannon decomposition of the Boolean function represented by Figure B.6.....     | 82  |
| Figure B.8 – Identification of the parts which do not matter .....                            | 83  |
| Figure B.9 – Simplification of the Shannon decomposition .....                                | 83  |
| Figure B.10 – Binary decision diagram related to the RBD in Figure B.6.....                   | 84  |
| Figure B.11 – Obtaining success paths (tie sets) from an RBD.....                             | 84  |
| Figure B.12 – Obtaining failure paths (cut sets) from an RBD.....                             | 85  |
| Figure B.13 – Finding cut and tie sets from BDDs.....                                         | 85  |
| Figure B.14 – Probabilistic calculations from a BDD.....                                      | 86  |
| Figure B.15 – Calculation of conditional probabilities using BDDs .....                       | 87  |
| Figure C.1 – Principle of time dependent availability calculations .....                      | 88  |
| Figure C.2 – Principle of RBD driven Markov processes .....                                   | 91  |
| Figure C.3 – Typical availability of RBD with quickly repaired failures .....                 | 91  |
| Figure C.4 – Example of simple multi-phase Markov process .....                               | 92  |
| Figure C.5 – Typical availability of RBD with periodically tested failures.....               | 92  |
| Figure E.1 – Example of a sub-PN modelling a DRBD block.....                                  | 100 |
| Figure E.2 – Example of a sub-PN modelling a common cause failure.....                        | 101 |
| Figure E.3 – Example of DRBD based on RBD driven PN .....                                     | 101 |
| Figure E.4 – Logical calculation of classical RBD structures.....                             | 102 |
| Figure E.5 – Example of logical calculation for an $n/m$ gate .....                           | 102 |
| Figure E.6 – Example of sub-PN modelling a PAND gate with 2 inputs .....                      | 103 |
| Figure E.7 – Example of the inhibition of the failure of a block .....                        | 104 |
| Figure E.8 – Sub-PN for availability, reliability and frequency calculations.....             | 104 |
| Figure F.1 – Availability/reliability of a typical non-repaired series structure .....        | 105 |
| Figure F.2 – Failure rate and failure frequency related to Figure F.1 .....                   | 106 |
| Figure F.3 – Equivalence of a non-repaired series structure to a single block.....            | 106 |
| Figure F.4 – Availability/reliability of a typical repaired series structure .....            | 106 |
| Figure F.5 – Failure rate and failure frequency related to Figure F.4 .....                   | 107 |
| Figure F.6 – Availability/reliability of a typical non-repaired parallel structure .....      | 107 |
| Figure F.7 – Failure rate and failure frequency related to Figure F.6 .....                   | 108 |
| Figure F.8 – Availability/reliability of a typical repaired parallel structure .....          | 108 |

|                                                                                                          |     |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Figure F.9 – Vesely failure rate and failure frequency related to Figure F.8 .....                       | 109 |
| Figure F.10 – Example 1 from 7.5.2 .....                                                                 | 109 |
| Figure F.11 – Failure rate and failure frequency related to Figure F.10.....                             | 110 |
| Figure F.12 – Impact of the MTTR on the convergence quickness.....                                       | 111 |
| Figure F.13 – System with periodically tested blocks .....                                               | 112 |
| Figure F.14 – Failure rate and failure frequency related to Figure F.13.....                             | 112 |
| Figure F.15 – Analytical versus Monte Carlo simulation results .....                                     | 113 |
| Figure F.16 – Impact of CCF and limited number of repair teams .....                                     | 114 |
| Figure F.17 – Markov graphs modelling the impact of the number of repair teams .....                     | 115 |
| Figure F.18 – Approximation for two redundant blocks.....                                                | 115 |
| Table 1 – Acronyms used in IEC 61078 .....                                                               | 18  |
| Table 2 – Symbols used in IEC 61078.....                                                                 | 19  |
| Table 3 – Graphical representation of RBDs: Boolean structures .....                                     | 21  |
| Table 4 – Graphical representation of RBDs: non-Boolean structures/DRBD .....                            | 22  |
| Table 5 – Application of truth table to the example of Figure 32 .....                                   | 46  |
| Table 6 – Karnaugh map related to Figure 10 when A is in up state .....                                  | 48  |
| Table 7 – Karnaugh map related to Figure 10 when A is in down state .....                                | 48  |
| Table 8 – Karnaugh map related to Figure 35.....                                                         | 53  |
| Table A.1 – Example of equations for calculating the probability of success of basic configurations..... | 63  |
| Table F.1 – Impact of functional dependencies.....                                                       | 114 |

IECNORM.COM : Click to view the full PDF of IEC 61078:2016

# INTERNATIONAL ELECTROTECHNICAL COMMISSION

## RELIABILITY BLOCK DIAGRAMS

### FOREWORD

- 1) The International Electrotechnical Commission (IEC) is a worldwide organization for standardization comprising all national electrotechnical committees (IEC National Committees). The object of IEC is to promote international co-operation on all questions concerning standardization in the electrical and electronic fields. To this end and in addition to other activities, IEC publishes International Standards, Technical Specifications, Technical Reports, Publicly Available Specifications (PAS) and Guides (hereafter referred to as "IEC Publication(s)"). Their preparation is entrusted to technical committees; any IEC National Committee interested in the subject dealt with may participate in this preparatory work. International, governmental and non-governmental organizations liaising with the IEC also participate in this preparation. IEC collaborates closely with the International Organization for Standardization (ISO) in accordance with conditions determined by agreement between the two organizations.
- 2) The formal decisions or agreements of IEC on technical matters express, as nearly as possible, an international consensus of opinion on the relevant subjects since each technical committee has representation from all interested IEC National Committees.
- 3) IEC Publications have the form of recommendations for international use and are accepted by IEC National Committees in that sense. While all reasonable efforts are made to ensure that the technical content of IEC Publications is accurate, IEC cannot be held responsible for the way in which they are used or for any misinterpretation by any end user.
- 4) In order to promote international uniformity, IEC National Committees undertake to apply IEC Publications transparently to the maximum extent possible in their national and regional publications. Any divergence between any IEC Publication and the corresponding national or regional publication shall be clearly indicated in the latter.
- 5) IEC itself does not provide any attestation of conformity. Independent certification bodies provide conformity assessment services and, in some areas, access to IEC marks of conformity. IEC is not responsible for any services carried out by independent certification bodies.
- 6) All users should ensure that they have the latest edition of this publication.
- 7) No liability shall attach to IEC or its directors, employees, servants or agents including individual experts and members of its technical committees and IEC National Committees for any personal injury, property damage or other damage of any nature whatsoever, whether direct or indirect, or for costs (including legal fees) and expenses arising out of the publication, use of, or reliance upon, this IEC Publication or any other IEC Publications.
- 8) Attention is drawn to the Normative references cited in this publication. Use of the referenced publications is indispensable for the correct application of this publication.
- 9) Attention is drawn to the possibility that some of the elements of this IEC Publication may be the subject of patent rights. IEC shall not be held responsible for identifying any or all such patent rights.

International Standard IEC 61078 has been prepared by IEC technical committee 56: Dependability.

This third edition cancels and replaces the second edition published in 2006. This edition constitutes a technical revision.

This edition includes the following significant technical changes with respect to the previous edition:

- a) the structure of the document has been entirely reconsidered, the title modified and the content extended and improved to provide more information about availability, reliability and failure frequency calculations;
- b) Clause 3 has been extended and clauses have been introduced to describe the electrical analogy, the "non-coherent" RBDs and the "dynamic" RBDs;
- c) Annex B about Boolean algebra methods has been extended;
- d) Annex C (Calculations of time dependent probabilities), Annex D (Importance factors), Annex E (RBD driven Petri net models) and Annex F (Numerical examples and curves) have been introduced.

The text of this standard is based on the following documents:

| FDIS         | Report on voting |
|--------------|------------------|
| 56/1685/FDIS | 56/1694/RVD      |

Full information on the voting for the approval of this standard can be found in the report on voting indicated in the above table.

This publication has been drafted in accordance with the ISO/IEC Directives, Part 2.

The committee has decided that the contents of this publication will remain unchanged until the stability date indicated on the IEC web site under "<http://webstore.iec.ch>" in the data related to the specific publication. At this date, the publication will be

- reconfirmed,
- withdrawn,
- replaced by a revised edition, or
- amended.

IECNORM.COM : Click to view the full PDF of IEC 61078:2016

## INTRODUCTION

A reliability block diagram (RBD) is a pictorial representation of a system's successful functioning. It shows the logical connection of (functioning) components (represented by blocks) needed for successful operation of the system (hereafter referred to as "system success"). Therefore an RBD is equivalent to a logical equation of Boolean variables and the probabilistic calculations are primarily related to constant values of the block success/failure probabilities.

Many different analytical methods of dependability analysis are available, of which the RBD is one. Therefore, the purpose of each method and their individual or combined applicability in evaluating the availability, reliability, failure frequency and other dependability measures as may be applicable to a given system or component should be examined by the analyst prior to deciding to use the RBD. Consideration should also be given to the results obtainable from each method, data required to perform the analysis, complexity of analysis and other factors identified in this standard.

Provided that the blocks in the RBD behave independently from each other and that the order in which failures occur does not matter then the probabilistic calculations can be extended to time dependent probabilistic calculations involving non-repaired as well as repaired blocks (e.g. blocks representing non-repaired or repaired components). In this case three dependability measures related to the system successful functioning have to be considered: the reliability itself,  $R_S(t)$ , but also the availability,  $A_S(t)$  and the failure frequency,  $w_S(t)$ . While, for systems involving repaired components, the calculations of  $A_S(t)$  or  $w_S(t)$  can be done quite straightforwardly, the calculation of  $R_S(t)$  implies systemic dependencies (see definition 3.34) which cannot be taken into account within the mathematical framework of RBDs. Nevertheless, in particular cases, approximations of  $R_S(t)$  are available.

The RBD technique is linked to fault tree analysis [1]<sup>1</sup> and to Markov techniques [2]:

- The underlying mathematics is the same for RBDs and fault tree analysis (FTA): when an RBD is focused on system success, the FT is focused on system failure. It is always possible to transform an RBD into an FT and vice versa. From a mathematical point of view, RBD and FT models share dual logical expressions. Therefore, the mathematical developments and the limitations are similar in both cases.
- When the availability  $A_i(t)$  of one block can be calculated by using an individual Markov process [2] independent of the other blocks, this availability,  $A_i(t)$ , can be used as input for the calculations related to an RBD including this block. This approach where an RBD provides the logic structure and Markov processes numerical values of the availabilities of the blocks is called "RBD driven Markov processes".

For systems where the order of failures is to be taken into account, or where the repaired blocks do not behave independently from each other or where the system reliability,  $R_S(t)$ , cannot be calculated by analytical methods, Monte Carlo simulation or other modelling techniques, such as dynamic RBDs, Markov [2] or Petri net techniques [3], may be more suitable.

<sup>1</sup> Numbers in square brackets refer to the Bibliography.

## RELIABILITY BLOCK DIAGRAMS

### 1 Scope

This International Standard describes:

- the requirements to apply when reliability block diagrams (RBDs) are used in dependability analysis;
- the procedures for modelling the dependability of a system with reliability block diagrams;
- how to use RBDs for qualitative and quantitative analysis;
- the procedures for using the RBD model to calculate availability, failure frequency and reliability measures for different types of systems with constant (or time dependent) probabilities of blocks success/failure, and for non-repaired blocks or repaired blocks;
- some theoretical aspects and limitations in performing calculations for availability, failure frequency and reliability measures;
- the relationships with fault tree analysis (see IEC 61025 [1]) and Markov techniques (see IEC 61165 [2]).

### 2 Normative references

The following documents, in whole or in part, are normatively referenced in this document and are indispensable for its application. For dated references, only the edition cited applies. For undated references, the latest edition of the referenced document (including any amendments) applies.

IEC 60050-192, *International Electrotechnical Vocabulary – Part 192: Dependability* (available at <http://www.electropedia.org>)

IEC 61703, *Mathematical expressions for reliability, availability, maintainability and maintenance support terms*

### 3 Terms and definitions

For the purposes of this document, the terms and definitions given in IEC 60050-192 as well as the following apply.

NOTE Some terms have been taken from IEC 60050-192 and modified for the needs of this standard.

#### 3.1

##### **reliability block diagram**

##### **RBD**

logical, graphical representation of a system showing how the success states of its sub-items (represented by blocks) and combinations thereof, affect system success state

Note 1 to entry: The RBD technique was developed a long time ago when the term “reliability” was used as an umbrella term for “successful functioning”. This umbrella term is now superseded by “dependability”. Nevertheless it is still in use in the vernacular language and terms like “reliability engineering”, “reliability studies” or “reliability block diagram”. Therefore the term “reliability” used in RBD does not mean that this technique allows to calculate the reliability of a complex system straightforwardly from reliabilities of its constituting blocks (see 10.3.1.4).

Note 2 to entry: An RBD is a directed acyclic graph (i.e. a graph without loops) representing the logical links between the success state of a system and the success states of its constituting blocks. This logical architecture is mainly represented by conventional series and parallel graphical structures (see Clause 4 and Clause 7).

Note 3 to entry: RBDs may be extended to represent multi-state (i.e. more than two states) systems but those extensions cannot be handled within the Boolean framework.

[SOURCE: IEC 60050-192:2015, 192-11-03, modified – Notes added]

### 3.2

#### **Boolean related model**

mathematical model where the state of a system is represented by a logical function of Boolean variables representing the states of its components

Note 1 to entry: A Boolean variable  $a$  only has two values and a logical function of several Boolean variables also has only two values. Those two values may be for example, {0, 1}, {up, down}, {true, false}, {working, failed}, etc. The underlying mathematics behind the logical functions is Boolean algebra.

### 3.3

#### **RBD driven Markov process**

Markov process modelled by an RBD made of blocks modelled by individual sub-Markov models behaving independently from each other

Note 1 to entry: The underlying logic of an RBD allows to combine the individual availabilities of the blocks to obtain the system availability. When the block are modelled by small individual Markov processes (e.g. with less than 10 states) the RBD is equivalent to the Markov process related to the system which may encompass millions of states. This is the basis for most of the probabilistic calculations achieved with RBDs. Such Markov process built through the use of the RBD as guideline is called "RBD driven Markov process".

Note 2 to entry: The independent Markov process is developed in [2].

### 3.4

#### **dynamic RBD**

##### **DRBD**

reliability block diagram where the assumption of independency between the blocks is not fulfilled

Note 1 to entry: The blocks of a DRBD can have interactions with elements external to the RBD itself.

### 3.5

#### **non-coherent RBD**

reliability block diagram modelling a non-monotonic logical function

Note 1 to entry: A non-coherent RBD is an RBD where the blocks may appear both in direct and inverted states (see Table 3). In this case, some of the minimal success path (see definition 3.15) may have some blocks in down state and some minimal failure paths, some blocks in up state. The concepts of minimal tie and cut sets are no longer valid and have to be replaced by the concept of prime implicants.

Note 2 to entry: In a non-coherent RBD, a minimal success path may become a failure path by the repair of a block in down state and a minimal failure path may become a success path by a further failure of one block in up state. This is why they are named "non-coherent".

### 3.6

#### **item**

subject being considered

Note 1 to entry: In this International Standard the word "item" covers mainly the system modelled by the RBD and the "blocks" in the RBD.

[SOURCE: IEC 60050-192:2015, 192-01-01, modified – Notes to entry have been deleted, Note 1 to entry has been added]

### 3.7

#### **block**

basic element used to build an RBD

Note 1 to entry: A block has only two states (up and down) and may represent any item with two states (e.g. components, functions, subsystems) repaired or not repaired. By analogy and to simplify the wording, a repaired/non-repaired block represents a repaired/non-repaired item, the failure/repair of a block represents the

failure/repair of the modelled item and the up/down state of a block represents the up/down state of the modelled item.

Note 2 to entry: The number of states may be extended to more than two states in order to represent multi-state (i.e. more than two states) systems but those extensions cannot be handled within the Boolean framework.

Note 3 to entry: For the purposes of this standard, the blocks are divided between "elementary blocks" – or more simply, "blocks" – and "composite blocks" comprising several "elementary blocks". This is illustrated in Table 3.

### 3.8

#### **repeated block**

block appearing more than once in an RBD

Note 1 to entry: Repeated blocks represent the same physical items. This should not be confused with duplicated blocks which represent different but similar physical items used to implement redundancy.

Note 2 to entry: Repeated blocks can appear in the direct or inverted state (i.e.; the block appears in up state in a part of the RBD and down state in another part, or vice versa). They are very useful to represent RBDs related to a complex system or for representing RBDs in the form of success or failure paths (see 8.2).

### 3.9

#### **up state**

#### **available state**

state of being able to perform as required

Note 1 to entry: The absence of necessary external resources may prevent operation, but do not affect the up state.

Note 2 to entry: Up state relates to availability of the item.

Note 3 to entry: An item may be considered to be in an up state for some functions and in a down state for others, concurrently.

Note 4 to entry: The adjectives "up" and "available" designate an item in an up state.

Note 5 to entry: Within the context of RBDs, the state of a block is identical to the state of the component modelled by this block. Therefore a block in up state refers to a component in up state. The same concept applies to the RBD and the corresponding system.

Note 6 to entry: Within an RBD and by analogy with an electrical circuit, a block in the up state can be considered as a virtual switch in closed position and a block in the down state as a virtual switch in open position.

[SOURCE: IEC 60050-192:2015, 192-02-01, modified – Note 5 to entry and Note 6 to entry have been added]

### 3.10

#### **up time**

time interval for which the item is in an up state

[SOURCE: IEC 60050-192:2015, 192-02-02]

### 3.11

#### **mean up time**

#### **MUT**

expectation of the up time

[SOURCE: IEC 60050-192:2015, 192-08-09]

### 3.12

#### **down state**

#### **unavailable state**

state of being unable to perform as required, due to internal fault, or preventive maintenance

Note 1 to entry: "Down" state relates to unavailability of the item.

Note 2 to entry: The adjectives "down" or "unavailable" designate an item in a down state.

Note 3 to entry: Within the context of RBDs, the state of a block (respectively an RBD) is assimilated to the state of the component (respectively the system) modelled by this block (respectively this RBD). Therefore a block (respectively an RBD) in down state refers to a component (respectively a system) in down state.

Note 4 to entry: Within an RBD, a block in the down state may be interpreted as an open electrical switch.

[SOURCE: IEC 60050-192:2015, 192-02-20, modified – Note 3 and 4 to entry have been added]

### 3.13

#### **down time**

time interval for which the item is in a down state

[SOURCE: IEC 60050-192:2015, 192-02-21, modified – the figure and Note 1 to entry have been deleted]

### 3.14

#### **mean down time**

#### **MDT**

expectation of the down time

[SOURCE: IEC 60050-192:2015, 192-08-10]

### 3.15

#### **success path**

#### **tie set**

set of blocks, with each block in the set being in the up state thus resulting in the RBD to be in the up state

Note 1 to entry: The name tie set is given by analogy with an electrical circuit: the blocks in up states constitute a closed (tied) circuit between the RBD input and the RBD output.

### 3.16

#### **minimal tie set**

tie set such as that any failure of one of the blocks in up state also fails the whole RBD

Note 1 to entry: In a minimal tie set, every block in up state is necessary to retain the RBD in up state.

Note 2 to entry: The order of a minimal tie set is given by the number of blocks in the set in up state: order 1 comprises 1 block in up state, order 2 comprises 2 blocks in up state, etc.

### 3.17

#### **failure path**

#### **cut set**

set of blocks, with each block in the set being in the down state thus resulting in the RBD to be in the down state

Note 1 to entry: The name cut set is given by analogy with an electrical circuit: the blocks in down state constitute an open (cut) circuit between the RBD input and the RBD output.

### 3.18

#### **minimal cut set**

cut set such as that any restoration of one of the blocks in down state also restore the RBD to up state

Note 1 to entry: In a minimal cut set, every block in down state is necessary to retain the RBD in down state

Note 2 to entry: The order of a minimal cut set is given by the number of blocks in the down state: order 1 comprises 1 block in down state, order 2 comprises 2 blocks in down state, etc.

### 3.19

#### **disjoint set of elements**

set of Boolean elements whose intersections are empty

EXAMPLE If  $(C_i^d)$  is a set of disjoint cut sets then  $C_i^d \cap C_j^d = \emptyset \quad \forall i \neq j$  and therefore, the probability  $P(C_i^d \cap C_j^d) = 0 \quad \forall i \neq j$ .

Note 1 to entry: The term "element" is used here in the general meaning used in the set theory, i.e. a member of a given collection of objects.

Note 2 to entry: Disjoint elements are incompatible: when one is true, the other is false and vice versa. This describes mutual exclusiveness and, therefore, complete dependency between the elements.

### 3.20

#### availability

<item> ability to be in up state

[SOURCE: IEC 60050-192:2015, 192-01-23, modified – notes have been deleted]

### 3.21

$A(t)$

#### instantaneous availability

#### point availability

<measure> probability of being in up state at a given instant

[SOURCE: IEC 60050-192:2015, 192-08-01, modified]

### 3.22

$U(t)$

#### instantaneous unavailability

#### point unavailability

<measure> probability of being in down state at a given instant

[SOURCE: IEC 60050-192:2015, 192-08-04, modified]

### 3.23

$A^{\text{avg}}(t_1, t_2)$

#### mean availability

#### average availability

<measure> average value of the instantaneous availability over a given time interval  $[t_1, t_2]$

[SOURCE: IEC 60050-192:2015, 192-08-05, modified – Note 1 to entry has been deleted]

### 3.24

$U^{\text{avg}}(t_1, t_2)$

#### mean unavailability

#### average unavailability

<measure> average value of the instantaneous unavailability over a given time interval  $(t_1, t_2)$

Note 1 to entry: The mean unavailability of a safety instrumented system (see IEC 61508 [5]) is also called "average probability of failure on demand" (Acronym: PFD<sub>avg</sub>).

[SOURCE: IEC 60050-192:2015, 192-08-06, modified – Note 1 to entry has been replaced]

### 3.25

$A^{\text{st}}$

$A^{\text{as}}$

#### steady state availability

#### asymptotic availability

limit, if it exists, of the instantaneous availability, when the time tends to infinity

Note 1 to entry: Under certain conditions, the steady state availability may be expressed as the quotient  $MUT/(MUT+MDT)$ . See IEC 61703.

[SOURCE: IEC 60050-192:2015, 192-08-07, modified – Note 1 to entry modified]

### 3.26

#### **reliability**

<item> ability to perform as required, without failure, for a given time interval, under given conditions

[SOURCE: IEC 60050-192:2015, 192-01-24, modified – Notes to entry have been deleted]

### 3.27

$R(t_1, t_2)$

$R(t)$

#### **reliability**

<measure> probability of performing as required for time interval  $[t_1, t_2]$ , under given conditions

Note 1 to entry: The reliability  $R(t)$  is the reliability for the time interval  $[0, t]$ .

[SOURCE: IEC 60050-192:2015, 192-01-24, modified – Notes to entry were replaced by new Note 1 to entry]

### 3.28

$F(t_1, t_2)$

$F(t)$

#### **unreliability**

<measure> probability of not performing as required for time interval  $[t_1, t_2]$ , under given conditions

Note 1 to entry: The unreliability  $F(t)$  is the unreliability for the time interval  $[0, t]$ .

Note 2 to entry: The unreliability is the complement to 1 of the reliability:  $F(t)=1-R(t)$ .

### 3.29

$\lambda(t)$

#### **instantaneous failure rate**

#### **failure rate**

limit, if it exists, of the quotient of the conditional probability that an item goes from up state to down state within time interval  $[t, t + \Delta t]$ , and  $\Delta t$ , when  $\Delta t$  tends to zero, given that it has not been in down state within time interval  $[0, t]$

Note 1 to entry: The definition has been adapted from IEC 60050-192 to also cover repairable items:

- if the item has no internal built-in redundancy, the failure rate is identical to what it would be if it was not repairable;
- if the item has built-in internal redundancy it can remain in up state when some redundant parts are failed. Therefore, those failures are repairable as long as the whole item has no transition to the down state due to a further part failure.

Note 2 to entry: The terms failure rate (3.29), conditional failure intensity (3.30) and unconditional failure intensity (3.31) seem similar but they differ by the conditional events used in their definitions. Even if these parameters can have close numerical values in particular cases, they behave in different ways and should not be confused with each other.

[SOURCE: IEC 60050-192:2015, 192-05-06, modified – Notes to entry have been replaced by new notes to entry]

**3.30** $\lambda_v(t)$ **instantaneous conditional failure intensity****conditional failure intensity****Vesely failure rate**

limit, if it exists, of the quotient of the conditional probability that the failure of an item occurs within time interval  $[t, t + \Delta t]$ , and  $\Delta t$ , when  $\Delta t$  tends to zero, given that the item was in up state at time  $t$  and at time 0

Note 1 to entry: See Note 2 to entry of the failure rate definition (3.29).

**3.31** $w(t)$ **instantaneous unconditional failure intensity****unconditional failure intensity****failure frequency**

limit, if it exists, of the quotient of the conditional probability that the failure of an item occurs within time interval  $[t, t + \Delta t]$ , and  $\Delta t$ , when  $\Delta t$  tends to zero, given that the item was in up state at time 0

Note 1 to entry: See Note 2 to entry of the failure rate definition (3.29).

Note 2 to entry: This parameter is equivalent to the failure intensity defined in IEC 60050-192:2015, 192-05-08. The name has been modified to distinguish it from the term, conditional failure intensity (3.30).

**3.32** $w^{\text{avg}}(0, T)$ **average failure frequency**

number of failures per unit of time of an item averaged over a given period of time  $T$

Note 1 to entry: If  $N$  is the number of failures of the item over  $[0, T]$  then the average failure frequency over this period of time is calculated as  $w^{\text{avg}}(0, T) = N/T$ .

Note 2 to entry: If  $m$  is the mean time between failures (see IEC 60050-192) of an item then the average number of failures occurring over  $[0, T]$  is  $N \approx T/m$ . Therefore  $w^{\text{avg}}(0, T) = N/T \approx 1/m$ .

Note 3 to entry: Mathematically speaking,  $w^{\text{avg}}(0, T)$  is the average of  $w(t)$  over  $[0, T]$ . Then

$$w^{\text{avg}}(0, T) = \frac{1}{T} \int_0^T w(\tau) d\tau.$$

**3.33****mean operating time to failure****MTTF**

expectation of operating time to failure

Note 1 to entry: In the case of non-repairable items with an exponential distribution of times to failure (thus a constant failure rate) the MTTF is numerically equal to the reciprocal of the failure rate. This is also true for repairable items if, after restoration, they can be considered to be "as-good-as-new".

Note 2 to entry: This note only applies to the French language.

[SOURCE IEC 60050-192, 192-05-11, modified – Note 2 to entry has been deleted]

**3.34****systemic dependency****holistic dependency**

dependency between the parts of a system which are related to the system considered as a whole

EXAMPLE 1 A single repair team constitutes a systemic dependency between repairable items: when an item fails it can be repaired only if the repair team is not busy due to the repair of another item belonging to the system.

EXAMPLE 2 The reliability  $R(t)$  of a system can be expressed as the probability for the system to be in up state at time  $t$ , provided it has never been in down state over the interval  $[0, t]$ . Therefore only the sequences of events

which do not lead to the down state over  $[0, t]$  can be retained and the sequences of events which include a succession "up state"→"down state"→"up state" have to be excluded from the calculations. This implies that, with regards to the calculation of  $R(t)$ , an item going to the down state is repairable only if the system remains in up state during the repair of the item. Therefore, with regards to the calculation of  $R(t)$ , the items are repairable or not depending on the states of the other blocks and this constitutes systemic dependencies between all blocks of the RBD modelling the system.

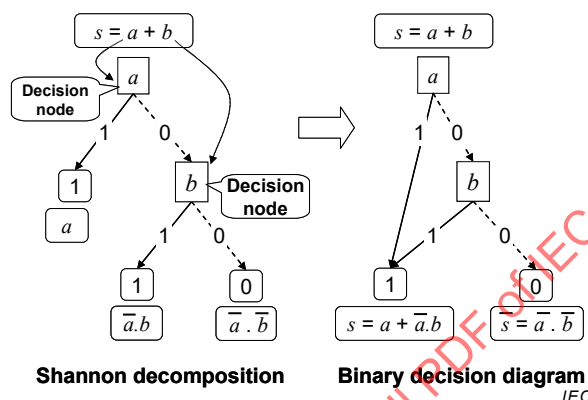
Note 1 to entry: A systemic dependency cannot be described as a local property of the individual items of the system.

### 3.35

#### binary decision diagram

#### BDD

compact decision tree based on the Shannon decomposition of a Boolean expression



**Figure 1 – Shannon decomposition of a simple Boolean expression and resulting BDD**

Note 1 to entry: Figure 1 illustrates how the simple Boolean expression  $s = a + b$  can be transformed into a decision tree by using the Shannon decomposition and then how the corresponding BDD is obtained by gathering the paths giving the same value (0 or 1) of the Boolean expression.

Note 2 to entry: Mathematically speaking, BDDs are rooted, directed acyclic graphs. This is a data structure expressing Boolean expressions as unions of disjointed terms. This, in turn, leads to exact probabilistic calculations. This is the state of the art with regards to probabilistic calculation on Boolean related models. More details about BDDs can be found in reference [33].

Note 3 to entry: This note only applies to the French language.

## 4 Symbols and abbreviated terms

**Table 1 – Acronyms used in IEC 61078**

| Abbreviation/Acronym | Meaning                                                                |
|----------------------|------------------------------------------------------------------------|
| BDD                  | Binary decision diagram.                                               |
| CCF                  | Common cause failure.                                                  |
| FMEA                 | Failure modes and effects analysis.                                    |
| FT, FTA              | Fault tree, fault tree analysis.                                       |
| MTTF                 | Mean operating time to failure.                                        |
| MTTR                 | Mean time to restoration.                                              |
| DRBD                 | Dynamic reliability block diagram.                                     |
| $PFD_{avg}$          | Average of the probability of failure on demand (mean unavailability). |
| PAND                 | Priority AND gate.                                                     |
| PN                   | Petri net.                                                             |
| RBD                  | Reliability block diagram.                                             |
| SEQ                  | Sequential gate.                                                       |

**Table 2 – Symbols used in IEC 61078**

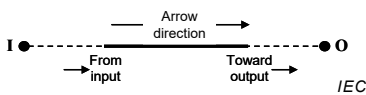
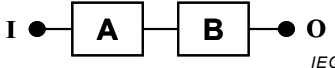
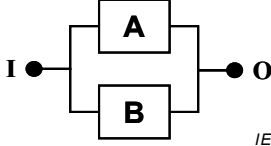
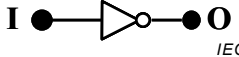
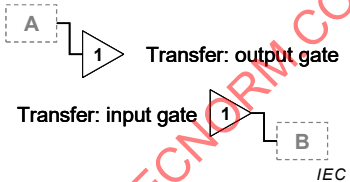
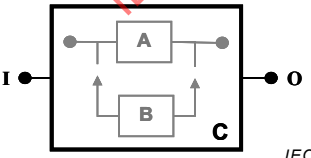
| Symbol                                                                      | Meaning                                                                                                            |
|-----------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $S$                                                                         | System modelled by an RBD.                                                                                         |
| $X \in (A, B, C, \dots), X \neq S$                                          | Blocks used within an RBD. $S$ is reserved for the system and the other letters for the blocks.                    |
| $s = S$ in "up" state                                                       | Boolean variable indicating that the system $S$ is in the up state. This is also the event "S in up state".        |
| $\bar{s} = S$ in "down" state                                               | Boolean variable indicating that the system $S$ is in the down state. This is also the event "S in down state".    |
| $x = X$ in "up" state                                                       | Boolean variable indicating that block $X$ is in the up state. This is also the event "X in up state".             |
| $\bar{x} = X$ in "down" state                                               | Boolean variable indicating that block $X$ is in the down state. This is also the event "X in down state".         |
| $(\Pi_i), (C_i)$                                                            | Minimal success paths (minimal tie sets), minimal failure paths (minimal cut sets).                                |
| $(\Pi_i^d), (C_i^d)$                                                        | Disjoint success paths (disjoint tie sets), disjoint failure paths (disjoint cut sets).                            |
| $P(\cdot)$                                                                  | Probability function.                                                                                              |
| $P_s = P(S \text{ in "up" state})$                                          | Constant probability that the system $S$ is in the up state.                                                       |
| $P_{\bar{s}} = P(S \text{ in "down" state})$                                | Constant probability that the system $S$ is in the down state.                                                     |
| $P_x = P(X \text{ in "up" state})$                                          | Constant probability that block $X$ is in the up state.                                                            |
| $P_{\bar{x}} = P(X \text{ in "down" state})$                                | Constant probability that block $X$ is in the down state.                                                          |
| $P_{s x} = P(S \text{ in "up" state} \mid X \text{ in "up" state})$         | Conditional probability that the system $S$ is in the up state given that block $X$ is in the up state.            |
| $P_{s \bar{x}} = P(S \text{ in "up" state} \mid X \text{ in "down" state})$ | Conditional probability that the system $S$ is in the up state given that block $X$ is in down state.              |
| $P_s(t)$                                                                    | Time dependent probabilities that the system $S$ is in the up state.                                               |
| $P_x(t)$                                                                    | Time dependent probability that block $X$ is in the up state.                                                      |
| $P_{\bar{s}}(t)$                                                            | Time dependent probabilities that the system $S$ is in the down state.                                             |
| $P_{\bar{x}}(t)$                                                            | Time dependent probability that block $X$ is in the down state.                                                    |
| $P(OK, t)$                                                                  | Probability of state OK at time $t$ .                                                                              |
| $t, t_i$                                                                    | Current instant of time.                                                                                           |
| $T, T_i$                                                                    | Time duration.                                                                                                     |
| $[t_1, t_2], [0, T] \equiv [t_1 = 0, t_2 = 0 + T]$                          | Time interval, $t_1 < t_2$                                                                                         |
| $A_S(t) = P(S \text{ in "up" state at time } t)$                            | Availability of the system $S$ at time $t$ .                                                                       |
| $A_S^{\text{avg}}(t_1, t_2), A_S^{\text{avg}}(0, T), A_S^{\text{avg}}(T)$   | Average availability of the system $S$ over the time interval $[t_1, t_2]$ or $[0, T]$ .                           |
| $A_S^{\text{avg}}, A_S^{\text{st}}, A_S^{\text{as}}$                        | Average availability of the system $S$ over $[0, \infty]$ , steady state availability and asymptotic availability. |
| $A_X(t) = P(X \text{ in "up" state at time } t)$                            | Availability of block $X$ at time $t$ .                                                                            |
| $A_i(t) = A_{X_i}(t) = P(X_i \text{ in "up" state at time } t)$             | Availability of block $X_i$ at time $t$ .                                                                          |
| $A_X^{\text{avg}}(t_1, t_2), A_X^{\text{avg}}(0, T), A_X^{\text{avg}}(T)$   | Average availability of block $X$ over the time interval $[t_1, t_2]$ or $[0, T]$ .                                |

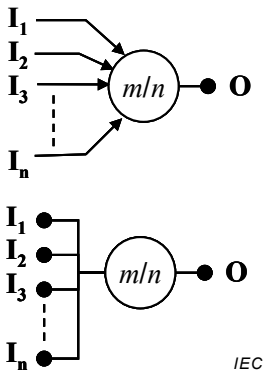
| Symbol                                                                    | Meaning                                                                                                                                                                         |
|---------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $A_X^{\text{avg}}, A_X^{\text{st}}, A_X^{\text{as}}$                      | Average availability of block X over $[0, \infty]$ , steady state availability and asymptotic availability.                                                                     |
| $U_S(t) = P(\text{S in "down" state at time } t)$                         | Unavailability of the whole system S at time $t$ .                                                                                                                              |
| $U_S^{\text{avg}}(t_1, t_2), U_S^{\text{avg}}(0, T), U_S^{\text{avg}}(T)$ | Average unavailability of the system S over the time interval $[t_1, t_2]$ or $[0, T]$ .                                                                                        |
| $U_S^{\text{avg}}, U_S^{\text{st}}, U_S^{\text{as}}$                      | Average unavailability of the system S over $[0, \infty]$ , steady state unavailability and asymptotic unavailability.                                                          |
| $U_X(t) = P(\text{X in "down" state at time } t)$                         | Unavailability of block X at time $t$ .                                                                                                                                         |
| $U_i(t) = U_{X_i}(t) = P(X_i \text{ in "down" state at time } t)$         | Unavailability of block $X_i$ at time $t$ .                                                                                                                                     |
| $U_X^{\text{avg}}(t_1, t_2), U_X^{\text{avg}}(0, T), U_X^{\text{avg}}(T)$ | Average unavailability of block X over the time interval $[t_1, t_2]$ or $[0, T]$ .                                                                                             |
| $U_X^{\text{avg}}, U_X^{\text{st}}, U_X^{\text{as}}$                      | Average unavailability of block X over $[0, \infty]$ , steady state unavailability and asymptotic unavailability.                                                               |
| $R_S(t) = P(\text{S in "up" state all over } [0, t])$                     | Reliability of the system S over $[0, t]$ .                                                                                                                                     |
| $F_S(t) = 1 - R_S(t)$                                                     | Unreliability of the overall system S over $[0, t]$ (failure distribution of the system S).                                                                                     |
| $f_S(t)$                                                                  | Time to failure density functions of system S.                                                                                                                                  |
| $R_X(t) = P(\text{X in "up" state all over } [0, t])$                     | Reliability of block X over $[0, t]$ .                                                                                                                                          |
| $F_X(t) = 1 - R_X(t)$                                                     | Unreliability of block X over $[0, t]$ (failure distribution of block X).                                                                                                       |
| $f_X(t)$                                                                  | Time to failure density functions of block X.                                                                                                                                   |
| $\lambda_S, \lambda_S(t)$                                                 | Constant and time dependent failure rates of the system S.                                                                                                                      |
| $\lambda_{VS}, \lambda_{VS}(t)$                                           | Conditional failure intensity (Vesely failure rate) of the overall system.                                                                                                      |
| $w_S(t)$                                                                  | Unconditional failure intensity (failure frequencies) of the system S, at time $t$ .                                                                                            |
| $W_S(0, T), W_S(T)$                                                       | Expected number of failures of the system S over $[0, T]$ .                                                                                                                     |
| $w_S^{\text{avg}}(0, T), w_S^{\text{avg}}(T)$                             | Average unconditional failure intensity (average failure frequency) of the system S over $[0, T]$ .                                                                             |
| $\lambda_X, \lambda_X(t)$                                                 | Constant and time dependent failure rates of block X.                                                                                                                           |
| $w_X(t)$                                                                  | Unconditional failure intensity (failure frequencies) of block X, at time $t$ .                                                                                                 |
| $W_X(0, T), W_X(T)$                                                       | Expected number of failures of block X over $[0, T]$ .                                                                                                                          |
| $w_X^{\text{avg}}(0, T), w_X^{\text{avg}}(T)$                             | Average unconditional failure intensity (average failure frequency) of block X over $[0, T]$ .                                                                                  |
| $\lambda_{Xd}$                                                            | Dormant failure rate of block X.                                                                                                                                                |
| $\mu_X, \mu_X(t)$                                                         | Constant or time-dependent repair rates of block X.                                                                                                                             |
| $\binom{n}{r}$                                                            | Number of ways of selecting $r$ blocks from $n$ blocks without order:<br>$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$                                                                   |
| "0", "1"                                                                  | Symbols used in truth tables, Karnaugh map, Shannon decomposition and binary decision diagrams to denote down (failure) states and up (success) states of blocks or of systems. |
| $\cap, \bullet$                                                           | Boolean operators denoting AND logic, e.g. $a \cap b, a \bullet b$ (intersection).                                                                                              |

| Symbol         | Meaning                                                              |
|----------------|----------------------------------------------------------------------|
| $\cup, +$      | Boolean operators denoting OR logic, e.g. $a \cup b, a + b$ (union). |
| $\Phi, \Omega$ | "Impossible" event and "certain" events.                             |

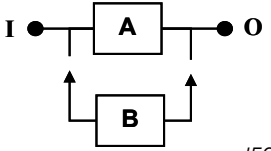
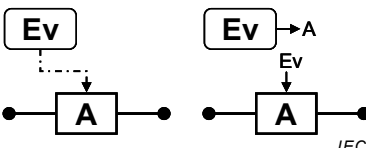
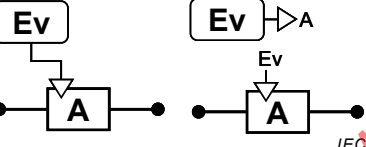
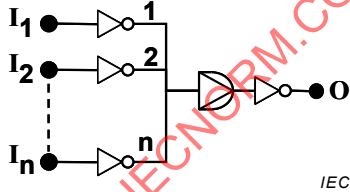
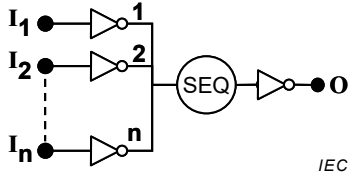
The use of the symbols in Table 3 is recommended when drafting a reliability block diagram (RBD).

**Table 3 – Graphical representation of RBDs: Boolean structures**

| Graphical representation                                                                                                                                                                                                    | Meaning                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <br>                                                      | <p>Indicates input.</p> <p>Indicates output.</p> <p>Such indications are used for convenience. They are not mandatory, but may be useful where connections have a directional significance.</p>                                                                                                                      |
|                                                                                                                                            | <p>An RBD is a directed graph. The direction of each link is from input to output (i.e., from left to right). When needed, arrows may be added to avoid confusion.</p>                                                                                                                                               |
|                                                                                                                                            | <p>(Elementary) block: grouping of equipment, components, units or other system elements.</p>                                                                                                                                                                                                                        |
|                                                                                                                                          | <p>Series structure: the system is up if A and B are in up states.</p> <p>This represents the logic functions <math>s = a \cap b</math>. From a failure point of view it is equivalent to <math>\bar{s} = \bar{a} \cup \bar{b}</math>.</p>                                                                           |
|                                                                                                                                          | <p>Parallel structure (full active redundancy): the system is up if A or B are in up state.</p> <p>This represents the logic functions <math>s = a \cup b</math>. From a failure point of view it is equivalent to <math>\bar{s} = \bar{a} \cap \bar{b}</math>.</p>                                                  |
|                                                                                                                                          | <p>NOT gate: the output of the gate is equal to 0 when its input is equal to 1 and vice-versa.</p>                                                                                                                                                                                                                   |
|                                                                                                                                          | <p>Transfer gates: the output <math>i</math> is linked to the input(s) with the same name. This is useful to:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>– split large RBDs into several smaller parts (sub-RBDs);</li> <li>– transfer the output at one place in an RBD to another place in the RBD.</li> </ul>     |
|                                                                                                                                          | <p>Composite block: grouping of elementary blocks. This may be useful to simplify the RBD drawing, to indicate parts needing further development or to gather non independent individual blocks into a structure independent of the rest of the RBD.</p>                                                             |
|  <b>Direct state</b><br> <b>Inverted state</b><br>IEC | <p>Repeated blocks: the same block representing a given item appears in several places of the RBD either in the direct state or the inverted state i.e. when the block A in direct state is "up", the block in the inverted state is "down" and vice versa.</p> <p>These symbols are used for non-coherent RBDs.</p> |
|                                                                                                                                          | <p>External element interacting with one or several blocks of the RBD.</p> <p>This symbol is used for dynamic RBDs.</p>                                                                                                                                                                                              |

| Graphical representation                                                          | Meaning                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |
|-----------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|  | <p>Success majority vote logic (symbol <math>m/n</math>): at least <math>m</math>-out-of-<math>n</math> blocks are needed for system success in an active redundant configuration.</p> <p>NOTE It is important to make the difference between the "success" majority vote logics implemented in RBDs and the "failure" majority vote logics implemented in fault trees. Generally the context (RBD or fault tree) is sufficient to show the difference. The relationship is the following:<br/> <math>(m/n)_{\text{Suc}} \equiv ([n-m+1]/n)_{\text{Fail}}</math>.</p> |

**Table 4 – Graphical representation of RBDs: non-Boolean structures/DRBD**

| Graphical representation                                                            | Meaning                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    |
|-------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|    | <p>Standby redundancy: B takes over the function of A when A fails.</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    |
|  | <p>Functional dependencies: the state of A depends on the event Ev. This event may be external or internal to the RBD. This symbol reminds that a dependency exists but the type of dependency may be diverse and has to be described somewhere else.</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |
|  | <p>Complete functional dependency: when the event Ev occurs, then block A goes to the down state. This event may be external or internal to the RBD. It plays the role of the trigger used in similar structures implemented in dynamic fault trees.</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |
|  | <p>PAND gate: the output goes to the down state when the inputs go to the down states in the order <math>I_1</math>, then <math>I_2</math>, then <math>I_3</math>, ... then <math>I_n</math>. The inputs <math>I_1</math>, <math>I_2</math>, <math>I_3</math>, ... <math>I_n</math> behave independently from each other.</p> <p>This gate has been introduced to be used in dynamic fault trees and this is why NOT gates are used to invert the inputs and the output in order to be consistent with the RBD logic.</p>                                                                                                                                                                                                                                  |
|  | <p>SEQ gate: the output goes to the down state when the inputs go to the down states in the order <math>I_1</math>, then <math>I_2</math>, then <math>I_3</math>, ... then <math>I_n</math>. The inputs don't behave independently as <math>I_n</math> cannot go to the down state if <math>I_{n-1}</math> is not already in the down state, <math>I_{n-1}</math> cannot go to the down state if <math>I_{n-2}</math> is not already in the down state, etc., <math>I_2</math> cannot go to the down if <math>I_1</math> is not already in the down state.</p> <p>This gate has been introduced to be used in dynamic fault trees and this is why NOT gates are used to invert the inputs and the output in order to be consistent with the RBD logic.</p> |

## 5 Preliminary considerations, main assumptions, and limitations

### 5.1 General considerations

An RBD models a system using the logical links existing between the success state (up state) of the system (i.e., the overall RBD) and the success states (up states) of its components

(i.e., the blocks of the RBD). Therefore, an RBD embeds a logical formula and this is why an RBD is not necessarily similar to the physical architecture of the system (e.g. two redundant isolation valves in series on the same pipe are represented by two blocks in parallel into the corresponding RBD).

An RBD can be firstly used for qualitative analysis purposes by identifying the combinations of the blocks in the up state allowing the system to be in an up state (success paths or tie sets) or the combinations of the blocks being in down states leading to the system down state (failure paths or cut sets).

Secondly an RBD can be used for probabilistic calculations and, as this is a static representation (i.e., independent of the time), the probabilistic rules are basically related to blocks with constant probabilities of success or failure.

This can be extended to time dependent probabilistic calculations. This may be difficult for reliability calculations but, for availability and frequency calculations and provided that the blocks behave independently from each other, there is no restriction, other than mathematical tractability, on the distribution that may be used to describe the times to failure or repair of the blocks. This allows, for example, to model the (un)availabilities of each of the blocks by individual analytical formulae whose results are combined through the logic of the RBD to obtain the system (un)availability. When those analytical formulae are obtained through individual Markov processes, the RBD is equivalent to a global Markov process modelling the whole system. Such a model is called "RBD driven Markov process". This is the basis for most of the probabilistic calculations achieved with RBDs.

## 5.2 Pre-requisite/main assumptions

An RBD is an acyclic directed graph (i.e. no loops or retroactions are modelled in an RBD) which can be drawn by using the basic logical structures presented in Table 3. It is used to model the behaviour of a system on the basis of the following fundamental assumptions:

- a) the system has only two states: working ("success" state, "up" state) or failed ("down" state);
- b) the blocks of an RBD model the components of a system or parts (e.g. groups of components) of a system. Each of them has only two states: working ("success" state, "up" state) or failed ("down" state);
- c) the RBD represents the logic linking the success state of the system to the success states of its components (blocks);
- d) each block behaves independently from the others at all times.

The above assumptions have to be generally fulfilled to apply the analytical calculations (i.e. calculations with formulae) developed in this standard. When they are not fulfilled, the analytical calculations can be replaced by Monte Carlo simulation or other techniques like Markov analysis [2] or Petri nets [3] or the dynamic RBDs described in 12.2 and Annex E.

## 5.3 Limitations

The assumptions presented in 5.2 constitute some limitations but there are other limitations which are less obvious when dealing with time dependent probabilities. In particular, the users of this standard should be aware of the issues introduced by the independency requirements which shall be fulfilled at all times. For example:

- a) sequential events are outside the scope of the Boolean models. Therefore they cannot, in principle, be handled by RBDs. Nevertheless, in simple cases like standby redundancy, it is possible to overcome the problem by considering composite blocks (see Table 3 and 7.5.3) independently of the other blocks;
- b) availability or frequency calculations of repaired systems assume that the repairs of repaired blocks are independent from each other all the time, i.e. each block has its own repair team;

- c) reliability calculations of repaired systems imply that a failed block can be repaired only if the system is still operating when the block failure occurs. This introduces systemic dependencies between the blocks states, and between the blocks and the system states (see 10.3.1.4). This infringes the assumption described in 5.2 d) and so, except in particular cases and with approximations, analytical reliability calculations are generally not possible.

In short, provided that the assumptions in 5.2 are fulfilled, the RBD technique can be used straightforwardly for qualitative analysis and availability/frequency calculations but it can be used for reliability calculation only in particular cases.

It should be noted that, when dealing with probabilistic calculations, good approximations are available with low probabilities (e.g. failure of components/blocks) which cannot be used with high probabilities (e.g. probabilities of success of components/blocks). Therefore to overcome this limitation, it is often better to work with probabilities of failure (unavailability or unreliability) rather than probabilities of success (availability or reliability).

## **6 Establishment of system success/failed states**

### **6.1 General considerations**

A prerequisite for constructing system reliability models is a sound understanding of the ways in which the system and its components can operate. Systems often require more than one success/failure definition. These should be defined and listed. An RBD diagram can be made at different levels: system level, sub-system (module) level or assembly level. When an RBD is made for further analysis (for example for FMEA analysis), a level suitable for such analysis has to be chosen.

In addition, there should be clear statements concerning

- the functions to be performed,
- the performance parameters and permissible limits on such parameters,
- the environmental and operating conditions.

After establishing the system's success/failure definition the next step is to identify logical blocks in order to divide the system as appropriate for the purpose of the reliability analysis. Particular blocks may represent system substructures, which in turn may be represented by other RBDs (system reduction – see 11.2).

For the quantitative evaluation of an RBD, various methods are available. Depending on the type of structure, simple Boolean techniques (see 7) and/or path and cut set analyses (see 8) may be employed. Calculations may be made using analytical methods (e.g. basic component availability methods) or Monte Carlo simulation. An advantage with Monte Carlo simulation is that the probabilities of the events in the RBD do not have to be combined analytically since the simulation itself takes into account whether each block is failed or functional (see 12.2 and Clause F.5).

Since the RBD describes the logical relations needed for the system to function, the block diagram does not necessarily represent the way in which the hardware is physically connected, although an RBD should generally follow, as far as possible, the physical system connections.

### **6.2 Detailed considerations**

#### **6.2.1 System operation**

It may be possible to use a system in more than one functional mode. If separate systems were used for each mode, such modes should be treated independently of other modes, and separate reliability models should be used accordingly. Therefore, when the same system is

used to perform all these functions, separate diagrams should be used for each type of operation. Clear statements of what constitutes system success/failure for each aspect of system operation is a prerequisite.

### 6.2.2 Environmental conditions

The system performance specifications should be accompanied by a description of the environmental conditions under which the system is designed to operate. Also included should be a description of all the conditions to which the system will be subjected during transportation, storage and use.

A particular piece of equipment is often used in more than one environment, for example, on shipboard, in an aircraft or on the ground. When this is so, reliability evaluations may be carried out using the same RBD each time but using the appropriate component/block failure rates for each environment.

### 6.2.3 Duty cycles

The relationship between calendar time, operating time and on/off cycles should be established. If it can be assumed that the process of switching equipment on and off does not in itself promote failures, and that the failure rate of equipment during non-use periods is negligible, then only the actual working time of the equipment needs to be considered.

However, in some instances, the process of switching on and off is in itself the prime cause of equipment failure, and equipment may have a higher failure rate in non-use period than when in-service (e.g. due to moisture and corrosion). In complex cases where only parts of the system are switched on and off, modelling techniques other than RBDs (e.g. Markov analysis or Petri nets) may be more suitable.

## 7 Elementary models

### 7.1 Developing the model

The first step is to select a system success/failure definition. If more than one definition is involved, a separate RBD may be required for each. The next step is to divide the system into blocks to reflect the logical behaviour so that each block is statistically independent of the others. Attempt should be made to make the blocks as large as possible while ensuring that each block contains (preferably) no redundancy.

The next step is to refer to the system success/failure definition and construct a diagram that connects the blocks to form a "success path" (see 3.15). As indicated in the diagrams that follow, the various success paths, between the input and output of the diagram, pass through those combinations of blocks that need to function in order that the system functions.

**NOTE** In practice, depending on the system configuration, it can be necessary to make repeated attempts at constructing the RBD (each time bearing in mind the steps referred to above) before a suitable block diagram is finalized.

### 7.2 Series structures

If all the blocks are required to function for the system to function, then the corresponding RBD will be one in which all the blocks are connected in series as illustrated in Figure 2.

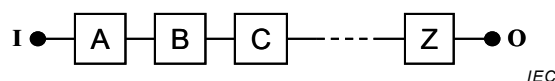


Figure 2 – Series reliability block diagram

In this diagram "I" is the input, "O" the output and A, B, C, ... Z are the blocks which together constitute the system. RBDs of this type are known as "series" RBDs or "series models".

This structure models the following logical function:  $s = a \bullet b \bullet c \bullet \dots \bullet z$  (1)

where  $a$ ,  $b$ ,  $c$  and  $z$  represent the success states of the blocks A, B, C and Z (see Table 2) and  $s$  the success state of the corresponding system.

### 7.3 Parallel structures

A different type of RBD is needed when only one system component (i.e. one block) is required for system success. This is the case when redundant components are implemented.

This is modelled by parallel structures such as that presented in Figure 3 and which represent several redundant blocks. In this structure, the system is down if and only if all blocks are down.

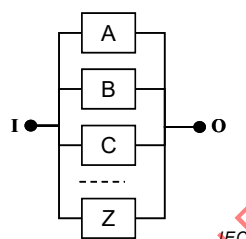


Figure 3 – Parallel reliability block diagram

This structure models the following logical function:  $s = a + b + c + \dots + z$  (2)

### 7.4 Mix of series and parallel structures

The basic structure presented in Figure 2 and Figure 3 can be used to model more complex RBDs. For example, if the entire RBD presented in Figure 2 is duplicated (i.e. made redundant), then the RBD illustrated by Figure 4 is obtained. Alternatively, if each block within the RBD presented in Figure 2 is duplicated, the RBD illustrated by Figure 5 is obtained. Diagrams of this type are known as "series/parallel" RBDs or "series/parallel" models. Note that the terms "duplicated", "redundant" and "parallel" are very similar in meaning but should not be used interchangeably.

- 1) Duplicated is related to the way the RBD is built by repeating similar structures. For example, Figure 4 is the duplication of the structure presented in Figure 2 and Figure 5 is only the duplication of the components. In fact the parallel structures (B1,B2), (C1,C2) etc. are the duplication in series of the parallel structure (A1, A2).
- 2) Redundant is related to the fact that if one component fails, another one can perform its function. For example, A1 and A2 in Figure 5 are redundant.
- 3) Parallel is related to the logic of the architecture of the system and to the graphical representation. For example, A1 and A2 are drawn in parallel in Figure 5 because they are redundant.

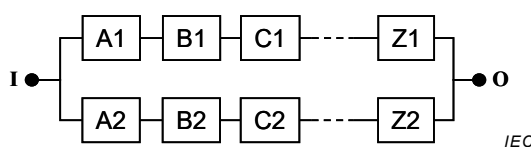
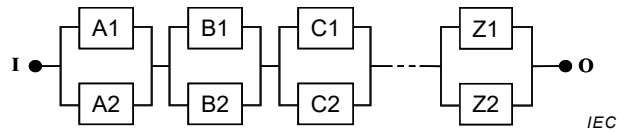


Figure 4 – Parallel structure made of duplicated series sub-RBD

This structure models the following logical function:

$$s = (a_1 \bullet b_1 \bullet \dots \bullet z_1) + (a_2 \bullet b_2 \bullet \dots \bullet z_2) \quad (3)$$

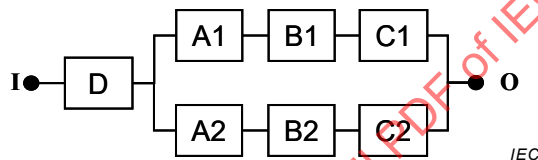


**Figure 5 – Series structure made of parallel reliability block diagram**

This structure models the following logical function:

$$s = (a_1 + a_2) \bullet (b_1 + b_2) \bullet \dots \bullet (z_1 + z_2) \quad (4)$$

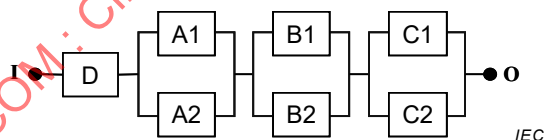
RBDs used for modelling system reliability are often more complicated mixtures of series and parallel structures. For example, a duplicated communication link comprising three repeaters (A1, B1, C1 and A2, B2, C2), and a common power supply block (D) may take the form of, for example, Figure 6 or Figure 7.



**Figure 6 – General series-parallel reliability block diagram**

This structure models the following logical function:

$$s = d \bullet [(a_1 \bullet b_1 \bullet c_1) + (a_2 \bullet b_2 \bullet c_2)] \quad (5)$$



**Figure 7 – Another type of general series-parallel reliability block diagram**

This structure models the following logical function:

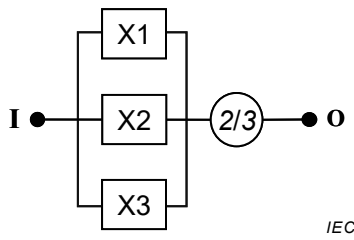
$$s = d \bullet (a_1 + a_2) \bullet (b_1 + b_2) \bullet (c_1 + c_2) \quad (6)$$

On account of the assumed statistical independence stated above, failure of any block does not give rise to a change in the probability of failure of any other block within the system. In particular, failure of a redundant block does not affect system power supplies or signal sources.

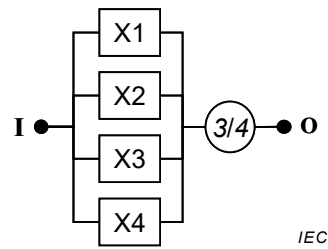
## 7.5 Other structures

### 7.5.1 $m$ out of $n$ structures

The need frequently arises to model systems where the success definition is that  $m$  or more out of  $n$  items connected in parallel are required for system success. Such logical structures are often called "majority vote" structures. For example see RBDs shown in Figure 8 or Figure 9.



**Figure 8 – 2 out of 3 redundancy**



**Figure 9 – 3 out of 4 redundancy**

Thus, in Figure 8 at least 2 blocks are required for system success and in Figure 9, 3 blocks are required for system success. In both cases the failure of one item is tolerated but failure of two or more items is not.

These structures model the following logical functions:

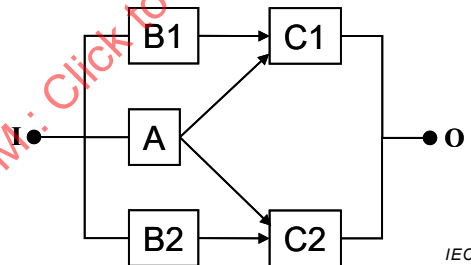
– 2/3 redundancy:  $s = x_1 \bullet x_2 + x_1 \bullet x_3 + x_2 \bullet x_3$ ; (7)

– 3/4 redundancy:  $s = x_1 \bullet x_2 \bullet x_3 + x_1 \bullet x_2 \bullet x_4 + x_1 \bullet x_3 \bullet x_4 + x_2 \bullet x_3 \bullet x_4$ . (8)

These logical functions cannot be represented by a simple combination of elementary series and parallel structure without the implementation of repeated blocks.

### 7.5.2 Structures with common blocks

Most RBDs are easily understood and the conditions for system success are evident. Not all RBDs, however, can be simplified to combinations of series or parallel structures with blocks appearing only once. The RBD in Figure 10 is an example with a block A being common to two paths.



**Figure 10 – Diagram not easily represented by series/parallel arrangement of blocks**

This structure models the following logical function:

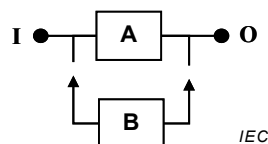
$$s = (b_1 \bullet c_1) + a \bullet (c_1 + c_2) + (b_2 \bullet c_2) \quad (9)$$

Again, the diagram is self-explanatory. System success is achieved if blocks B1 and C1 are both in up state, or blocks A and C1, or A and C2, or finally B2 and C2. Figure 10 could represent the fuel supply to engines of a light aircraft. B1 represents the supply to the port engine (C1), B2 represents the supply to the starboard engine (C2), and A represents a common backup supply to both engines. The system success definition is that at least one engine needs to be working for aircraft success, or alternatively, both engines need to fail for the aircraft to fail.

It should be noted that in all the above diagrams (Figure 2 to Figure 10), no block appears more than once in a given diagram. The procedures for developing the reliability expression

for diagrams of this type are outlined in 8.2. Figure 18 and Figure 19 provide series-parallel RBDs equivalent to Figure 10 where repeated blocks are implemented.

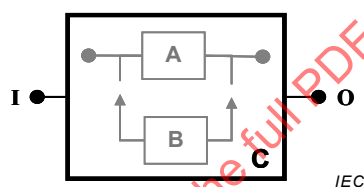
### 7.5.3 Composite blocks



**Figure 11 – Example of RBD implementing dependent blocks**

Figure 11 models a system with cold standby redundancy where the item B starts when the item A fails and with a perfect switching from A to B. Then in the corresponding RBD, the blocks A and B are not independent and this structure infringes the fundamental assumption of independency between blocks which is the basis of this standard.

As blocks A and B cannot be considered independently from each other, it is necessary to consider them as a whole and this can be done by the use of a composite block like the block C presented in Figure 12.

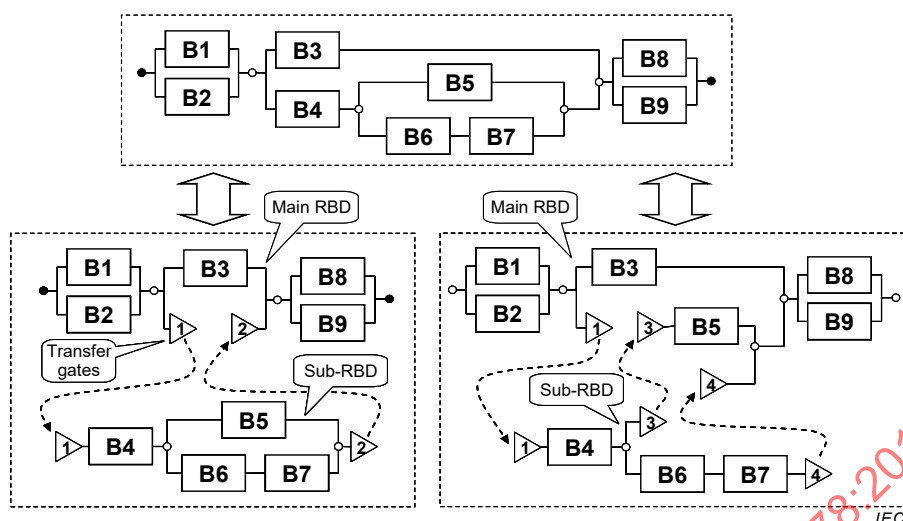


**Figure 12 – Example of a composite block**

The composite block C has two states, success/failure. Then if it is independent from the other blocks of the RBD, it can be handled as a single block. Of course its probability of failure/success has to be calculated by taking into account the blocks A and B and the dependency between them.

### 7.6 Large RBDs and use of transfer gates

RBDs related to industrial systems can be too large to be drawn as a whole on a single sheet of paper. In this case, they can be split in several smaller parts (sub-RBDs) linked together by using transfer gates.



**Figure 13 – Use of transfer gates and sub-RBDs**

Figure 13 gives two examples of the use of transfer gates: each of the two RBDs at the bottom of the figure is equivalent to the RBD at the top. They are split in two parts: main RBDs and sub-RBDs. It should be noted that a sub-RBD does not necessarily need to have only one input and one output.

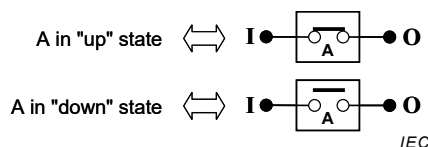
The overall underlying logical function is not affected by such a splitting but this allows the drawing of a large RBD on several separate pages. It is a matter for the analyst to choose a subdivision while keeping a good understanding of the whole RBD and of its sub-RBDs.

## 8 Qualitative analysis: minimal tie sets and minimal cut sets

### 8.1 Electrical analogy

The RBD can be used first for qualitative analysis purposes by identifying

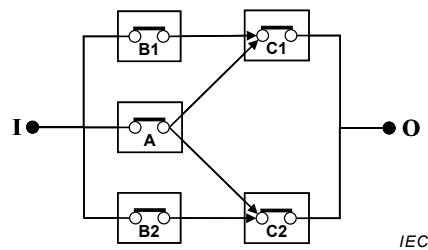
- the combinations of the blocks in up states leading to the system being in the up state ("success" paths or "tie" sets),
- the combinations of the blocks in down states leading to the system being in the down state ("failure" paths or "cut" sets).



**Figure 14 – Analogy between a block and an electrical switch**

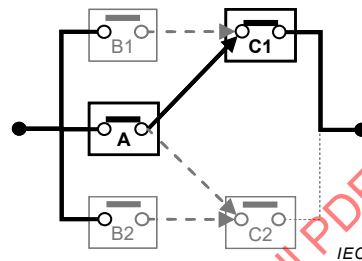
**NOTE** When building an RBD related to a physical electrical circuit, the position of a physical switch can be different from its representation by using the analogy described in Figure 14. For example, a physical switch stuck closed will be represented by a virtual switch open as it is in down state.

For doing that, the analogy with an electrical circuit shown in Figure 14 is very useful. This consists in considering that each block is equivalent to an electrical switch which is closed when the block is in up state and open when it is in down state. This has been done to represent Figure 10 by the equivalent Figure 15 where each block has been modelled by an electrical switch.



**Figure 15 – Analogy with an electrical circuit**

When this electrical circuit is closed ("tied"), an electrical signal sent from the input circulates throughout the RBD and reaches the output. Therefore, any combination ("set") of closed switches allowing a signal to circulate from the RBD input to the RBD output models an up state of the system. This is called a "success" path with regards to the state of the system or a "tie" set with regards to the closure of the electrical circuit.



**Figure 16 – Example of minimal success path (tie set)**

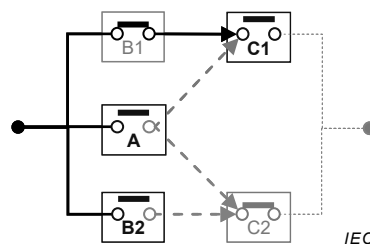
Figure 16 illustrates one of the success paths,  $(a \bullet c1)$ , of the RBD shown in Figure 15. This success path is minimal as, if A fails or C1 fails, the overall system also fails, i.e. the successes of A and C1 are necessary and sufficient for the system to be in a success state.

B.3.1 gives other examples of minimal and non-minimal tie sets.

The Boolean algebra properties provide a general representation of the system up state,  $s$ , as the union of the minimal tie sets  $(\Pi_i)$  of the RBD. This leads to the following formula:

$$s = \bigcup_i \Pi_i \quad (10)$$

When this electrical circuit is broken ("cut"), an electrical signal sent from the input is not able to circulate throughout the RBD and does not reach the output. Therefore any combination ("set") of open switches preventing a signal to circulate from the RBD input to the RBD output models a down state of the system. This is called a "failure" path with regards to the state of the system or a "cut" set with regards to the closure of the electrical circuit.



**Figure 17 – Example of minimal failure path (cut set)**

Figure 17 illustrates one of the failure paths,  $(\bar{a} \bullet \bar{b}_2 \bullet \bar{c}_1)$ , of the RBD shown in Figure 15. This failure path (cut set) is minimal as when any of A, B2 or C1 are repaired (switches closing), the system is also repaired, i.e. the failures of A, B2 and C1 are necessary and sufficient for the system being in failed state.

B.3.1 gives others examples of minimal and non-minimal cut sets.

The Boolean algebra properties provide a general representation of the down state,  $\bar{s}$ , as the union of the minimal cut sets ( $C_j$ ) of the RBD:

$$\bar{s} = \bigcup_j C_j \quad (11)$$

Therefore, from Formulae (10) and (11) the identity:  $s = \bigcup_i \Pi_i \equiv \overline{\bigcup_j C_j}$  (12)

is obtained.

The minimal cut sets and minimal tie sets can be obtained by expanding from the logical formulae corresponding to the RBD. Except in simple cases, this is not easy to do that by hand but powerful algorithms are available and implemented into RBD software packages.

## 8.2 Series-parallel representation with minimal success path and cut sets

The identity (12) provides two equivalent ways to represent an RBD from its minimal tie sets or its minimal cut sets.

Applied to the RBD presented in Figure 10, this leads to the two equivalent logical formulae (see detailed explanations in B.3.2):

$$s = \bigcup_i \Pi_i = b_1 \bullet c_1 + a \bullet c_1 + a \bullet c_2 + b_2 \bullet c_2 \quad (13)$$

$$\bar{s} = \bigcup_j C_j = (b_1 + a + b_2) \bullet (c_1 + c_2) \bullet (b_1 + a + c_2) \bullet (b_2 + a + c_1) \quad (14)$$

Then this RBD can be replaced by the equivalent representations presented in Figure 18 (made of tie sets) and in Figure 19 (made of cut sets) where it can be noticed that some blocks are repeated several times.

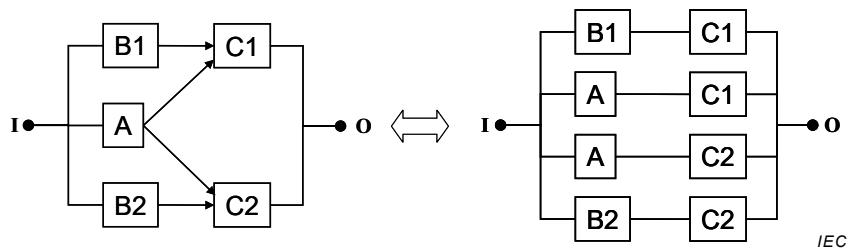
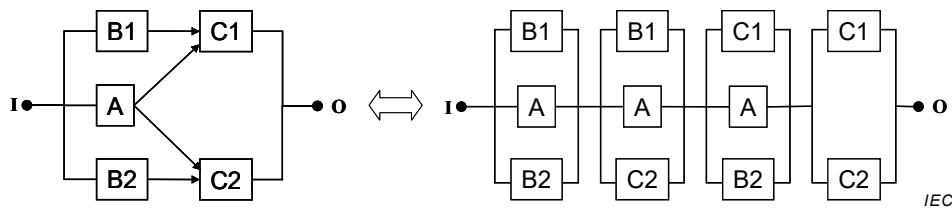


Figure 18 – Equivalent RBDs with minimal success paths

Figure 18 is made of four tie sets of order two (see 3.16, Note 2 to entry):

$(b_1 \bullet c_1), (a \bullet c_1), (a \bullet c_2)$  and  $(b_2 \bullet c_2)$ .



**Figure 19 – Equivalent RBDs with minimal cut sets**

Figure 19 is made of one cut set of order two  $(\bar{c}_1 \bullet \bar{c}_2)$  and of three cut sets of order three:  $(\bar{a} \bullet \bar{b}_1 \bullet \bar{b}_2)$ ,  $(\bar{a} \bullet \bar{b}_1 \bullet \bar{c}_2)$  and  $(\bar{a} \bullet \bar{b}_2 \bullet \bar{c}_1)$ .

### 8.3 Qualitative analysis from minimal cut sets

For performing qualitative analysis it is more useful to consider the minimal cut sets rather than the minimal tie sets. This can be shown by using the above example: the cut set of order two  $(\bar{c}_1 \bullet \bar{c}_2)$  is likely to be more probable than the cut sets of order three  $(\bar{a} \bullet \bar{b}_1 \bullet \bar{b}_2)$ ,  $(\bar{a} \bullet \bar{b}_1 \bullet \bar{c}_2)$  or  $(\bar{a} \bullet \bar{b}_2 \bullet \bar{c}_1)$ . Therefore, from a qualitative point of view, the minimal cut set  $(\bar{c}_1 \bullet \bar{c}_2)$  is the weak point of the system and should be improved first.

Therefore, the qualitative analysis may be performed with the following steps:

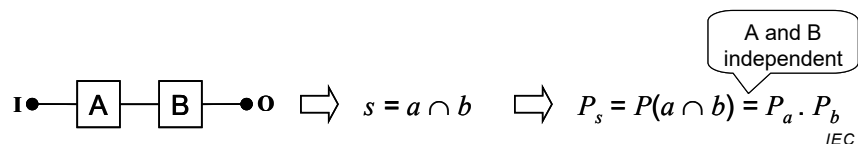
- identify the minimal cut sets from the logical equation of the system failure;
- sort the minimal cut sets in their increasing orders;
- focus on the lowest order minimal cut sets to improve the system.

When failure probabilities are available for the blocks, the minimal cut sets can be more accurately sorted at step b) by calculating the probability of occurrence of each of them.

## 9 Quantitative analysis: blocks with constant probability of failure/success

### 9.1 Series structures

Figure 20 shows the link between the Boolean formulae of a basic series structure and the probabilistic calculations.



**Figure 20 – Link between a basic series structure and probability calculations**

This probabilistic formula is basically established for independent blocks with constant probabilities. It expresses the probability of success of the system  $P_s$  as a function of the individual probabilities of success of block A,  $P_A$ , and block B,  $P_B$ . Therefore, the RBD models can be primarily used for systems comprising independent blocks with constant probability of being in the up state.

At this step it would be irrelevant to talk about reliability, availability or failure frequency of the system as those probabilistic measures are only defined for systems with time dependent behaviour.

The formula established in Figure 20 can be easily extended to be used for systems such as those illustrated by Figure 2 (see B.4.1). When blocks A, B, ..., Z are independent, the probability of success of the system is given by the simple equation:

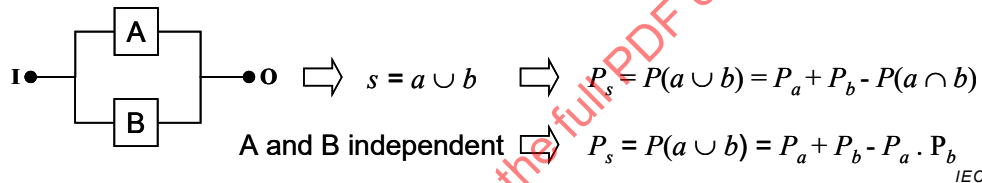
$$P_s = P_a \cdot P_b \cdot P_c \dots P_z \quad (15)$$

i.e. by multiplying together the probabilities of success of all the blocks constituting the RBD.

In general, with  $n$  blocks  $B_i$  in series,  $P_s = \prod_{i=1}^n P_{b_i}$ . (16)

## 9.2 Parallel structures

Figure 21 shows the link between the Boolean formulae of a basic parallel structure and the probabilistic calculations.



**Figure 21 – Link between a parallel structure and probability calculations**

As for the basic series structure, the formula for the basic parallel structure is established for constant probabilities and independent blocks in order to express  $P_s$  as a function of  $P_a$  and  $P_b$ .

As it is, the formula shown in Figure 21 is not easy to extend to more than two components (see the Sylvester-Poincaré formula in 11.7 and B.4.2). Fortunately, it can be observed that  $P_s^c = (1 - P_s) = 1 - (P_a + P_b - P_a \cdot P_b) = (1 - P_a) \cdot (1 - P_b)$ . This expresses simply that the system is failed when both A and B are failed.

Hence the probability of success of the system ( $P_s$ ) is given by:

$$P_s = P_a + P_b - P_a \cdot P_b = 1 - (1 - P_a)(1 - P_b) \quad (17)$$

Formula (17) can be easily extended to  $n$  blocks  $B_i$  in parallel (see B.4.2), i.e.:

– Probability of failure:  $P_s^c = \prod_{i=1}^n (1 - P_{b_i})$  (18)

– Probability of success:  $P_s = (1 - P_s^c) = 1 - \prod_{i=1}^n (1 - P_{b_i})$  (19)

## 9.3 Mix of series and parallel structures

Formulae (15) and (17) can be combined and this can be done by hand in simple cases but the above calculations are generally not easily tractable by hand. Fortunately, powerful

algorithms are available and implemented into RBD software packages. They are based on the techniques described in Clauses B.5, B.6 or B.7.

#### 9.4 $m/n$ architectures (identical items)

The  $m/n$  architectures are analysed in B.4.4. When the blocks are identical (i.e. each with the same probability of success  $p$ ), the probability of success of the system  $P_s$  is given by:

$$P_s = \sum_{r=0}^{n-m} \binom{n}{r} \cdot p^{n-r} \cdot (1-p)^r \quad (20)$$

and the probability of failure is given by:

$$P_{\bar{s}} = \sum_{r=0}^{m-1} \binom{n}{r} \cdot (1-p)^{n-r} \cdot p^r \quad (21)$$

When  $n = 2m-1$  (e.g. 1/1, 2/3, 3/5, etc.), the system is up if  $m$  blocks are “up” and the system is down if  $m$  blocks are “down”. Those structures are symmetrical with regards to the success and failure events. Some of them, for example structure 2/3, are widely used for safety systems.

If the  $n$  items are not identical, use of a more general procedure is recommended (see 11.8.2).

### 10 Quantitative analysis: blocks with time dependent probabilities of failure/success

#### 10.1 General

The calculations developed for constant probabilities in Clause 9 can be easily extended to the time dependent probability of the system  $P_s(t)$  provided that the probabilities  $P_{x_i}(t)$  of the blocks behave independently from each other. This means that the failure (or repair) of any block shall not affect the probability of failure or repair of any other block within the system being modelled. This implies that sufficient repair resources are available to service those blocks needing repair and that, when two or more persons are repairing a particular block at the same time, neither gets in the other's way. Thus failures and repairs of individual blocks are considered to be statistically independent events. The calculations for the time dependent probability of system success are detailed in Annex C.

As the probability for an item to be in the up state at a given instant is its instantaneous availability,  $A_S(t) = P_s(t)$  and  $A_{X_i}(t) = P_{x_i}(t)$ . This result holds for complicated structures as well as large RBDs (see Clause 11 and Annex B): provided that the blocks behave independently from each other at all times, the formulae developed for the constant probability case are still valid for availability/unavailability calculations.

$$\text{– Series structures: } A_S(t) = \prod_{i=1}^n A_i(t) \text{ and } U_S(t) = 1 - \prod_{i=1}^n [1 - U_i(t)] \quad (22)$$

$$\text{– Parallel structures: } A_S(t) = 1 - \prod_{i=1}^n (1 - A_i(t)) \text{ and } U_S(t) = \prod_{i=1}^n (U_i(t)) \quad (23)$$

$$- \quad m/n \text{ structure: } A_S(t) = \sum_{r=0}^{n-m} \binom{n}{r} \cdot A(t)^{n-r} \cdot [1 - A(t)]^r \quad \text{and} \quad U_S(t) = \sum_{r=0}^{m-1} \binom{n}{r} \cdot U(t)^{n-r} \cdot [1 - U(t)]^r \quad (24)$$

The availability/unavailability calculations described above are not so simple but reliability/unreliability calculations are even more difficult. This is due to the definition of the reliability itself:  $R_S(t) = P(\text{S in "up" state over } [0, t])$  which implies that the system remains in up state over the time interval  $[0, t]$ . That means that only the sequences of system events which do not go through to the system down state are relevant for calculating  $R_S(t)$ . Therefore the sequences of system events which include a succession "up state" → "down state" → "up state" have to be excluded from the calculations. This implies that a system part going to the down state is repairable only if the system remains in up state during the repair of this part. Thus, with regards to the calculation of  $R_S(t)$ , the system parts (e.g. components) are repairable or not depending on the system state (i.e. on the states of the other parts). This constitutes a systemic dependency between the system parts and therefore between the blocks modelling these parts within the RBD modelling the system. This happens in the case of redundancy of repairable items. This is the main difficulty in the understanding of this standard: except for RBDs made of blocks in series, the system reliability  $R_S(t)$  cannot be calculated by combining the reliability  $R_{Bi}(t)$  of its individual blocks. The formulae established above under the independency hypothesis are no longer valid. This is further discussed in 10.3.1.4.

## 10.2 Non-repaired blocks

### 10.2.1 General

When a block X is not repaired, its probability to be available at time  $t$  is equal to its probability to have had no failure over  $[0, t]$ . Therefore, its reliability  $R_X(t)$  is equal to its availability  $A_X(t)$ .

When none of the blocks within a system are repaired, the system made of these blocks is not repaired either. Then its availability and reliability are identical and  $R_S(t) = A_S(t)$

### 10.2.2 Simple non-repaired block

The reliability of any item X is linked to its failure rate  $\lambda_X(t)$ , with the following relationship:

$$A_X(t) = R_X(t) = \exp\left(-\int_0^t \lambda_X(u) du\right) \quad (25)$$

where  $\lambda_X(u)$  denotes the failure rate of the block X at  $t = u$ ,  $u$  being a dummy variable.

When  $\lambda_X$  is constant, Figure 25 is simplified to the classical formula:

$$A_X(t) = R_X(t) = \exp(-\lambda_X \cdot t) \quad (26)$$

$$\text{Therefore} \quad U_X(t) = F_X(t) = 1 - \exp(-\lambda_X \cdot t) \quad (27)$$

### 10.2.3 Non-repaired composite blocks

A non-repaired composite block C can be handled as a whole and as a simple non-repaired block provided its availability  $A_C(t)$  is established. Note that in this case  $A_C(t) = R_C(t)$ .

This can be illustrated by the composite block presented in Figure 12. It corresponds to a cold standby system with the following parameters:

- $\lambda_A$  is the constant failure rate of block A and  $f_A(\tau)$  is the probability density function of its time to failure;
- $\lambda_{Bd}$  is the constant failure rate of block B when in a passive (dormant) state, either cold or under low power;
- $\lambda_B$  is the constant failure rate of block B when in an active state, after it has started due to the failure of block A.

NOTE In the following calculations, the switch is considered to be perfect but examples of modelling of the imperfect switching are given in 10.3.1.2 (Figure 23) and C.3.3.

This system is analysed in C.3.3 which provides the following results:

- if the dormant failure rate of item B is assumed to be equal to zero, then the availability of a standby redundant system is:

$$A_C(t) \equiv R_C(t) = e^{-\lambda_A \cdot t} + \frac{\lambda_A}{\lambda_A - \lambda_B} \cdot [e^{-\lambda_B \cdot t} - e^{-\lambda_A \cdot t}] \quad (28)$$

- if both failure rates are equal ( $\lambda_A = \lambda$  and  $\lambda_B = \lambda$ ), then the equation for system reliability can be shown to be given by:

$$A_C(t) \equiv R_C(t) = e^{-\lambda \cdot t} \cdot (1 + \lambda \cdot t) \quad (29)$$

If, under the ideal conditions just above, there are  $n$  (instead of one) items on standby, this latter equation becomes:

$$A_C(t) \equiv R_C(t) = e^{-\lambda \cdot t} \left( 1 + \lambda \cdot t + \frac{(\lambda \cdot t)^2}{2!} + \frac{(\lambda \cdot t)^3}{3!} + \dots + \frac{(\lambda \cdot t)^n}{n!} \right) \quad (30)$$

Formulae (28), (29) or (30) can be used for the composite block C in exactly the same way as Formula (26) is used for ordinary blocks. Nevertheless, establishing those formulae is difficult and other procedures, such as Markov analysis, should be used to analyse standby systems (see 10.3.1.2).

#### 10.2.4 RBDs with non-repaired blocks

- **Availability/reliability:** provided that the blocks behave independently from each other, the availability/reliability of the RBD can be calculated by combining availabilities/reliabilities of the blocks (see 10.2.2 and 10.2.3) according to the logic of the RBD and by using the formulae presented in 10.1.
- **Frequency:** a system made of non-repaired components can fail only once. The probability to observe this failure over  $[0, T]$  is  $F_S(T)$  and the average failure frequency  $w_S^{avg}(T)$  is equal to  $\frac{F_S(T)}{T}$ . It decreases and tends to zero as time increases.

### 10.3 Repaired blocks

#### 10.3.1 Availability calculations

##### 10.3.1.1 Simple block

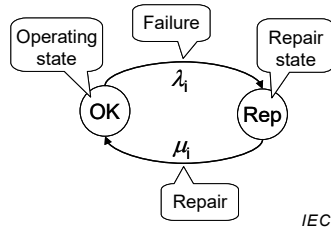
When a block  $i$  is repaired, its availability depends both on its failure rate and on the repair resources. Those resources are generally allocated at the system level and, when they are limited, this constitutes a systemic dependency between the blocks. Therefore, the blocks are independent only if the repair resources are unlimited. In this way the repair of one block can be done at any time even when one or several other blocks are already under repair. This

assumption implies, in particular, that there are as many repair teams as the number of blocks.

The block availabilities  $[A_i(t)]$  can be expressed by any formula (simple or complex). In the simplest case, the repaired blocks are characterized by a constant failure rate  $\lambda_i$  and a constant repair rate  $\mu_i$  and this leads to the classical formula:

$$A_i(t) = \frac{\mu_i}{\lambda_i + \mu_i} + \frac{\lambda_i}{\lambda_i + \mu_i} \exp[-(\lambda_i + \mu_i)t] \quad (31)$$

This analytical formula can be replaced by the equivalent Markov graph presented in Figure 22 where  $A_i(t) = P(\text{OK}, t)$  where  $P(\text{OK}, t)$  is the probability of the state OK at time  $t$ .



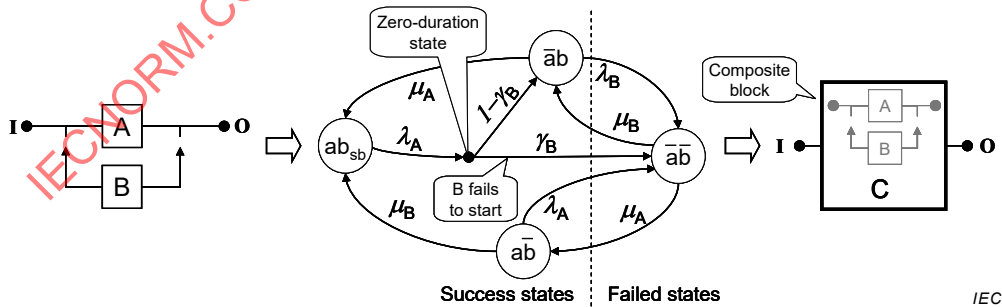
**Figure 22 – "Availability" Markov graph for a simple repaired block**

NOTE A Markov graph devoted to availability calculations is called "availability" Markov graph.

### 10.3.1.2 Repaired composite blocks

A repaired composite block, C, can be handled as a whole and as a simple repaired block provided its availability  $A_C(t)$  is established. Note that in this case  $A_C(t) \neq R_C(t)$ .

This can be illustrated by the composite block presented in Figure 12. It has already been analysed in 10.2.3 in the non-repair case. If the components A and B are considered repairable, then the formula of the availability  $A_C(t)$  of the composite block C can now be established by using the Markov graph in Figure 23.



**Figure 23 – Standby redundancy**

In this graph, C is repaired after it has had a failure (see the transitions from the failed state to the success states): then, this is an "availability" Markov graph (see 10.3.3 to see the difference with a "reliability" Markov graph). This Markov graph can be used to establish availability  $A_C(t)$  of the composite block C or even be used as an RBD input (see C.3).

In this Markov graph, the failure of the switching and sensing mechanism is modelled by using the probability  $\gamma_B$  that block B fails to start when A fails. As this occurs as soon as the component A fails, a zero-duration state has been introduced into the Markov graph. From this state, B immediately starts (probability  $1-\gamma_B$ ) or not (probability  $\gamma_B$ ).

The Markov graph shown in Figure 23 models the dependencies existing between the blocks A and B:

- B starts only after A has failed;
- B may fail when demanded by a failure of A;
- B comes back to a standby position as soon as A and B are in the up state.

Those dependencies between A and B cannot be taken into account by combining the individual availabilities of A and B and this is why C has to be considered as a whole. If blocks A and B were considered separately, a typical sequential structure outside the scope of the RBD would be obtained. Gathering A and B into a composite block C allows to manage this composite block as an individual block within the RBD framework.

The above principle is general and can be implemented when a few blocks are not independent. When the number of dependent blocks increases, other techniques like dynamic RBDs (see 12.2), Markov processes [2] or Petri nets [3] should be used.

### 10.3.1.3 Periodically tested blocks

With regards to the safety functions that they have to perform, the safety systems are only available or not available. Therefore, they are typical systems with only two states. Their main characteristic is that, in spite of the fact that they remain in the standby position most of the time, they have to react with a high availability when a safety demand occurs.

The components of such safety systems are then periodically tested in order to detect failures that may have occurred when the system is in the standby position. Therefore, the availability of a periodically tested component is maximal just after a test where the possible failures have been detected and repaired, and decreases afterwards until the next test is performed. The typical saw tooth curve shape of the availability  $A_B(t)$  of such a block is illustrated in Figure 24. It can be modelled by a multi-phase Markov process (see Figure C.4). A whole RBD implementing periodically tested blocks is also illustrated in Figure C.5.

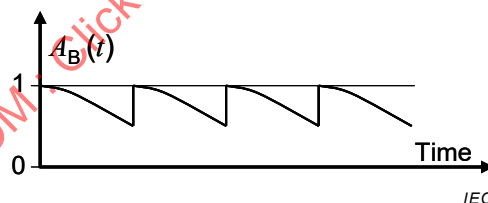


Figure 24 – Typical availability of a periodically tested block

The shape of the blocks availabilities does not change the principle of the calculation and they can be combined as described above in order to calculate the overall system availability  $A_S(t)$  or unavailability  $U_S(t)$ . This is very useful to implement the average unavailability calculations (i.e.  $PFD_{avg}$ ) required by functional safety standards (e.g. IEC 61508 [5] or IEC 61511 [6]) as explained at the end of 10.3.2.

### 10.3.1.4 Complex repaired blocks (RBD driven Markov processes)

Provided that the independency requirements are fulfilled, the idea developed in Figure 22 and Figure 23 to use small Markov graphs with few states to model the block availabilities can be easily extended to all the blocks of an RBD.

This allows the construction of large Markov models (comprising millions of states) made of small individual sub-Markov models (comprising a few states each) combined through the logic of an RBD. Therefore

- the Markov graphs provide the block availabilities,

– the RBD provides the logic used to combine the block availabilities.

Such models are called "RBD driven Markov processes".

See Clause C.4 for more details.

### 10.3.2 Average availability calculations

Another useful parameter to calculate from an RBD is the average availability  $A_S^{\text{avg}}(0, T)$  of the system over a given period  $[0, T]$ . This can be done by the integration of the instantaneous system availability  $A_S(t)$ :

$$A_S^{\text{avg}}(0, T) = \frac{1}{T} \int_0^T A_S(t) dt \quad (32)$$

In the general case, such calculations are not really possible by hand but nowadays RBD software packages are available to make the needed numerical calculations.

Nevertheless, under certain conditions, a steady state is reached where the probability for  $B_i$  to leave the up state by a failure is equal to the probability for  $B_i$  to reach it by a repair. When a steady state exists, the availability  $A_{B_i}(t)$  reaches an asymptotic value  $A_{B_i}^{\text{as}}$ .

This occurs when

- the failures are quickly detected and repaired (i.e.  $1/\mu_i \ll 1/\lambda_i$ ),
- the failure and repair rates ( $\lambda_i, \mu_i$ ) are constant.

For example, in the case described in Figure 22, the steady state availability of the block is equal to  $A_{B_i}^{\text{as}} = \mu_i / (\lambda_i + \mu_i)$ .

When all the blocks reach such steady states, the system also reaches a steady state (see Figure 25 and Figure C.3) where  $A_S(t) \rightarrow A_S^{\text{as}}$ . Then, outside the transient period,

Equation (32) gives the long term average availability of the system:  $A_S^{\text{avg}} = A_S^{\text{as}}$ .

Therefore, when an RBD reaches a steady state, the steady state availabilities of the blocks become constant and the formulae established in Clause 9 can be used to carry out system steady-state availability predictions. This is accomplished by simply replacing the constant probabilities  $P_{b_i}$  by the constant values  $A_{B_i}^{\text{as}}$ .

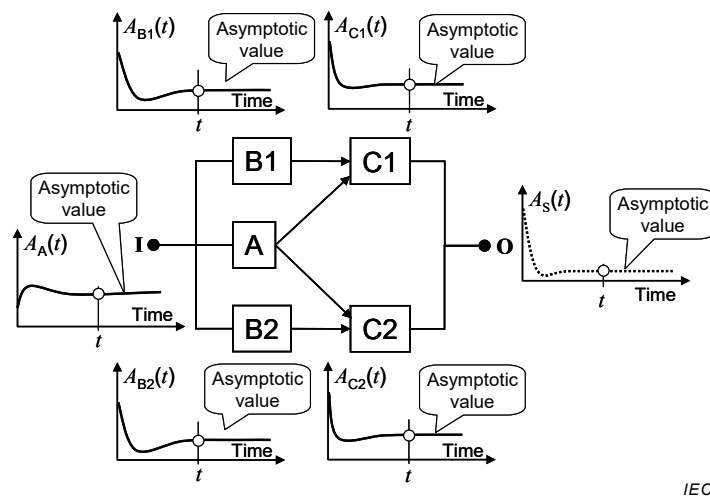


Figure 25 – Example of RBD reaching a steady state

Warning: the calculations given above are valid only with asymptotic block availabilities. They are not valid with ordinary average availabilities.

Then, when the RBD does not reach a steady state, the average availability has to be calculated by using the general Formula (32).

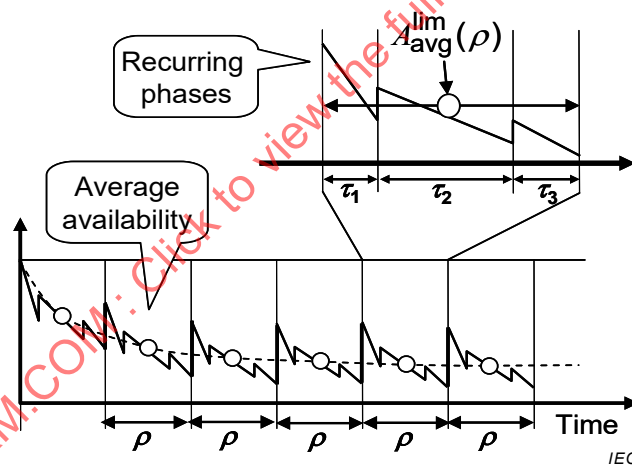


Figure 26 – Example of RBD with recurring phases

A special case occurs when the RBD is used through recurring phases such as:

- succession of seasons: winter, spring, summer and autumn;
- test intervals for periodically tested items.

Figure 26 illustrates a system with three recurring phases such that the same pattern of three phases is repeated with a time interval equal to  $\rho = \tau_1 + \tau_2 + \tau_3$ . The availability of such a system has no asymptotical value but the average availability  $A_{\text{avg}}[n\rho, (n+1)\rho]$  generally reaches a limit value when  $n$  is large enough:

$$A_{\text{avg}}^{\text{Lim}}(\rho) = \xrightarrow{n \rightarrow \infty} A_{\text{avg}}[n\rho, (n+1)\rho] \quad (33)$$

As  $A_{avg}[n\rho, (n+1)\rho]$  decreases when  $n$  increases,  $A_{avg}^{Lim}(\rho)$  provides a good conservative approximation of the average availability over a time interval  $[0, T]$  encompassing several sets of recurring phases.

Therefore, the techniques described in this standard can be used to calculate the average unavailability of safety systems and this makes the link with the functional safety standards (IEC 61508 or IEC 61511) which require such calculations for safety instrumented systems and where the average unavailability is called  $PFD_{avg}$  (average of the probability of failure on demand). This is described in Clauses C.4 and C.5.

### 10.3.3 Reliability calculations

When repaired blocks are considered, the calculation of the reliability  $R_S(t)$  implies that the repairs of the blocks in the system (RBD) need to be considered only as long as the system remains in the up state (see in 10.1).

This can be illustrated by the simple redundant system modelled by the RBD on the left hand side of Figure 27. With regards to the calculation of  $R_S(t)$ , when the block B fails, it can be repaired only if S in the up state (i.e. if A is in the up state). In the same way when the block A fails, it can be repaired only if S in the up state (i.e. if B is in the up state). Therefore when one block fails, its repair depends on the state of the system S which, in turn, depends on the states of all the blocks. This systemic dependency between the blocks is modelled in the Markov graph presented on the right hand side of Figure 27. It is equivalent to the RBD presented on the left hand side.

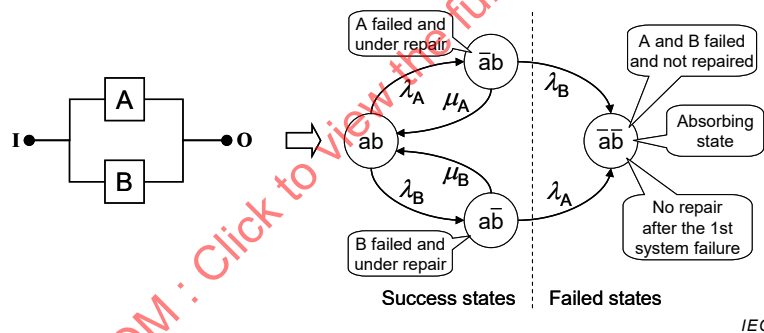


Figure 27 – RBD and equivalent Markov graph for reliability calculations

The simple redundant system is made of two redundant blocks A and B and it has 4 states. The success states are  $ab$ ,  $\bar{a}b$  and  $a\bar{b}$  and the failed state is  $\bar{a}\bar{b}$ . The system is reliable over a given period  $[0, t]$  only if it remains in the "success" states all the time. Therefore, the states  $ab$ ,  $\bar{a}b$  and  $a\bar{b}$  are "reliable" states only if they come from transitions between each other. That means that, for reliability calculations at time  $t$ , the transition out of  $\bar{a}\bar{b}$  is not allowed during  $[0, t]$ . The state  $\bar{a}\bar{b}$  is an absorbing state and the presence of an absorbing state characterizes a reliability Markov graph.

In this graph, block A can be repaired in the state  $\bar{a}b$  but not in the state  $\bar{a}\bar{b}$  and block B can be repaired in the state  $a\bar{b}$  but not in the state  $\bar{a}\bar{b}$ . Therefore, the repair of a failure of a block depends on the state of the whole system when it occurs: this is what is called a "systemic" dependency.

It is no longer possible to calculate the system reliability by combining the individual probabilities of success of the blocks.

- The block availabilities,  $[A_i(t)]$ , cannot be used as this would give the system availability and not the system reliability.

- The block reliabilities,  $[R_i(t)]$ , cannot be used as this would give the reliability of a system with non-repaired blocks (because the reliability of a repaired component is the same as the reliability of a non-repaired component with the same failure rate).

Therefore, except in the particular case developed hereafter, other techniques like Monte Carlo simulation (e.g. DRBDs, see 12.2 and Annex E), Markov [2] or Petri Nets [3] should be used instead.

The only case where reliability calculations are manageable occurs for quickly (i.e.  $MTTR_i \ll MTTF_i$ ) and completely (i.e. every failure is repaired) repaired systems. That means that, when a block fails, the repair starts at once and lasts a short time. In this case the system reaches a steady state rather quickly and its availability  $A_S(t)$  an asymptotic value  $A_S^{as}$ . In this steady state the conditional failure intensity,  $\lambda_{VS}$  (also called Vesely failure rate) is constant and provides a good approximation of the system failure rate,  $\lambda_S$ . Then the system reliability is obtained by using the classical formula  $R_S(t) = e^{-\lambda_S t} \approx e^{-\lambda_{VS} t}$  and the system unreliability is given by  $F_S(t) = 1 - e^{-\lambda_S t} \approx 1 - e^{-\lambda_{VS} t}$ .

For example in Figure 27, when the steady state is reached, the properties of the Markov processes allow to obtain a good approximation of  $\lambda_{VS}$  and  $\lambda_S$  directly from the Markov process:

$$\lambda_S \approx \lambda_{VS} \approx \lambda_A \frac{\lambda_B}{\lambda_B + \mu_A} + \lambda_B \frac{\lambda_A}{\lambda_A + \mu_B} \quad (34)$$

This is not a simple formula even though the system is very simple. For larger RBDs, the Vesely failure rate,  $\lambda_{VS}$ , can be obtained from conditional probabilities which can be calculated by the algorithms currently in use in RBD software packages. The way to obtain the conditional and unconditional failure intensities from an RBD is detailed in Clause C.6 and more details are given about reliability calculations in Clause C.7.

#### 10.3.4 Frequency calculations

When the blocks are repaired, another useful probabilistic measure is the average failure frequency of the system over a given time interval  $[0, T]$  which is equal to  $n/T$  if  $n$  failures occur over  $T$ . This average failure frequency is obtained by calculating the average unconditional failure intensity of the system  $w_S^{avg}(0, T) = n/T$ .

The failure frequency can be calculated in any case but this is difficult by hand. Algorithms have been developed to do that and the principle is explained in Clause C.6.

## 11 Boolean techniques for quantitative analysis of large models

### 11.1 General

It is possible to evaluate the availability  $A_S(t)$  of all the systems considered so far by the application of a suitable availability formula selected from Formulae (15) to (24). However, when the number of blocks increases, the corresponding RBDs may not conveniently be evaluated by any of the above formulae. Calculations are more difficult and so other mathematical approaches have to be employed.

Such approaches provide several ways to manipulate the Boolean equations in order to make the calculations possible. They can be generally employed manually on small RBDs but most of them can be used through a software package when the number of blocks is large. They are based on the following techniques:

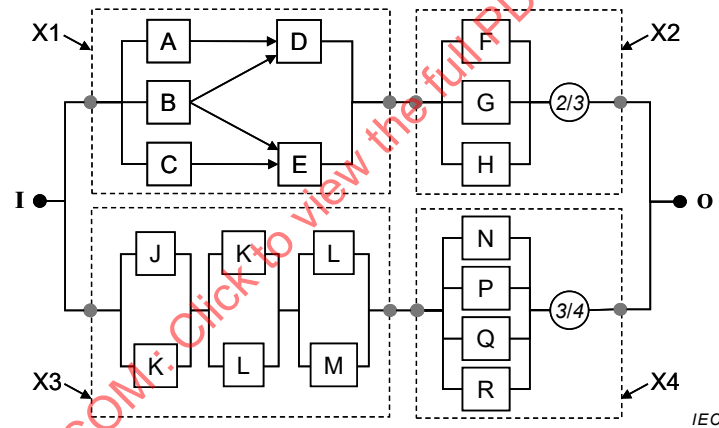
- reduction of the RBD to simpler structures;
- use of the total probability theorem;
- use of Boolean truth tables;
- use of Karnaugh maps;
- use of Shannon decomposition and binary decision diagrams;
- use of general Sylvester-Poincaré formulae.

For the procedures that follow, the condition of independence, as stated in 5.2 d), applies and the formulae provided hereafter for constant probability calculations may be straightforwardly transformed for availability calculations by applying 10.1 and Annex C.

It should be noted that Monte Carlo simulation can also be used for complex RBDs. The use of such procedures is not dealt with in this standard but the dynamic RBDs are described in 12.2 and Annex E.

## 11.2 Method of RBD reduction

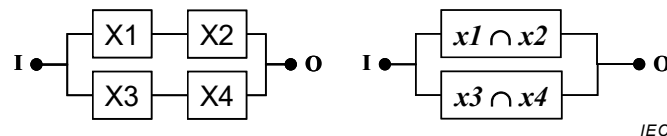
The RBDs modelling an industrial system may seem very complicated. By careful examination, however, the blocks in the diagram can often be grouped together such that the groups are statistically independent. In particular, this means that no two (or more) groups can contain the same block.



**Figure 28 – Illustrating grouping of blocks before reduction**

This can be illustrated by considering the RBD shown in Figure 28.

Figure 28 can be reduced to the diagram shown in Figure 29 which is made of the four dotted groups of blocks X1, X2, X3 and X4 as illustrated in Figure 10, Figure 8, Figure 37, and Figure 9 respectively.



**Figure 29 – Reduced reliability block diagrams**

Hence the final system availability is given by

$$A_S(t) = A_{X1} \cdot A_{X2} + A_{X3} \cdot A_{X4} - A_{X1} \cdot A_{X2} \cdot A_{X3} \cdot A_{X4} \quad (35)$$

as explained in 9.2.

This technique of reduction is difficult to automate but very useful for calculations by hand.

### 11.3 Use of total probability theorem

When dealing with RBDs of the type illustrated by Figure 10 which implement a common block A, it is possible to implement an approach based on the total probability theorem.

Two mutually exclusive events  $x$  and  $\bar{x}$  form a complete set of events (i.e.  $x + \bar{x} = \Omega$ ) and the total probability theorem can be summarized as follows:

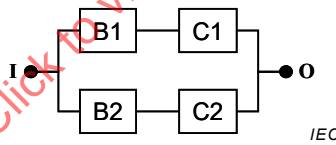
$$P_s = P_{s|x} \cdot P_x + P_{s|\bar{x}} \cdot P_{\bar{x}} = P_{s|x} \cdot P_x + P_{s|\bar{x}} \cdot (1 - P_x) \quad (36)$$

In Equation (36)  $P_s$  denotes the probability of success of a system,  $P_{s|x}$  denotes the probability of success of the system given that a particular item X is working, and  $P_{s|\bar{x}}$  denotes the probability success of the system given that the particular item X has failed.

Formula (36) can be applied to the block A of Figure 10 and this leads to:

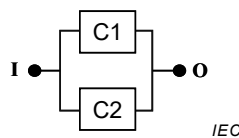
$$P_s = P_{s|a} \cdot P_a + P_{s|\bar{a}} \cdot P_{\bar{a}} \quad (37)$$

For example, when the item A has failed, the RBD of Figure 10 becomes the RBD shown in Figure 30 so that  $P_{s|\bar{a}} = P_{b1} \cdot P_{c1} + P_{b2} \cdot P_{c2} - P_{b1} \cdot P_{c1} \cdot P_{b2} \cdot P_{c2}$



**Figure 30 – Representation of Figure 10 when item A has failed**

Similarly, when A is working, the RBD of Figure 10 becomes that given in Figure 31 so that  $P_{s|a} = P_{c1} + P_{c2} - P_{c1} \cdot P_{c2}$ .



**Figure 31 – Representation of Figure 10 when item A is working**

$$\text{Hence } P_s = (P_{c1} + P_{c2} - P_{c1} \cdot P_{c2}) \cdot P_a + (P_{b1} \cdot P_{c1} + P_{b2} \cdot P_{c2} - P_{b1} \cdot P_{c1} \cdot P_{b2} \cdot P_{c2}) \cdot (1 - P_a) \quad (38)$$

If  $P_{c1} = P_{c2} = P_c$  and  $P_{b1} = P_{b2} = P_b$ , the above Formula (38) simplifies to:

$$P_s = (2P_c - P_c^2) \cdot P_a + (2P_b \cdot P_c - P_b^2 \cdot P_c^2) \cdot (1 - P_a) \quad (39)$$

This procedure can be extended to  $n$  mutually exclusive events  $a_1, \dots, a_n$ , whose probabilities sum to unity (i.e.,  $a_1 + a_2 + \dots + a_n = \Omega$ ), then  $P_s = P_s | a_1 \cdot P_{a_1} + \dots + P_s | a_n \cdot P_{a_n}$ . It can be used to deal with an RBD with repeated blocks (see 11.8.1.2). When there are  $n$  repeated blocks, this leads to develop  $2^n$  terms for the formula of  $P_s$ . Therefore, this technique is useful to deal with RBDs with a limited number of repeated blocks for example  $m/n$  structures.

#### 11.4 Use of Boolean truth tables

The system success paths depicted by RBDs are the graphical description of an underlying Boolean expression. For example, three redundant items A, B and C (one out of three required for system success) can be represented by the parallel RBD configuration illustrated in Figure 32, or by the Boolean expression:

$$s = a + b + c \quad (40)$$

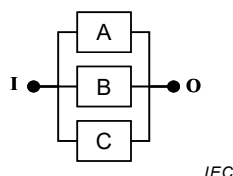


Figure 32 – RBD representing three redundant items

The Sylvester-Poincaré formula (see 11.7 and B.5) applied to three independent events leads to the following result:

$$P_s = P_a + P_b + P_c - (P_a \cdot P_b + P_a \cdot P_c + P_b \cdot P_c) + P_a \cdot P_b \cdot P_c \quad (41)$$

Formula (41) comprises seven terms when there are only three blocks (i.e. three events  $a$ ,  $b$  and  $c$ ). This number of terms increases exponentially when the number of involved events increases.

To prevent the increasing of terms, the idea is then to replace the events  $a$ ,  $b$  and  $c$  by equivalent combinations of disjoint events (see 11.7) and this can be done by using the truth table of the system according to the states of blocks A, B and C.

Table 5 – Application of truth table to the example of Figure 32

| State number | Block |   |   | System | Disjointed terms                          | Consensus                           |                                     |
|--------------|-------|---|---|--------|-------------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|
|              | A     | B | C |        |                                           |                                     |                                     |
| 1            | 0     | 0 | 0 | 0      | $\bar{a} \bullet \bar{b} \bullet \bar{c}$ |                                     |                                     |
| 2            | 0     | 0 | 1 | 1      | $\bar{a} \bullet \bar{b} \bullet c$       | $\bar{a} \bullet \bar{b} \bullet c$ | $\bar{a} \bullet \bar{b} \bullet c$ |
| 3            | 0     | 1 | 0 | 1      | $\bar{a} \bullet b \bullet \bar{c}$       | $\bar{a} \bullet b$                 | $\bar{a} \bullet b$                 |
| 4            | 0     | 1 | 1 | 1      | $\bar{a} \bullet b \bullet c$             |                                     |                                     |
| 5            | 1     | 0 | 0 | 1      | $a \bullet \bar{b} \bullet \bar{c}$       | $a \bullet \bar{b}$                 | a                                   |
| 6            | 1     | 0 | 1 | 1      | $a \bullet \bar{b} \bullet c$             |                                     |                                     |
| 7            | 1     | 1 | 0 | 1      | $a \bullet b \bullet \bar{c}$             | $a \bullet b$                       |                                     |
| 8            | 1     | 1 | 1 | 1      | $a \bullet b \bullet c$                   |                                     |                                     |

NOTE 1= working, 0 = failed.

This truth table identifies 8 disjoint terms representing the 8 possible states of the system: the state number 1 corresponds to the failure of the system and the states 2 to 8 to the success states of the system.

Again there are seven terms to handle and therefore this raw decomposition in disjointed terms is not very effective to calculate  $P_s$ . Note that there is generally no link between the number of terms of the Sylvester-Poincaré formula and the number of the disjoint terms from the truth table.

Fortunately, some disjoint terms can be combined through "consensus" as this has been done on the right hand side of the table. In a first step, terms 7 and 8, 5 and 6 and 3 and 4 have been combined together to obtain 4 disjoint terms. In a second step, terms 5 to 7 have been merged into a single term and three disjoint terms are obtained:

$$s = (a + b + c) \equiv a + (\bar{a} \cdot b) + (\bar{a} \cdot \bar{b} \cdot c) \quad (42)$$

Finally, the probability of failure of the system can be calculated as:

$$P_s = P_a + (1 - P_a) \cdot P_b + (1 - P_a) \cdot (1 - P_b) \cdot P_c \quad (43)$$

Formula (43) can be directly used to evaluate the system availability:

$$A_S(t) = A_A(t) + [1 - A_A(t)] \cdot A_B(t) + [1 - A_A(t)] \cdot [1 - A_B(t)] \cdot A_C(t) \quad (44)$$

It has to be noted that Table 5 identifies only one term leading to the system down state  $\bar{a} \cdot \bar{b} \cdot \bar{c}$ . Therefore, the calculation of the probability of failure is simpler than the probability of success and:

$$P_s = 1 - P_{\bar{s}} = 1 - P_{\bar{a}} \cdot P_{\bar{b}} \cdot P_{\bar{c}} \quad (45)$$

and finally  $A_S(t) = 1 - U_S(t) = 1 - U_A(t) \cdot U_B(t) \cdot U_C(t) \quad (46)$

Formulae (44) and (46) are equivalent.

For a system with  $n$  blocks, the Boolean truth table has  $2^n$  rows and therefore this approach can soon become unwieldy, although the principle involved is quite straightforward. This problem is overcome to some extent by using Karnaugh maps (see 11.5) but it is actually solved by using the Shannon decomposition and the binary decision diagrams explained hereafter (see 11.6). For a detailed description of a general application of Boolean methods, see Annex B.

### 11.5 Use of Karnaugh maps

The Karnaugh maps [8][9][10][11] technique has been developed to simplify the logical equation corresponding to a truth table. Therefore, it can be used for RBDs as well.

The principle of the use of such maps is illustrated hereafter with maps related to the RBD presented in Figure 10. This RBD comprises 5 blocks. As the Karnaugh maps are easier to manipulate with 4 variables, the whole map has been split into two disjoint cases:

- A is in up state (Table 6);
- A is in down state (Table 7).

**Table 6 – Karnaugh map related to Figure 10 when A is in up state**

| B1 B2 \ C1 C2 | 00 | 01 | 11 | 10 |
|---------------|----|----|----|----|
| 00            | 0  | 0  | 0  | 0  |
| 01            | 1  | 1  | 1  | 1  |
| 11            | 1  | 1  | 1  | 1  |
| 10            | 1  | 1  | 1  | 1  |

**Table 7 – Karnaugh map related to Figure 10 when A is in down state**

| B1 B2 \ C1 C2 | 00 | 01 | 11 | 10 |
|---------------|----|----|----|----|
| 00            | 0  | 0  | 0  | 0  |
| 01            | 0  | 1  | 1  | 0  |
| 11            | 0  | 1  | 1  | 1  |
| 10            | 0  | 0  | 1  | 1  |

In Table 6 and Table 7, the blocks have been split in two groups (B1 B2 and C1 C2) and the states of the components have been organized in such a way that only one state changes from a column to the next one and from a line to the next one. Therefore, the combinations which can be simplified are close together. For example, in Table 6, the combinations boxed in plain lines represent only C2 as the states of C1, B1 and B2 do not matter. In the same way, the combinations boxed in dotted lines represent only C1 as the states of C2, B1 and B2 do not matter. This leads to

$$s|a = c_1 + c_2 \quad (47)$$

where  $s|a$  represents the system S being in up state given the block A is in the up state and  $c_1$  and  $c_2$  represent the state variables related to blocks C1 and C2.

With the Karnaugh map presented in Table 7 the following formula is obtained

$$s|\bar{a} = b_1 \cdot c_1 + b_2 \cdot c_2 \quad (48)$$

where  $s|\bar{a}$  represents the system S being in up state given A is in the down state and  $b_1$ ,  $b_2$ ,  $c_1$  and  $c_2$  represent the state variables related to blocks B1, B2, C1 and C2.

Gathering the results gives:

$$s = a \cdot (c_1 + c_2) + \bar{a} \cdot (b_1 \cdot c_1 + b_2 \cdot c_2) \quad (49)$$

And finally, the system availability can be calculated with the following formula:

$$A_S(t) = A_A(t) \cdot \{1 - [1 - A_{C1}(t)] \cdot (1 - A_{C2})\} + [1 - A_A(t)] \cdot \{1 - [1 - A_{B1}(t) \cdot A_{C1}(t)] \cdot [1 - A_{B2}(t) \cdot A_{C2}(t)]\} \quad (50)$$

The Karnaugh maps have the same number of terms ( $2^n$ ) as the original truth tables but they are more compact and the combinations are organized in a better way to identify the combinations which can be merged together. This is very useful to identify the minimal tie or cut sets.

### 11.6 Use of the Shannon decomposition and binary decision diagrams

Like the truth or Karnaugh maps, the Shannon decomposition allows to identify the disjoint terms of a Boolean equation.

Figure 33 illustrates the principle of the Shannon decomposition on the Boolean function (1 out of 3) related to the RBD presented in Figure 32.

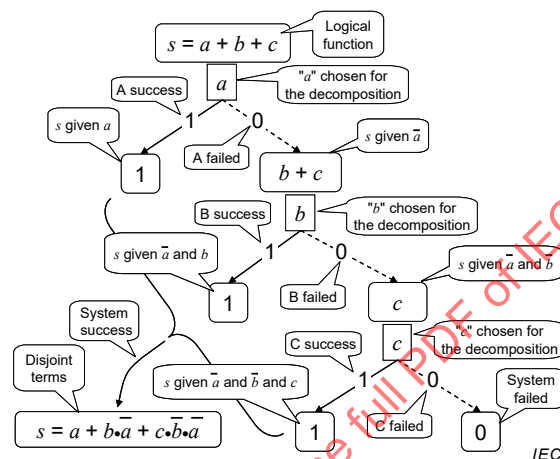


Figure 33 – Shannon decomposition equivalent to Table 5

This decomposition is done in several steps:

- 1) choose the order of the variable appearing in the logical function (here order  $a, b, c$ );
- 2) for each variable draw two branches (success and failure);
- 3) if a state of the system (success or failure) is reached, then stop the decomposition, otherwise continue with the next variable;
- 4) identify the paths leading to the success (or failed) state of the system.

Figure 33 leads to 3 disjoint success paths:  $a, (\bar{a} \cdot b), (\bar{a} \cdot \bar{b} \cdot c)$ . This is the same result as the truth table but it has been obtained in a simpler way. This decomposition is not unique and depends on the order which has been chosen for the variables.

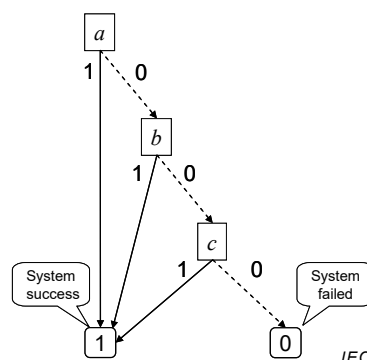


Figure 34 – Binary decision diagram equivalent to Table 5

When the up and down states are gathered, the Shannon decomposition provides the binary decision diagram (BDD) shown in Figure 34. The BDDs provide very compact representations of Boolean equations in the form of disjoint terms. They are very effective in computation and constitute the present state of the art (see references [31], [32] and [33]) for probabilistic calculations on Boolean models (e.g. RBD and fault trees).

### 11.7 Use of Sylvester-Poincaré formula

When the number of components increases, the simple formulae and the manual application of the above techniques become unmanageable because of the combinatorial explosion of the number of terms involved in the calculation.

As this has been explained in Clause 8, an RBD can be represented by the union of its success paths (minimal tie sets).

Then, the probabilistic calculations can be performed from the unions of the tie sets by using the Sylvester-Poincaré formula (see B.4.2 and B.5.2) which is the generalization of the basic formula  $P(a + b) = P_a + P_b - P_a \cdot P_b$ :

$$P_s = P\left(\bigcup_{i=1}^n \Pi_i\right) = \sum_i P(\Pi_i) - \sum_{i < j} P(\Pi_i \cdot \Pi_j) + \sum_{i < j < k} P(\Pi_i \cdot \Pi_j \cdot \Pi_k) - \dots \quad (51)$$

A similar calculation (see B.5.3) may be done by using the failure paths (minimal cut sets):

$$P_s = 1 - P_f = P\left(\bigcup_{i=1}^m C_i\right) = \sum_i P(C_i) - \sum_{i < j} P(C_i \cdot C_j) + \sum_{i < j < k} P(C_i \cdot C_j \cdot C_k) - \dots \quad (52)$$

The Sylvester-Poincaré formula is an alternate sum whose result converges toward the exact value when the number of considered terms increases. The difference is that Formula (51) which handles probabilities  $P(\Pi_i)$  close to 1 converges very slowly when Formula (52) which handles probabilities  $P(C_i) \ll 1$  converges rather quickly. In this case, the first term of Formula (52) provides a conservative estimation of the probability of failure:

$$P_s = P\left(\bigcup_{i=1}^n C_i\right) \approx \sum_i P_{C_i} \quad (53)$$

This approximation is widely used and works well when the probabilities of failures of the blocks are small which is generally true for the components in safety systems. It is the basis of calculations performed by numerous software packages available for availability/reliability calculations on RBD or fault trees.

Nevertheless, it is possible to overcome the difficulty of using Formula (51) by transforming the tie sets into equivalent sets of disjoint terms  $\bigcup_{i=1}^q \Pi_i^d = \bigcup_{i=1}^n \Pi_i$  such as  $\Pi_i^d \cdot \Pi_j^d = \Phi, \forall i, j$ .

In this case, the Sylvester-Poincaré Formula (51) is reduced to its first term:

$$P_s = P\left(\bigcup_{i=1}^q \Pi_i^d\right) = \sum_i P(\Pi_i^d) \quad (54)$$

The same can be done with Formula (52) by replacing the minimal cut sets ( $C_i$ ) by an equivalent set of disjoint terms ( $C_i^d$ ). Then the Sylvester-Poincaré Formula (52) is reduced to its first term:

$$P_s = P\left(\bigcup_{i=1}^m C_i^d\right) = \sum_i P(C_i^d) \quad (55)$$

The disjoint sets can be found by using the truth tables (11.4), the Karnaugh maps (11.5) or the Shannon decomposition and the binary decision diagrams (11.6). At the present time the state of the art to identify the disjoint terms of a Boolean equation is based on the binary decision diagrams (BDDs) described in 11.6. This provides powerful algorithms able to handle very large RBDs comprising a lot of blocks repeated or not repeated.

## 11.8 Examples of RBD application

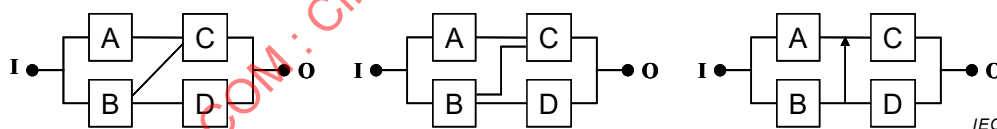
### 11.8.1 Models with repeated blocks

#### 11.8.1.1 Cut and tie set representation

In Clause 7 no block in the RBD appeared more than once. It may sometimes be advantageous to use block diagrams of the type illustrated by Figure 35.

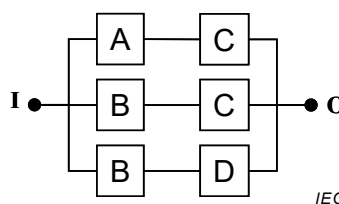
The left hand side of Figure 35 shows a conventional RBD with 4 blocks: blocks C and D might model two functionally similar items acting as duplicates for one another, but item A can power only item C, whereas item B is capable of supplying power to both C and D.

The middle and the right hand side of Figure 35 provide 2 equivalent RBDs for modelling not only the physical arrangements of the items, but the RBD as well. It is important for the RBD on the right hand side to include arrows in order to remove the uncertainty which occurs with such a diagram.



**Figure 35 – RBD using an arrow to help define system success**

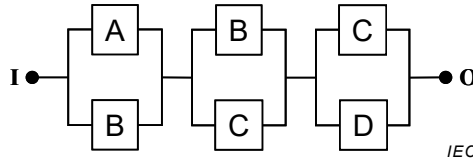
The system success paths  $a \bullet c$ ,  $b \bullet c$ ,  $b \bullet d$  of the system modelled in Figure 35 can be used to build an equivalent RBD in which some blocks appear more than once. When all success paths fail, this would cause the system to fail. Therefore, the RBD can be represented by a parallel combination of such success paths. This is illustrated in Figure 36.



**Figure 36 – Alternative representation of Figure 35 using repeated blocks and success paths**

Alternatively, the failure paths (e.g., the minimal cut sets of the system)  $\bar{a} \bullet \bar{b}$ ,  $\bar{b} \bullet \bar{c}$ ,  $\bar{c} \bullet \bar{d}$  can be used to build an equivalent RBD. This is done in Figure 37. When all components fail

in one of the minimal cut sets this would cause the system to fail and Figure 37 is thus a series combination of such minimal cut sets.



**Figure 37 – Other alternative representation of Figure 35 using repeated blocks and minimal cut sets**

The representations in Figure 36 and Figure 37 illustrate the concepts covered in 8.2: any RBD can be represented by the parallel combination of its success paths or by the series combination of its minimal cut sets.

Blocks B and C are repeated in both the RBDs presented in Figure 36 and Figure 37. It would be incorrect to treat the blocks as if they were independent of the others. Instead, the methods given in 11.3, 11.5 and 11.6 can be applied.

#### 11.8.1.2 Total probability theorem implementation

The method of the total probability decomposition described in 11.3 applied to Figure 36 and extended for two repeated components gives:

$$\begin{aligned} P_s &= P_{s|b,c} \cdot P_b \cdot P_c + P_{s|b,\bar{c}} \cdot P_b \cdot P_{\bar{c}} + P_{s|\bar{b},c} \cdot P_{\bar{b}} \cdot P_c + P_{s|\bar{b},\bar{c}} \cdot P_{\bar{b}} \cdot P_{\bar{c}} \\ &= P_{s|b,c} \cdot P_b \cdot P_c + P_{s|b,\bar{c}} \cdot P_b \cdot (1 - P_c) + P_{s|\bar{b},c} \cdot (1 - P_b) \cdot P_c + P_{s|\bar{b},\bar{c}} \cdot (1 - P_b) \cdot (1 - P_c) \end{aligned} \quad (56)$$

In Formula (56)  $P_{s|x,y}$  means that system S is available given that the events  $x$  and  $y$  are true.

It has to be noted that the number of terms is  $2^n$  if  $n$  blocks are repeated. This implies that this method is tractable only for a small number of repeated blocks.

Figure 36 gives:  $P_{s|b,c} = 1$ ,  $P_{s|b,\bar{c}} = P_d$ ,  $P_{s|\bar{b},c} = P_a$ ,  $P_{s|\bar{b},\bar{c}} = 0$

$$\text{Then: } P_s = P_b \cdot P_c + P_d \cdot P_b \cdot (1 - P_c) + P_a \cdot (1 - P_b) \cdot P_c = P_a \cdot P_c + P_b \cdot P_c + P_b \cdot P_d - P_a \cdot P_b \cdot P_c - P_b \cdot P_c \cdot P_d \quad (57)$$

#### 11.8.1.3 Karnaugh map implementation

Another way to handle the RBD presented in Figure 35 is to develop truth tables or, better, the Karnaugh map (see 11.5) which is presented in Table 8.

From this Karnaugh map the minimal success paths of the system can be found directly. They are identified by the 3 boxes drawn in Table 8.

$$s = a \bullet b + a \bullet c + b \bullet d \quad (58)$$

**Table 8 – Karnaugh map related to Figure 35**

| A B \ C D | 00 | 01 | 11 | 10 |
|-----------|----|----|----|----|
| 00        | 0  | 0  | 0  | 0  |
| 01        | 0  | 1  | 1  | 0  |
| 11        | 0  | 1  | 1  | 1  |
| 10        | 0  | 1  | 1  | 1  |

Therefore, the Karnaugh map is a good way to identify the success paths which have already been represented in Figure 36. This is useful from a qualitative analysis point of view but those success paths are not disjoint and this implies that the Sylvester-Poincaré formula cannot be simplified for probabilistic calculations.

#### 11.8.1.4 Shannon decomposition implementation

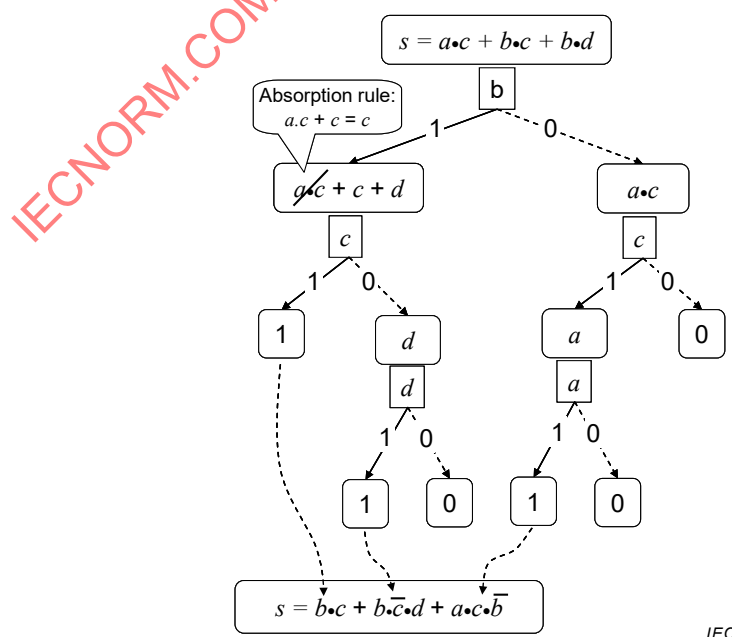
The Shannon decomposition has been done in Figure 38 and 3 disjoint success paths have been identified:

$$s = b \cdot c + b \cdot \bar{c} \cdot d + a \cdot c \cdot \bar{b} \quad (59)$$

Of course, from the Boolean algebra point of view, Formulae (59) and (58) are equivalent but Formula (59) which is made of disjoint terms leads directly to the system availability:

$$A_S(t) = A_B(t) \cdot A_C(t) + A_B(t) \cdot [1 - A_C(t)] \cdot A_D(t) + A_A(t) \cdot A_C(t) \cdot [1 - A_B(t)] \quad (60)$$

The result of the Shannon decomposition depends on the order of the variables used to develop it and therefore other equivalent expressions can be found when the order of variable changes (see B.7 where the same RBD has been analysed).

**Figure 38 – Shannon decomposition related to Figure 35**

### 11.8.2 $m$ out of $n$ models (non-identical items)

The procedure described in 9.4 is not applicable here because the blocks are not identical. As an example, consider a 2/5 system represented by the RBD in Figure 39.

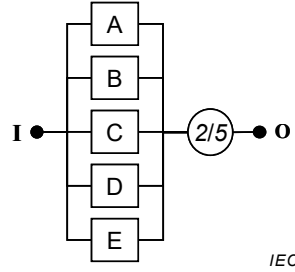


Figure 39 – 2-out-of-5 non-identical items

The availability of such a system may be evaluated by either of the techniques described in 11.3, 11.4, 11.5 or 11.6. Among them, the truth table described in 11.4 will require 32 entries from which 6 lead to the system failure:

$$(\bar{a} \cdot \bar{b} \cdot \bar{c} \cdot \bar{d} \cdot e), (\bar{a} \cdot \bar{b} \cdot \bar{c} \cdot d \cdot e), (\bar{a} \cdot \bar{b} \cdot \bar{c} \cdot d \cdot \bar{e})$$

$$(\bar{a} \cdot \bar{b} \cdot c \cdot d \cdot e), (\bar{a} \cdot b \cdot \bar{c} \cdot d \cdot e), (a \cdot \bar{b} \cdot \bar{c} \cdot d \cdot \bar{e})$$

Then the unavailability  $U_S$  can be derived as

$$\begin{aligned} U_S = & (1 - A_A) \cdot (1 - A_B) \cdot (1 - A_C) \cdot (1 - A_D) \cdot (1 - A_E) + (1 - A_A) \cdot (1 - A_B) \cdot (1 - A_C) \cdot (1 - A_D) \cdot A_E + \\ & (1 - A_A) \cdot (1 - A_B) \cdot (1 - A_C) \cdot A_D \cdot (1 - A_E) + (1 - A_A) \cdot (1 - A_B) \cdot A_C \cdot (1 - A_D) \cdot (1 - A_E) + \\ & (1 - A_A) \cdot A_B \cdot (1 - A_C) \cdot (1 - A_D) \cdot (1 - A_E) + A_A \cdot (1 - A_B) \cdot (1 - A_C) \cdot (1 - A_D) \cdot (1 - A_E) \end{aligned} \quad (61)$$

and so  $A_S = 1 - U_S$  can be found.

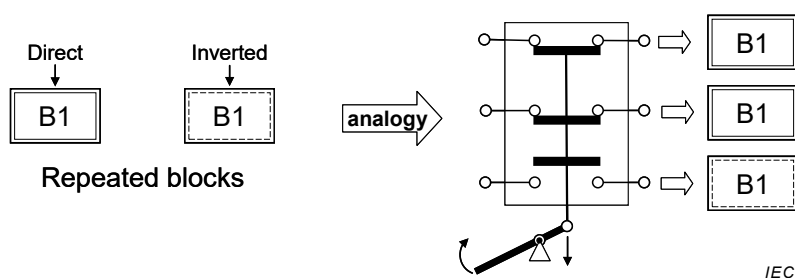
In the Formula (61),  $A_S$ ,  $U_S$  and  $A_A$ ,  $A_B$ ... can be replaced by  $A_S(t)$ ,  $U_S(t)$  and  $A_A(t)$ ,  $A_B(t)$ ... for time dependent calculations.

## 12 Extension of reliability block diagram techniques

### 12.1 Non-coherent reliability block diagrams

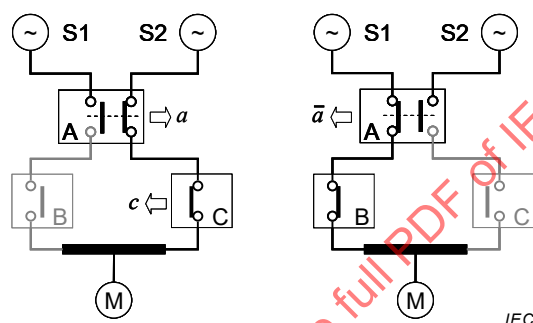
Non-coherent block diagrams are an extension from the RBDs representing monotonic logical functions to the RBDs representing non-monotonic logical functions. This may correspond, for example, to failed systems "repaired" by a further failure or to working systems failed by a further repair. This is generally unrealistic for "physical" systems but often appears when dealing with "logical" systems or with models generated automatically by model generation tools.

The main difference with an ordinary RBD is that a given block may appear in its two states (up/down). As shown in Figure 40, a new symbol has been introduced for this purpose.



**Figure 40 – Direct and inverted block**

The functioning of the "inverted" blocks can be illustrated thanks to the electrical analogy: in Figure 40, when B1 is in up state (switch closed), the inverted block B1 is in down state (switch open) and vice versa. This is also illustrated by the electrical circuit presented in Figure 41.



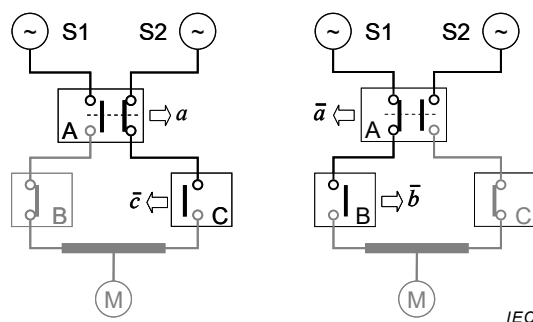
**Figure 41 – Example of electrical circuit with a commutator A**

The nominal configuration of this system is presented on the left hand side of Figure 41. With regards to the supply of motor M by S2, A is in the up state when the contact toward S2 is closed and in the down state when the same contact is open.

The motor M can be fed by the electrical source S2 or, when this is not available, by the electrical source S1. Thanks to the commutator A it cannot be fed by S1 and S2 at the same time in order to prevent short circuits between the sources.

Figure 41 highlight the two success paths allowing to feed the motor M:

- A is switched to S2 and the switch C is closed:  $a \bullet c$ ;
- A is switched to S1 and the switch B is closed:  $\bar{a} \bullet b$ .

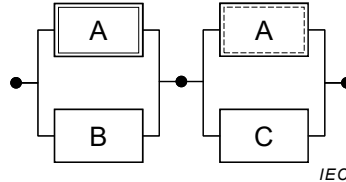


**Figure 42 – Electrical circuit: failure paths**

In the same way, Figure 42 shows the failure paths of the same electrical system:

- A is switched to S2 and the switch C is open:  $a \bullet \bar{c}$  ;
- A is switched to S1 and the switch B is open:  $\bar{a} \bullet \bar{b}$  .

A, B and C being two state components, this electrical system can be modelled by the RBD shown in Figure 43 (for the sake of simplicity, S1, S2 and M are considered to be perfect). This RBD, based on failure paths, implements repeated blocks in both direct and inverted states to model the two positions of commutator A.



**Figure 43 – Example RBD with blocks with inverted states**

The logical structure in Figure 43 is rather general and can be found in other situations. For example, the state of block A can impact the value of a physical parameter  $\theta$ :

- when block A is in up state (nominal functioning),  $\theta$  is lower than a given threshold  $\Theta$ , B is inhibited and makes C able to work;
- when block A fails then  $\theta$  becomes greater than  $\Theta$  and this inhibits the functioning of C and makes B able to work.

This RBD corresponds to the following logical equation:  $s = (a + b) \bullet (\bar{a} + c)$ .

This equation provides the three success paths:  $(a \bullet c), (\bar{a} \bullet b), (b \bullet c)$ .

This shows that, in addition to the two success paths identified above in Figure 41, a third one exists:  $b \bullet c$ . In this case the state of A does not matter.

Contrarily to the ordinary case, the success paths are not made only with blocks in up state. This produces the following side effects:

- when this system is, for example, in the up state,  $\bar{a} \bullet b \bullet \bar{c}$ , it goes to the down state  $a \bullet b \bullet \bar{c}$  when A goes to the up state. In other words the success state  $\bar{a} \bullet b \bullet \bar{c}$  is failed when A is repaired;
- when the system is, for example, in the down state,  $a \bullet b \bullet \bar{c}$ , it goes to the up state  $\bar{a} \bullet b \bullet \bar{c}$  when A goes to the down state. In other words the failed state  $a \bullet b \bullet \bar{c}$  is repaired when A fails.

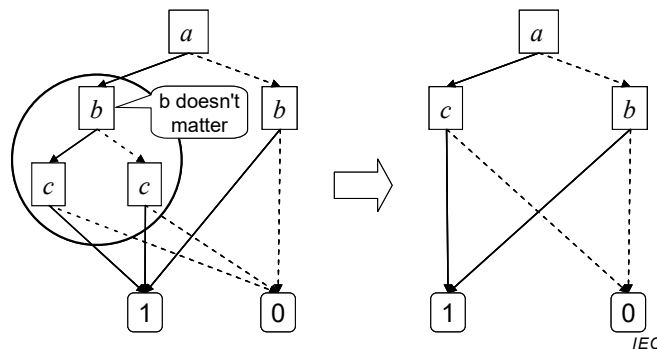
This counter intuitive behaviour is a typical property of non-coherent RBDs modelling non-monotonic logical functions. This leads to difficulties when minimal success or failure paths are needed for qualitative analysis. For example, the two failure paths,  $(\bar{a} \bullet \bar{b})$  and  $(a \bullet \bar{c})$ , are easily identified from Figure 43 but not the third one,  $(\bar{b} \bullet \bar{c})$ . This last one is not really evident and cannot be found by the classical minimal cut sets algorithms.

For non-coherent RBDs, the minimal cut sets or minimal tie sets concepts do not hold anymore. They should be superseded by the concept of prime implicants and

- the three success paths  $(a \bullet c), (\bar{a} \bullet b), (b \bullet c)$  are three prime implicants related to the success of the system,

- the tree failure paths  $(\bar{a} \bullet \bar{b})$ ,  $(a \bullet \bar{c})$ ,  $(\bar{b} \bullet \bar{c})$  are three prime implicants related to the failure of the system.

This implies that the popular algorithms based on the use of minimal cut sets or minimal tie sets are no longer valid for the probabilistic calculations of non-coherent RBDs.



**Figure 44 – BDD equivalent to Figure 43**

Fortunately and as shown in Figure 44, the BDD approach can be easily implemented for non-coherent RBDs. There is no difference with a BDD built for a coherent RBD and the BDD in Figure 44 can be used for the probabilistic calculation of the RBD presented in Figure 43 exactly in the same way as if it was coherent. Therefore, the use of BDDs overcomes the difficulties encountered when using minimal tie or cut sets. Nevertheless, RBD software packages are seldom able to handle prime implicants.

## 12.2 Dynamic reliability block diagrams

### 12.2.1 General

The dynamic reliability block diagram (DRBD) is an extension of common RBDs to RBDs implementing blocks interacting between themselves or with external elements. The purpose is similar to that of dynamic fault trees (see references [16] and [17]) but from the success point of view.

The RBDs developed in the previous chapters to model repaired systems (e.g. the RBD driven Markov processes described in C.4) are obviously dynamic models but the term DRBD is generally used to name RBDs fulfilling all the basic assumptions of Clause 5 except the last one concerning block independency (see 5.2 d)).

Some dynamic interactions have already been encountered in this standard when standby redundancies,  $m/n$  structures or reliability calculations of repaired systems have been dealt with.

More work has been done on dynamic fault trees than on dynamic RBDs but the problems are similar. Therefore, this standard proposes to adapt and use graphical symbols usually used for dynamic fault trees.

Some types of dynamic interactions are analysed in literature [15] but they are virtually endless. The effect of such interactions may be

- local: the states of the blocks are impacted but the logical rules of ordinary RBDs are still valid for establishing the whole system state,
- systemic: the logical rules of ordinary RBDs are no longer valid for establishing the whole system state.

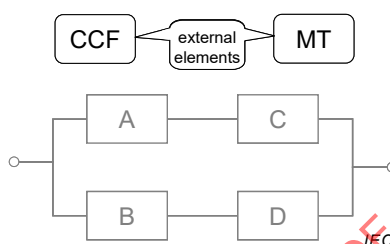
### 12.2.2 Local interactions

Those interactions which impact only the states of the blocks can be split into the following categories:

- interactions between blocks of the DRBD;
- interactions between elements external to the DRBD and blocks of the DRBD.

An event occurring on one block or on an external element (sometimes named the trigger event) interacts with the behaviour of one or several other blocks of the DRBD.

A new symbol is needed to make the difference between the external elements which do not belong to the structure of the RBD and the blocks belonging to the RBD itself. It is presented in Figure 45 where a common cause failure (CCF) and a maintenance team (MT) have been represented.



**Figure 45 – Symbol for external elements**

Examples of local interactions are the following:

- Functional dependency:
  - common cause failure: when a CCF occurs, all the related blocks fail immediately. This constitutes a strong functional dependency which can be modelled as illustrated in Figure 46;
  - loss of energy: when the energy is lost, all the related blocks stop immediately (down state). This also constitutes a strong functional dependency;
  - repair team dependency: if several blocks are repaired by the same repair team, then a failing block has to wait to be repaired if the repair team is busy with another failed block. This constitutes a functional dependency which can be modelled as illustrated in Figure 48;
  - collective repair: several blocks are repaired within the same repair operation;
  - standby redundancy: when the active block fails, this starts the standby block (see Figure 11);
  - spare parts: when an active block fails, the repair may need to use some spare parts. Therefore, the repair is possible only if one spare part is available. In addition, the spare part used to repair one block becomes unavailable to repair another block;
  - blocks in series: when one of the blocks in series fails or is under repair, the others may be stopped (e.g. because the output of the failed block is needed for later blocks in the series).
  - etc.
- Events able to occur only in a given order (an event cannot occur before another one has occurred):
  - the repair of a block cannot start before the block has failed. Such functional dependency has been already handled with ordinary RBDs for availability, reliability and frequency calculations;
  - for a given set of blocks ( $B_1, B_2, \dots, B_n$ ), the repair starts only when all of them have failed;

- the blocks become non-repairable after the whole system has failed. This is what happens when reliability calculations are performed;
- more generally, for a set of events  $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ , this implies that  $e_2$  cannot occur as long as  $e_1$  has not occurred, that  $e_3$  cannot occur as long as  $e_2$  has not occurred, ..., that  $e_n$  cannot occur as long as  $e_{n-1}$  has not occurred. In other words,  $e_1$  is inhibited by  $\bar{e}_2$ ,  $e_2$  is inhibited by  $\bar{e}_3$ , ...,  $e_n$  is inhibited by  $\bar{e}_{n-1}$ . Therefore, the events can only occur in the sequence  $e_1, e_2, \dots, e_n$ . This may be the case when an electrical device cannot be started before the electrical power is switched on or when a cold standby device cannot be activated before the failure of the active device. This interaction is similar to sequential gates (often noted SEQ) found in dynamic fault tree analysis (see the SEQ gate in Table 4);
- etc.

### 12.2.3 Systemic dynamic interactions

Those interactions do not necessarily imply functional dependencies between the blocks which may behave independently from each other. They occur when the ordinary logical rules cannot be used.

Examples are the following:

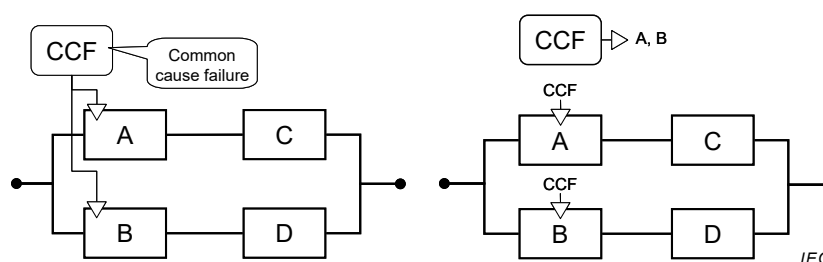
- $m/n$  majority vote: this logical configuration has already been analysed (see 7.5.1 and 9.4) and a special logical gate has been introduced to model it.
- Events which shall occur in a given order:
  - demand triggering an action performed by a given block B: if the demand occurs before B has failed, the action is performed and the system remains in up state, if the demand occurs after B has failed, the action is not performed and the system fails;
  - isolation valve protecting a system against overpressure: a hazardous event occurs only if the valve is opened before the pressure has been dropped down upstream the isolation valve;
  - more generally, for a set of events  $e_1, e_2, \dots, e_n$ , the output is produced only if the events occur in this given order, otherwise no output is produced. This interaction is similar to the "priority" AND gates (often noted PAND) found in dynamic fault tree analysis and which can also be used for DRBDs. This may be represented as a gate combining the input of several blocks.

Special gates are needed to represent the systemic dynamic dependencies as, for example, the  $m/n$  and the PAND or SEQ gates presented in Table 4 and which are popular extensions of dynamic fault trees.

The  $m/n$  gate has already been analysed and PAND and SEQ gates are analysed hereafter (see Figure 49 to Figure 52). The symbols usually implemented in dynamic fault trees have been used here but NOT gates have been inserted in inputs and outputs in order to keep the coherence with regards to the RBD logic.

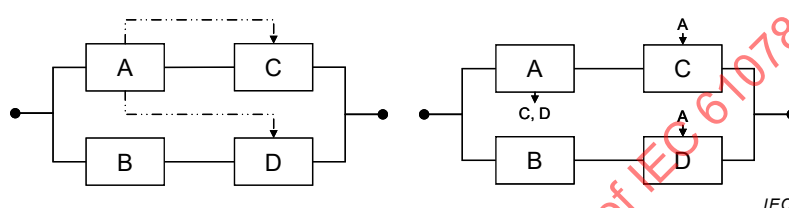
### 12.2.4 Graphical representations of dynamic interactions

As said in 12.2.2 and 12.2.3, the kinds of possible dynamic interactions are virtually endless. Therefore, even if some attempts have been made (see references [15], [16] and [17]) to propose graphical symbols for specific cases, this does not cover all the cases and only some basic graphical elements can be proposed in this standard.



**Figure 46 – Dynamic interaction between a CCF and RBDs' blocks**

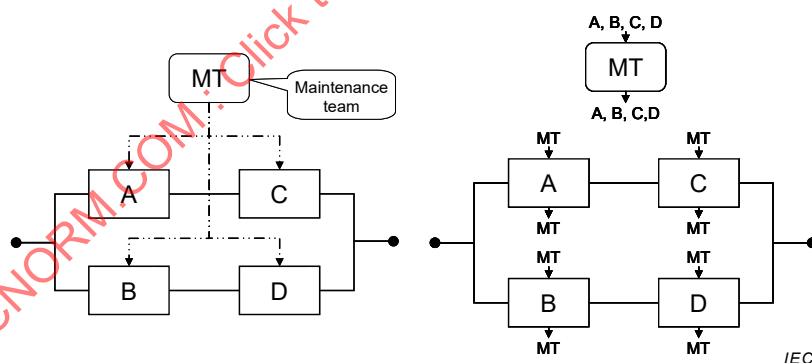
Figure 46 shows the strong interactions (i.e. strong functional dependencies) between an external element and some blocks: blocks A and B fail when the common cause failure represented by the external block CCF occurs.



**Figure 47 – Various ways to indicate dynamic interaction between blocks**

Figure 47 shows two ways to represent the interaction (i.e. functional dependencies) between blocks: the state of blocks C and D depends on the state of block A.

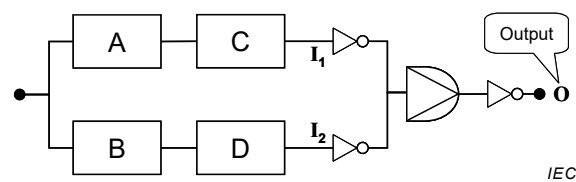
The same mechanisms have been implemented in Figure 48 to represent the interaction between the single repair team and the repaired blocks.



**Figure 48 – Dynamic interaction between a single repair team and RBDs' blocks**

These simple graphical representations aim only at indicating that there is some dynamic interaction between the blocks and the external elements. The dotted lines on the left hand side of Figure 47 and Figure 48 can be used when only few interactions have to be represented in an RBD. When there are many interactions to be represented, the proposal on the right hand side of Figure 47, Figure 46 and Figure 48 is clearer. The very nature of the interactions themselves should be specified elsewhere. The main use of these representations is to support the graphical presentation of the RBD and to ensure that the external elements are well identified.

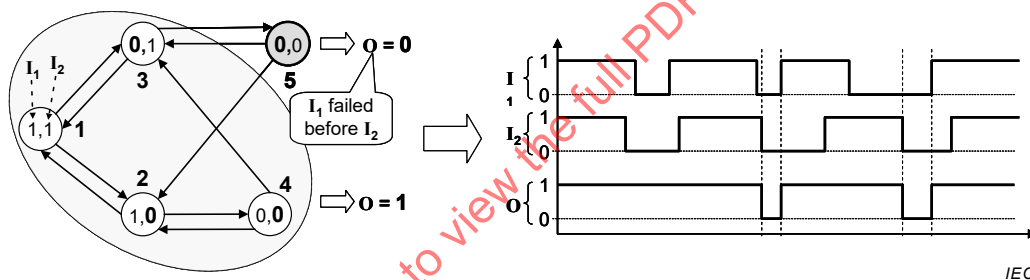
Figure 49 shows how a PAND gate can be used within a DRBD: the output O goes to the down state only if  $I_1$  goes to the down state before  $I_2$  goes to the down state.



**Figure 49 – Implementation of a PAND gate**

The functioning of the PAND gate is illustrated in Figure 50. The PAND gate is equivalent to the 5 states of the finite-state automaton drawn on the left hand side of the figure.

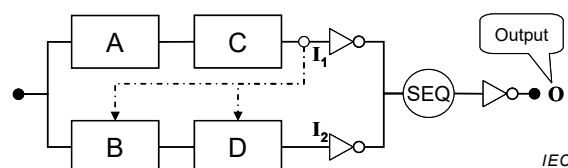
- State 1:  $I_1$  and  $I_2$  are in up state. Then the output  $O$  is in the up state.
- State 2:  $I_2$  has gone to the down state first and  $I_1$  is still in the up state. Then the output  $O$  is in the up state.
- State 3:  $I_1$  has gone to the down state first and  $I_2$  is still in the up state. Then the output  $O$  is in the up state.
- State 4:  $I_1$  and  $I_2$  have gone to the down state but  $I_2$  has gone first. Then the output  $O$  is in the up state.
- State 5:  $I_1$  and  $I_2$  have gone to the down state but  $I_1$  has gone first. Then the output  $O$  has gone to the down state.



**Figure 50 – Equivalent finite-state automaton and example of chronogram for a PAND gate**

Then, when the input  $I_1$  and  $I_2$  varies between 1 and 0, the output of the PAND gate (Figure 49) changes according to the rules presented by this finite-state automaton. This gives, for example, the chronogram presented on the right hand side of Figure 50. A Petri net modelling the same finite-state automaton is analysed in Annex E and Figure E.6.

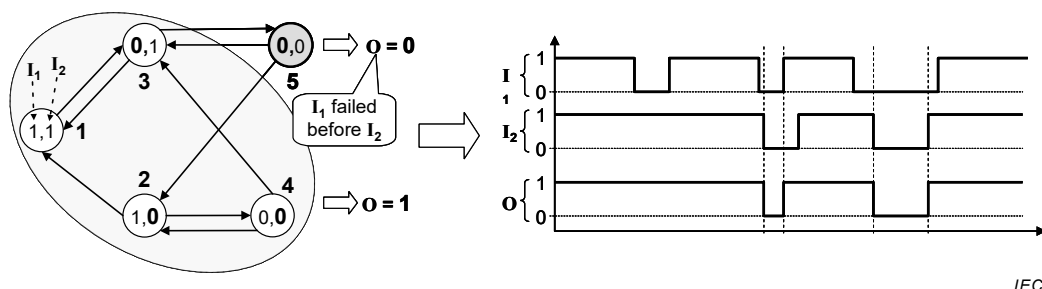
Figure 51 shows how a SEQ gate can be used within a DRBD: as for the PAND gate, the output  $O$  goes to the down state only if  $I_1$  goes to the down state before  $I_2$  goes to the up state. The difference is that  $I_2$  cannot go to the down state before  $I_1$  has gone to the down state first. Therefore, the failure of B and D are inhibited as long as  $I_1$  is in up state and this is indicated thanks to the dynamic interactions drawn in dotted lines.



**Figure 51 – Implementation of a SEQ gate**

The functioning is illustrated in Figure 52. The SEQ gate is equivalent to the 5 states finite-state automaton drawn on the left hand side of the figure. The states are the same as for the

PAND gate except that there is no transition from state 1 to state 2 in order to force the order of the failures:  $I_1$  first, then  $I_2$ .



**Figure 52 – Equivalent finite-state automaton and example of chronogram for a SEQ gate**

As shown in the chronogram,  $I_2$  cannot fail before  $I_1$  has previously failed.

A Petri net modelling the same finite-state automaton is analysed in Annex E, Figure E.6 and Figure E.7.

#### 12.2.5 Probabilistic calculations

Making the probabilistic calculation by using the Markovian approach is proposed in literature (see references [2], [29] and [30]). Nevertheless, building a Markov process for a whole DRBD is quickly limited by the combinatorial explosion of the number of states. Therefore, this approach should be restricted to small independent parts of the DRBD as this has been done for the RBD driven Markov processes described in Clause C.4.

Another approach which is proposed in literature is to make the link between DRBDs and finite state automata (state-events machine or Petri net). This is more effective than the markovian approach but the analytical calculations are no longer possible and Monte Carlo simulation has to be implemented.

The RBD driven Petri nets described in Annex E are an effective way to mix the RBD and PN approaches in order to deal with dynamic RBDs problems and calculations.

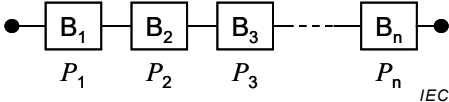
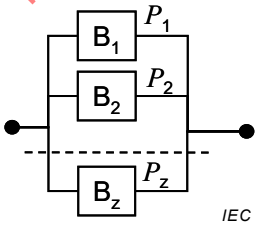
## Annex A (informative)

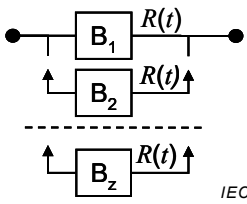
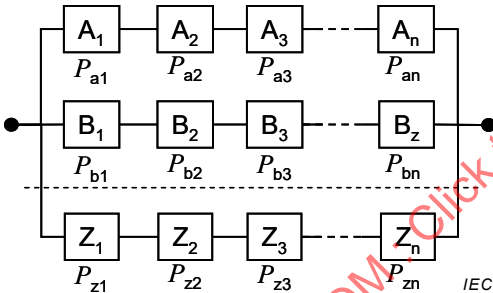
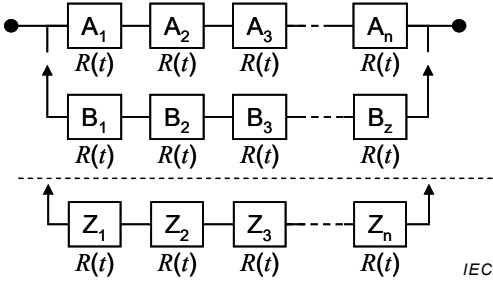
### Summary of formulae

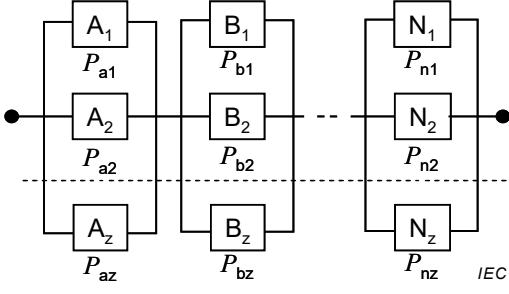
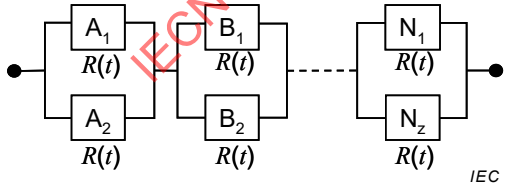
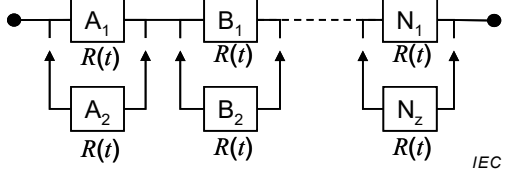
Warning: The formulae presented in Table A.1 are intended to be used by users aware of the underlying hypothesis and mathematics and of the limitations when approximations are implemented.

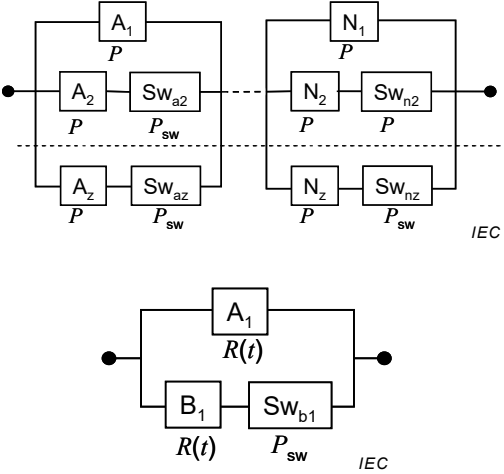
NOTE In Table A.1, frequent use is made of the terms “active” and “standby”. The former is used to indicate that the blocks concerned (each of which can consist of a component, sub-system, system, etc.) are energized (powered-up) and hence are liable to failure. The latter on the other hand is used to indicate that the block or blocks concerned are de-energized (powered-down) and not liable to failure.

**Table A.1 – Example of equations for calculating the probability of success of basic configurations**

| Basic configuration                                                                                                                  | Equation for system $P_S, R_S(t), A_S(t)$                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>1 Series structures</b><br>                      | <p><b>A General case</b></p> <p>Constant probabilities:</p> $P_S = P_1 \cdot P_2 \cdot \dots \cdot P_n$ <p>Time dependent probabilities:</p> $R_S(t) = R_1(t) \cdot R_2(t) \cdot \dots \cdot R_n(t)$ $A_S(t) = A_1(t) \cdot A_2(t) \cdot \dots \cdot A_n(t)$                                                                                    |
|                                                                                                                                      | <p><b>B</b> With <math>P_1 = P_2 = \dots P_n = P</math><br/> <math>\Rightarrow P_S = P^n</math></p> <p><b>C</b> With <math>R_1(t) = R_2(t) = \dots R_n(t) = R(t)</math><br/> <math>\Rightarrow R_S(t) = R(t)^n</math></p> <p><b>D</b> With <math>A_1(t) = A_2(t) = \dots A_n(t) = A(t)</math><br/> <math>\Rightarrow A_S(t) = A(t)^n</math></p> |
| <b>2 Parallel structures</b><br><b>Active</b><br> | <p><b>A Active general case</b></p> <p>Constant probabilities:</p> $P_S = 1 - (1 - P_1) \cdot (1 - P_2) \cdot \dots \cdot (1 - P_z)$ <p>Time dependent probabilities:</p> <p><math>R_S(t)</math>: no simple general formula (see NOTE 1)</p> $A_S(t) = 1 - [1 - A_1(t)] \cdot [1 - A_2(t)] \cdot \dots \cdot [1 - A_z(t)]$                      |
|                                                                                                                                      | <p><b>B</b> With <math>P_1 = P_2 \dots = P \quad \Rightarrow P_S = 1 - (1 - P)^z</math></p> <p><b>C</b> With <math>A_1(t) = A_2(t) = \dots A_z(t) = A(t)</math><br/> <math>\Rightarrow A_S(t) = [1 - A(t)]^z</math></p>                                                                                                                         |

| Basic configuration                                                                                                                                                     | Equation for system $P_S$ , $R_S(t)$ , $A_S(t)$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p><b>Standby</b></p>                                                                  | <p><b>D</b> Standby with <math>R(t) = A(t) = e^{-\lambda \cdot t}</math> (i.e., non-repaired items)</p> $R_S(t) = A_S(t) = e^{-\lambda \cdot t} + \lambda \cdot t \cdot e^{-\lambda \cdot t} + \dots + \frac{(\lambda \cdot t)^{z-1} e^{-\lambda \cdot t}}{(z-1)!}$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |
| <p><b>3 Series-parallel structures (redundant systems)</b></p> <p><b>Active</b></p>  | <p><b>A Active general case</b></p> <p>Constant probabilities</p> $P_S = 1 - \prod_{i=a}^z (1 - P_{i1} \cdot P_{i2} \dots P_{in}) = 1 - \prod_{i=a}^z [1 - \prod_{j=1}^n P_{ij}]$ <p>Time dependent probabilities:</p> <p><math>R_S(t)</math>: no simple general formula (see NOTE 1)</p> $A_S(t) = 1 - \prod_{i=a}^z [1 - \prod_{j=1}^n A_{ij}(t)]$ <p><b>B Active with</b></p> $P_{i1} = P_{i2} = \dots = P_i \quad \forall i \Rightarrow P_S = 1 - \prod_{i=a}^z (1 - P_i^n)$ <p><b>C Active with</b></p> $A_{i1}(t) = A_{i2}(t) = \dots = A_i(t) \quad \forall i \Rightarrow A_S(t) = 1 - \prod_{i=a}^z [1 - A_i(t)^n]$ <p><b>D Active with</b></p> $P_{ij} = P \quad \forall i, j \Rightarrow P_S = 1 - \prod_{i=a}^z (1 - P^n)$ <p><b>E Active with</b></p> $A_{ij}(t) = A(t) \quad \forall i, j \Rightarrow A_S(t) = 1 - [1 - A(t)]^n$ |
| <p><b>Standby</b></p>                                                                | <p><b>F</b> Standby with <math>R(t) = A(t) = e^{-\lambda t}</math> (i.e., non-repaired items)</p> $R_S(t) = A_S(t) = e^{-n\lambda t} + n\lambda t \cdot e^{-n\lambda t} + \dots + \frac{(n\lambda t)^{z-1} e^{-n\lambda t}}{(z-1)!}$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |

| Basic configuration                                                                                                                                                                            | Equation for system $P_S, R_S(t), A_S(t)$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>4 Parallel-series structures</b><br>(redundant elements)                                                                                                                                    |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |
| <p><b>Active</b></p> <br> | <p><b>A Active general case</b><br/>Constant probabilities</p> $P_S = \prod_{i=a}^n \left\{ 1 - \prod_{j=1}^z (1 - P_{ij}) \right\}$ <p>Time dependent probabilities:</p> <p><math>R_S(t)</math>: no simple general formula (see NOTE 1)</p> $A_S(t) = \prod_{i=a}^n \left\{ 1 - \prod_{j=1}^z [1 - A_{ij}(t)] \right\}$ <p><b>B Active with</b></p> $P_{i1} = P_{i2} = \dots = P_i \quad \forall i \quad \Rightarrow P_S = \prod_{i=a}^n [1 - (1 - P_i)^z]$ <p><b>E Active with</b></p> $A_{i1}(t) = A_{i2}(t) = \dots = A_i(t) \quad \forall i$ $\Rightarrow A_S(t) = \prod_{i=a}^n \{ 1 - [1 - A_i(t)]^z \}$ <p><b>F Active with</b></p> $P_{ij} = P \quad \forall i, j \quad \Rightarrow P_S = [1 - (1 - P)^z]^n$ <p><b>G Active with</b></p> $A_{ij}(t) = A(t) \quad \forall i, j \quad \Rightarrow A_S(t) = \{ 1 - [1 - A(t)]^z \}^n$ <p><b>H Assuming <math>R(t) = A(t) = e^{-\lambda \cdot t}</math></b></p> $R_S(t) = A_S(t) = (2 \cdot e^{-\lambda \cdot t} - e^{-2 \cdot \lambda \cdot t})^n$ |
| <p><b>Standby</b></p>                                                                                       | <p><b>D Standby with <math>R(t) = A(t) = e^{-\lambda \cdot t}</math></b></p> $R_S(t) = A_S(t) = (e^{-\lambda \cdot t} + \lambda \cdot t \cdot e^{-\lambda \cdot t})^n$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |

| Basic configuration                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            | Equation for system $P_S, R_S(t), A_S(t)$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p><b>5 Parallel-series structures</b><br/>(redundant elements)</p>  <p style="text-align: right;">IEC</p>                                                                                                                                                                                                    | <p><b>A</b> Active with <math>P_{ij} = P \quad \forall i, j</math> except <math>P_{sw}</math></p> $\Rightarrow P_S = [1 - (1 - P) \cdot (1 - P \cdot P_{sw})^{z-1}]^n$ <p><b>B</b> Active with <math>A_{ij}(t) = A(t) \quad \forall i, j</math> except <math>A_{sw}(t)</math></p> $\Rightarrow A_S(t) = \left\{ 1 - [1 - A_S(t)] \cdot [1 - A_S(t) \cdot A_{sw}(t)]^{z-1} \right\}^n$ <p><b>C</b> Active with <math>z = 2, n = 1</math></p> <p>and <math>R_{ij}(t) = A_{ij}(t) = e^{-\lambda t} \quad \forall i, j</math> except <math>P_{sw}</math></p> $\Rightarrow R_S(t) = A_S(t) = e^{-\lambda t} + P_{sw} e^{-\lambda t} - P_{sw} e^{-2\lambda t}$ |
| <p>NOTE 1 In case of non-repaired blocks <math>R_S(t) = A_S(t)</math>.</p> <p>NOTE 2 For non-repaired blocks with constant failure rates, <math>P</math> can be replaced by <math>R(t) = A(t) = e^{-\lambda t}</math>.</p> <p>NOTE 3 Formulae for standby systems are based on the assumption that the reliability of switching and sensing mechanisms is 100 % (<math>P_{sw} = 1</math>).</p> |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |

IECNORM.COM : Click to view the full PDF of IEC 61078:2016

## Annex B (informative)

### Boolean algebra methods

#### B.1 Introductory remarks

Apart from the use of Boolean truth tables (see 11.4) and binary decision diagrams (see 11.5), the analysis of RBDs as described so far makes use mainly of conventional algebraic mathematical formulae. However, Boolean algebra in general can also be used for such analyses, and in many instances is much more efficacious and straightforward. In particular, the use of Boolean algebra may well be the most straightforward approach whenever

- a) RBDs contain repeated blocks (see Figure 37),
- b) RBDs contain directional arrows (see Figure 10 and Figure 35),
- c) the system is particularly complicated,
- d) it is easier to construct a Boolean expression for system success (or failure) than it is to construct an RBD,
- e) the system comprises a number of blocks too large to be tractable by simple formulae.

Item d) of the above list is worthy of note. For many systems and networks the listing of equipment success (or failure) combinations in Boolean terms is often a more straightforward task than the construction of the corresponding RBD. By employing at the outset the Boolean approach to analyse the system, the risk of making errors in the course of constructing the RBD is entirely avoided.

Item e) of the above list may be related to RBDs modelling industrial systems with a dozen of components and leading to the combinatorial explosion of the terms to be taken into account in the formulae. This is particularly crucial when numerous repeated blocks also have to be managed.

#### B.2 Notation

The conventional symbols  $\cup$  and  $\cap$  denoting the logical “OR” and “AND” play for the Boolean algebra the same role as the addition (+) and of the multiplication ( $\cdot$ ) for ordinary algebra. This is why, in what follows, it has been found more convenient, to use a “+” symbol to denote logical “OR” and a full stop “•” to denote logical “AND”<sup>2</sup>. As usual a bar over a Boolean variable will denote the inverse or complement of the variable concerned: e.g.  $\bar{a}$  is interpreted as “not  $a$ ”. For example  $a \cdot b \cdot \bar{c} \cdot e + f \cdot g$  is to be interpreted “ $a$  AND  $b$  AND NOT  $c$  AND  $e$  OR  $f$  AND  $g$ ”. The context in which the symbols are used should make the meaning clear.

<sup>2</sup> The advantage of such a notation becomes apparent in Annex B where expressions of the type  $S = a \cdot b + \bar{a} \cdot e \cdot b + \bar{a} \cdot e \cdot d + a \cdot \bar{b} \cdot e \cdot d + \bar{a} \cdot c \cdot d + a \cdot \bar{b} \cdot c \cdot d$  are frequently found. Taking this latter expression as an example and writing it using set theory symbols, one obtains:  $S = a \cap b \cup \bar{a} \cap e \cap b \cup \bar{a} \cap e \cap d \cup a \cap \bar{b} \cap e \cap d \cup \bar{a} \cap c \cap d \cup a \cap \bar{b} \cap c \cap d$  which for many readers may be quite difficult to interpret or evaluate.

## B.3 Tie sets (success paths) and cut sets (failure paths) analysis

### B.3.1 Notion of cut and tie sets

As said in 8.1, an RBD can be considered as an electrical circuit (see Figure 14) and this analogy is useful to identify:

- the tie sets which correspond to a closed electrical circuit and represent the combinations of the blocks in up states leading to the system being in the up state. The tie sets are also the "success" paths of the RBD;
- the cut sets which correspond to a cut electrical circuit and represent the combinations of the blocks in down states leading to the system being in the down state. The cut sets are also the "failure" paths of the RBD.

Using this analogy allows to transform the RBD presented in Figure 10 into the electrical circuit presented in Figure 15. From this representation it is easy to identify various tie sets of this RBD and Figure B.1 and Figure B.2 show various examples of combinations of closed switches corresponding to the system up state.

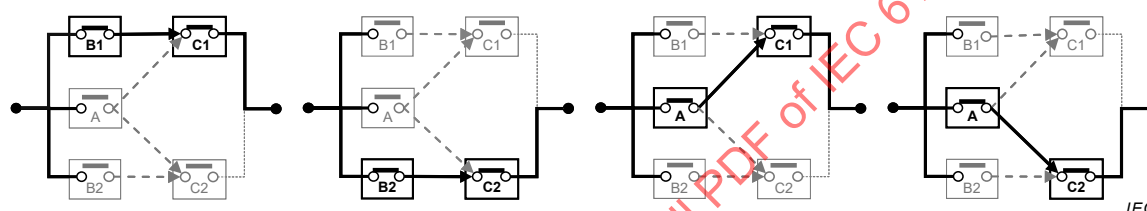


Figure B.1 – Examples of minimal tie sets (success paths)

In Figure B.1 any opening (i.e. any failure) of the closed switches will cut the circuit and lead to the system down state. All those closed switches (i.e. blocks in up states) are necessary and sufficient to have the system in up state. Those combinations are minimal and are named minimal tie sets.

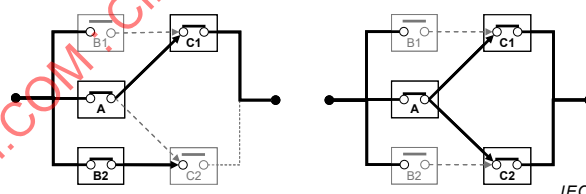


Figure B.2 – Examples of non-minimal tie sets (non minimal success paths)

In Figure B.2 some opening of the closed switches (e.g. B2 on the left or C1 on the right) will not change the system up state. All the closed switches (i.e. blocks in up states) are not necessary to have the system in up state. Those combinations are not minimal and are named non-minimal tie sets (or ordinary tie sets).

From the same Figure 15 it is also easy to identify various cut sets of this RBD and Figure B.3 and Figure B.4 show various examples of combinations of open switches corresponding to the system down state.

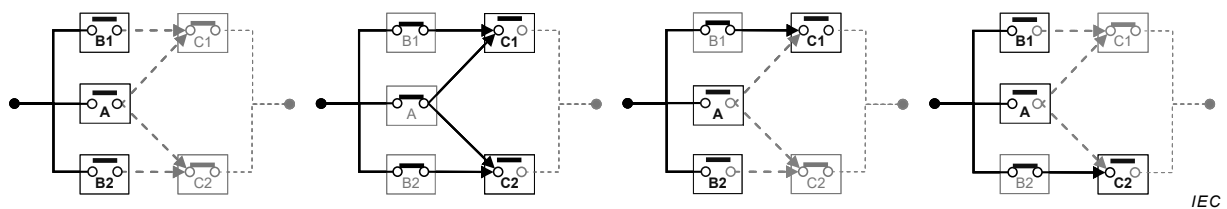


Figure B.3 – Examples of minimal cut sets

In Figure B.3 any closing (i.e. any repair) of the open switches will close the circuit and lead to the system up state. All the open switches (i.e. blocks in down states) are necessary and sufficient to have the system in down state. Those combinations are minimal and are named minimal cut sets.

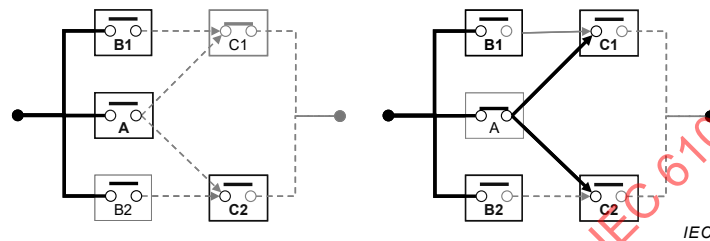


Figure B.4 – Examples of non-minimal cut sets

In Figure B.4 some closing of the open switches (e.g. C2 on the left or B2 on the right) will not change the system down state. All the open switches (i.e. blocks in down states) are not necessary to have the system in down state. Those combinations are not minimal and are named non-minimal cut sets (or ordinary cut sets).

### B.3.2 Series-parallel representation using minimal tie and cut sets

Applying the Boolean algebra properties leads to represent the system up state,  $s$ , as the union of the minimal tie sets ( $\Pi_i$ ) of the RBD and the system down state,  $\bar{s}$ , as the union of the minimal cut sets ( $C_k$ ) of the RBD.

This can be applied to the previous example which has four minimal tie sets,  $(b_1 \bullet c_1)$ ,  $(a \bullet c_1)$ ,  $(a \bullet c_2)$ ,  $(b_2 \bullet c_2)$ . This leads to:

$$s = \bigcup_i \Pi_i = b_1 \bullet c_1 + a \bullet c_1 + a \bullet c_2 + b_2 \bullet c_2 \quad (\text{B.1})$$

The same example has four minimal cut sets,  $(\bar{b}_1 \bullet \bar{a} \bullet \bar{b}_2)$ ,  $(\bar{c}_1 \bullet \bar{c}_2)$ ,  $(\bar{b}_1 \bullet \bar{a} \bullet \bar{c}_2)$ ,  $(\bar{b}_2 \bullet \bar{a} \bullet \bar{c}_1)$  and this leads to:

$$\bar{s} = \bigcup_j C_j = \bar{b}_1 \bullet \bar{a} \bullet \bar{b}_2 + \bar{c}_1 \bullet \bar{c}_2 + \bar{b}_1 \bullet \bar{a} \bullet \bar{c}_2 + \bar{b}_2 \bullet \bar{a} \bullet \bar{c}_1 \quad (\text{B.2})$$

These formulae provide "dual" representations of the same system. Formula (B.1) is focused on the system success when Formula (B.2) is focused on system failure.

Formula (B.2) is equivalent to  $s = \bar{\bar{s}} = \overline{\bar{b}_1 \bullet \bar{a} \bullet \bar{b}_2 + \bar{c}_1 \bullet \bar{c}_2 + \bar{b}_1 \bullet \bar{a} \bullet \bar{c}_2 + \bar{b}_2 \bullet \bar{a} \bullet \bar{c}_1}$ .

The transformation of Formula (B.2) involves the use of the De Morgan laws:

$$\overline{a \bullet b} = \bar{a} + \bar{b}$$

$$\overline{a + b} = \bar{a} \bullet \bar{b}$$

This leads to:

$$s = \overline{b_1 \bullet \bar{a} \bullet b_2 \bullet \bar{c}_1 \bullet \bar{c}_2} \bullet \overline{b_1 \bullet \bar{a} \bullet c_2 \bullet b_2 \bullet \bar{a} \bullet \bar{c}_1} \text{ which gives:}$$

$$s = (b_1 + a + b_2) \bullet (c_1 + c_2) \bullet (b_1 + a + c_2) \bullet (b_2 + a + c_1) \quad (\text{B.3})$$

Finally two equivalent representations of the logical formula representing the RBD in the up state are obtained. Formula (B.1) provides a representation with the success paths and Formula (B.3) (see Figure 18) a representation of the RBD with the minimal cut sets (see Figure 19).

### B.3.3 Identification of minimal cuts and tie sets

The minimal cut sets and minimal tie sets can be obtained by expanding the logical formulae corresponding to the RBD.

This can be done with a simple RBD as shown hereafter with the RBD drawn in Figure B.5.

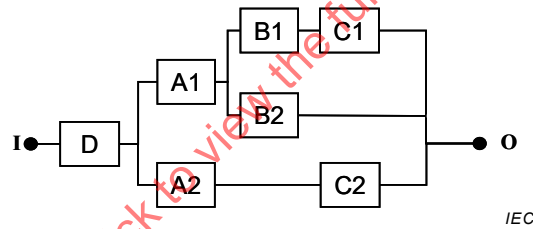


Figure B.5 – Example of RBD with tie and cut sets of various order

The logical structure of this RBD provides the following logical formula:

$$s = d \bullet \{ (a_2 \bullet c_2) + [a_1 \bullet (b_1 \bullet c_1) + a_1 \bullet b_2] \} \quad (\text{B.4})$$

Then expanding Formula (B.4) leads to:

$$s = d \bullet \{ (a_2 \bullet c_2) + [a_1 \bullet b_1 \bullet c_1 + a_1 \bullet b_2] \} \text{ and } s = d \bullet a_2 \bullet c_2 + d \bullet a_1 \bullet b_1 \bullet c_1 + d \bullet a_1 \bullet b_2.$$

Therefore this RBD has three minimal success paths:  $(d \bullet a_2 \bullet c_2)$ ,  $(d \bullet a_1 \bullet b_2)$ ,  $(d \bullet a_1 \bullet b_1 \bullet c_1)$ .

The minimal cut sets can be obtained by complementing Formula (B.4) and using the De Morgan laws:

$$\bar{s} = \overline{d \bullet \{ (a_2 \bullet c_2) + [a_1 \bullet (b_1 \bullet c_1) + a_1 \bullet b_2] \}}$$

$$\bar{s} = \bar{d} + \overline{(a_2 \bullet c_2)} \bullet \overline{[a_1 \bullet (b_1 \bullet c_1) + a_1 \bullet b_2]} = \bar{d} + (\bar{a}_2 + \bar{c}_2) \bullet (\bar{a}_1 + \bar{b}_1 + \bar{c}_1) \bullet (\bar{a}_1 + \bar{b}_2)$$

$$\bar{s} = \bar{d} + \bar{a}_1 \bullet \bar{a}_2 + \bar{a}_1 \bullet \bar{c}_2 + \bar{a}_2 \bullet \bar{b}_1 \bullet \bar{b}_2 + \bar{a}_2 \bullet \bar{c}_1 \bullet \bar{b}_2 + \bar{c}_2 \bullet \bar{c}_1 \bullet \bar{b}_2 + \bar{c}_2 \bullet \bar{b}_1 \bullet \bar{b}_2$$

And finally, seven minimal cut sets are found:  $\bar{d}$ ,  $(\bar{a}_1 \bullet \bar{a}_2)$ ,  $(\bar{a}_1 \bullet \bar{c}_2)$ ,  $(\bar{a}_2 \bullet \bar{b}_1 \bullet \bar{b}_2)$ ,  $(\bar{a}_2 \bullet \bar{c}_1 \bullet \bar{b}_2)$ ,  $(\bar{c}_2 \bullet \bar{c}_1 \bullet \bar{b}_2)$ ,  $(\bar{c}_2 \bullet \bar{b}_1 \bullet \bar{b}_2)$ .

Minimal tie and cut sets represent the same information but, from a qualitative analysis point of view, the minimal cut sets are more relevant because the shortest minimal cut sets are likely to be more probable than the other minimal cut sets.

Therefore, the cut sets of the above RBD in Figure B.5 can be sorted by order (see 3.18, Note 2 to entry):

- order one,  $\bar{d}$ ;
- order two,  $(\bar{a}_1 \bullet \bar{a}_2)$ ,  $(\bar{a}_1 \bullet \bar{c}_2)$ ;
- order three,  $(\bar{a}_2 \bullet \bar{b}_1 \bullet \bar{b}_2)$ ,  $(\bar{a}_2 \bullet \bar{c}_1 \bullet \bar{b}_2)$ ,  $(\bar{c}_2 \bullet \bar{c}_1 \bullet \bar{b}_2)$ ,  $(\bar{c}_2 \bullet \bar{b}_1 \bullet \bar{b}_2)$ .

From a qualitative point of view, the weak point of this system is certainly the minimal cut set of order one,  $\bar{d}$ .

Except in simple cases, the above calculations are not really tractable by hand but powerful algorithms are available and implemented into RBD software packages. Minimal tie and cut sets may be found by using, for example, the binary decision diagrams explained in the probabilistic calculation part of this standard.

## B.4 Principles of calculations

### B.4.1 Series structures

Consider a system made of  $n$  blocks ( $B_i$ ) in series similar to that depicted in Figure 2. For that system, it can be seen that the system as a whole is in up state provided all of the blocks  $B_i$  are in up states. In other words, the Boolean expression for system success is given by

$$s = \bigcap_{i=1,n} b_i \equiv b_1 \bullet b_2 \bullet b_3 \bullet \dots \bullet b_n \quad (\text{B.5})$$

where  $b_i$  is a Boolean variable corresponding to the up state of blocks  $B_i$ .

If the blocks are independent then the probability of the system to be in up state is:

$$P_s = P_{b_1} \cdot P_{b_2} \cdot P_{b_3} \cdot \dots \cdot P_{b_n} = \prod_i P_{b_i} \quad (\text{B.6})$$

Therefore, there are no particular calculation problems for calculating  $P_s$  in case of series structures.

Nevertheless, if the above series structure (B.5) belongs to a larger RBD, this calculation can be done only if no block of this series structure is repeated elsewhere in the larger RBD. Otherwise the techniques described in Clauses B.5 or B.6 should be applied

### B.4.2 Parallel structures

Consider a two unit active redundant system such as that depicted in Figure 21. For that system, it can be seen that the system as a whole is in up state provided A or B (or both) are in up states. In other words, the Boolean expression for system success is given by

$$s = a \cup b \equiv a + b \quad (\text{B.7})$$

where  $a$  and  $b$  are Boolean variables corresponding to the up state of blocks A and B respectively.

For a given time  $t$  it is tempting to substitute  $P_a$  and  $P_b$  for  $a$  and  $b$  respectively and rewrite Formula (B.7) in the form:

$$P_s = P_a + P_b \quad (\text{B.8})$$

Formula (B.8) is expected to provide the probability  $P_s$  that the system is in the up state but, unfortunately, is incorrect owing to the fact it is obtained from a Boolean expression in which the variables overlap (i.e.  $a \cap b \equiv a \bullet b \neq \Phi$ ). It does not even provide, in the general case, an acceptable approximation of  $P_s$ . For example  $P_s = 1,2$  is obtained with  $P_a$  and  $P_b$  equal to 0,6. This is obviously incorrect.

Therefore Formula (B.8) shall be completed to:

$$P_s = P_a + P_b - P_a \cdot P_b \quad (\text{B.9})$$

Contrarily to Formula (B.8), Formula (B.9) provides the exact result in any case. With the previous figures it leads to:  $P_s = 0,6 + 0,6 - 0,36 = 0,84$ .

Considering a structure made of  $n$  blocks ( $B_i$ ) in parallel leads to:

$$s = \bigcup_{i=1}^n b_i \equiv b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_n$$

The extension of Formula (B.9) is known as the Sylvester-Poincaré formula:

$$P_s = P\left(\bigcup_{i=1}^n b_i\right) = \sum_{i=1}^n P_{b_i} - \sum_{i < j \leq n} P_{b_i} \cdot P_{b_j} + \sum_{i < j < k \leq n} P_{b_i} \cdot P_{b_j} \cdot P_{b_k} - \text{etc.} \quad (\text{B.10})$$

This is an alternate sum of decreasing terms which converge toward the result  $P_s$ . The number of terms drastically increases when  $n$  increases and the convergence is very slow when the probabilities are high. This is unfortunately the case here because the probabilities,  $P_{b_i}$ , for the blocks to be in up state are normally close to 1. Therefore, Formula (B.10) is not manageable to evaluate  $P_s$  because too many terms need to be taken into consideration.

Fortunately, several alternatives can be considered. The first one is to evaluate the probability for the system to be in the down state rather than in the up state.

For example, the "down state" of the small system (B.7) analysed above is given by  $\bar{s} = \overline{a + b}$  which, by applying the De Morgan laws, leads to the equivalent dual form of the Boolean expression  $\bar{s} = \bar{a} \bullet \bar{b}$ .

If  $a$  and  $b$  are independent from each other, this is the same for  $\bar{a}$  and  $\bar{b}$ . Then the probability for the system to be in the down state is given by:  $P_{\bar{s}} = P_{\bar{a}} \cdot P_{\bar{b}}$ .

And finally:  $P_s = 1 - P_{\bar{s}} = 1 - (1 - P_a) \cdot (1 - P_b)$ .

This can easily be extended to  $n$  blocks in parallel and  $s = \bigcup_{i=1,n} b_i \Leftrightarrow \bar{s} = \bigcap_{i=1,n} \bar{b}_i$  is obtained by applying the De Morgan laws.

$$\text{And finally: } P_s = P\left(\bigcup_i b_i\right) = 1 - P\left(\bigcap_{i=1,n} \bar{b}_i\right) = 1 - \prod_{i=1,n} P_{\bar{b}_i} = 1 - \prod_{i=1,n} (1 - P_{b_i}) \quad (\text{B.11})$$

Formula (B.11) which involves only simple products is easier to use for parallel structures than the Sylvester-Poincaré formula analysed just above.

### B.4.3 Mix of series and parallel structures

Formulae (B.6) and (B.11) can be combined and this can be done by hand in simple cases.

Thus, if a system exists as depicted by Figure 4 but with only three items in each branch, the probability of success of the system is:

$$P_s = P_{a1} \cdot P_{b1} \cdot P_{c1} + P_{a2} \cdot P_{b2} \cdot P_{c2} - P_{a1} \cdot P_{b1} \cdot P_{c1} \cdot P_{a2} \cdot P_{b2} \cdot P_{c2} \quad (\text{B.12})$$

Similarly, for Figure 5, the following applies:

$$P_s = (P_{a1} + P_{a2} - P_{a1} \cdot P_{a2}) \cdot (P_{b1} + P_{b2} - P_{b1} \cdot P_{b2}) \cdot (P_{c1} + P_{c2} - P_{c1} \cdot P_{c2}) \quad (\text{B.13})$$

For Figure 6 and Figure 7, the probability of success of the system equations are obtained simply by multiplying Formulae (B.12) and (B.13) by  $P_d$ .

Nevertheless and except in simple cases, the above calculations (B.12) or (B.13) are not easily tractable by hand. Fortunately, powerful algorithms are available and implemented into RBD software packages. They are based on the techniques described in Clauses B.5, B.6 or B.7.

### B.4.4 $m$ out of $n$ architectures (identical items)

Among the simple cases, the formulae related to the probability of success of systems corresponding to Figure 8 (2/3 logics) and Figure 9 (3/4 logics) are a little more complicated than those developed in B.4.3.

Looking at the 2/3 system presented in Figure 8, Formula (B.9) leads to:

$$\begin{aligned} P_s &= P(x_1 \bullet x_2 + x_1 \bullet x_3 + x_2 \bullet x_3) = P(x_1 \bullet x_2 + x_1 \bullet x_3) + P(x_2 \bullet x_3) - P(x_1 \bullet x_2 \bullet x_3) \\ &= P(x_1 \bullet x_2) + P(x_1 \bullet x_3) - P(x_1 \bullet x_2 \bullet x_3) + P(x_2 \bullet x_3) - P(x_1 \bullet x_2 \bullet x_3) \\ &= P(x_1 \bullet x_2) + P(x_1 \bullet x_3) + P(x_2 \bullet x_3) - 2P(x_1 \bullet x_2 \bullet x_3) \end{aligned}$$

Then if the blocks are independent and have the same probability of success,  $p$ , this leads to  $P_s = 3 \cdot p^2 - 2 \cdot p^3$ .

It can be transformed into  $P_s = p^3 + 3 \cdot p^2 - 3 \cdot p^3$  and finally

$$P_s = p^3 + 3 \cdot p^2 \cdot (1-p) \quad (\text{B.14})$$

is obtained.

Formula (B.14) can be generalized to an  $m/n$  logical structure made of  $n$  identical blocks. In this case  $m$  blocks out of  $n$  are required for system success and the probability of success of the system  $P_s$  is given by the general formula:

$$P_s = \sum_{r=0}^{n-m} \binom{n}{r} \cdot p^{n-r} \cdot (1-p)^r \quad (\text{B.15})$$

Applying Formula (B.15) to the 2/4 logical structure presented in Figure 9 gives:

$$P_s = p^4 + 4 \cdot p^3 \cdot (1-p) + 6 \cdot p^2 \cdot (1-p)^2 = 3 \cdot p^4 - 8 \cdot p^3 + 6 \cdot p^2 \quad (\text{B.16})$$

An  $m/n$  system needs  $m$  blocks in up states to be in up state. Then it needs  $(n-m+1)$  blocks in down states to be in down state. Therefore an  $m/n$  system with regards to up state is a  $(n-m+1)/n$  with regards to down state and the probability of failure of an  $m/n$  system is given by exchanging  $m \leftrightarrow (n-m+1)$  and  $p \leftrightarrow (1-p)$  in Formula (B.15):

$$P_s = \sum_{r=0}^{m-1} \binom{n}{r} \cdot (1-p)^{n-r} \cdot p^r \quad (\text{B.17})$$

#### Particular cases

- When  $m = n - 1$  (e.g. 2/3, 3/4, etc.) Formula (B.15) is reduced to:

$$P_s = n \cdot p^m + m \cdot p^n \quad (\text{B.18})$$

- When  $n = 2m - 1$ , the systems are symmetrical with regards to success and failures: the system is in up state if  $m$  blocks are in up states and is in down state if  $m$  blocks are in down states. This is the case for the 1/1, 2/3, 3/5, etc. logical structures. Because of this property, the 2/3 structure is widely used in industry for designing safety systems.

If the  $n$  items are not identical, use of a more general procedure is recommended (see 11.8.2).

## B.5 Use of Sylvester-Poincaré formula for large RBDs and repeated blocks

### B.5.1 General

When repeated blocks are implemented, the formulae developed in Clause B.3 can be applied only for the parts of the RBD which do not contain the repeated blocks. For other parts of the RBD, the repeated blocks shall be properly taken into account.

Equivalent RBDs made of success paths (minimal tie sets) or of failure combinations (minimal cut sets) are typical RBDs with such repeated blocks. This is why they are analysed hereafter.

### B.5.2 Sylvester-Poincaré formula with tie sets

The success state of a system having  $n$  success path (minimal tie sets),  $(I_i)$ , can be written:

$$s = \bigcup_i \Pi_i$$

The minimal tie sets,  $\Pi_i$ , are not independent from each other and the corresponding Sylvester-Poincaré formula therefore takes the following form:

$$\begin{aligned} P_s &= P\left(\bigcup_{i=1}^n \Pi_i\right) = \sum_i P(\Pi_i) - \sum_{i < j} P(\Pi_i \bullet \Pi_j) + \sum_{i < j < k} P(\Pi_i \bullet \Pi_j \bullet \Pi_k) - \text{etc.} \\ &= SP_i - SP_{ij} + SP_{ijk} - \text{etc.} \end{aligned} \quad (\text{B.19})$$

Formula (B.19) expresses that the probability of the union of the tie sets is equal to

- 1) the sum of the probability of the tie sets (term  $SP_i$ ),
- 2) minus the sum of the probabilities of the intersection of the tie sets  $2 \times 2$  (term  $SP_{ij}$ ),
- 3) plus the sum of the probabilities of the intersection of the tie sets  $3 \times 3$  (term  $SP_{ijk}$ ),
- 4) minus the sum of the probabilities of the intersection of the tie sets  $4 \times 4$  (term  $SP_{ijkl}$ ),
- 5) etc.

The tie sets are not independent as the same event can appear in several tie sets. Therefore, it is necessary to analyse all the intersections of the tie sets before doing the probabilistic calculations in order to simplify them when they include identical events.

This can be shown with the example developed in Clause 8 which comprises 4 minimal tie sets:  $\Pi_1 = b_1 \bullet c_1$ ,  $\Pi_2 = a \bullet c_1$ ,  $\Pi_3 = a \bullet c_2$ ,  $\Pi_4 = b_2 \bullet c_2$ .

Implementing Formula (B.19) leads to the following calculations.

a) First term  $SP_i$ :

$$\sum_i P(\Pi_i) = P_{b_1} \cdot P_{c_1} + P_a \cdot P_{c_1} + P_a \cdot P_{c_2} + P_{b_2} \cdot P_{c_2}$$

b) Second term  $SP_{ij}$ :

$$\begin{aligned} \sum_{i < j} P(\Pi_i \bullet \Pi_j) &= P(\Pi_1 \bullet \Pi_2) + P(\Pi_1 \bullet \Pi_3) + P(\Pi_1 \bullet \Pi_4) + P(\Pi_2 \bullet \Pi_3) + P(\Pi_2 \bullet \Pi_4) + P(\Pi_3 \bullet \Pi_4) \\ &= P(b_1 \bullet c_1 \bullet a \bullet c_1) + P(b_1 \bullet c_1 \bullet a \bullet c_2) + P(b_1 \bullet c_1 \bullet b_2 \bullet c_2) + P(a \bullet c_1 \bullet a \bullet c_2) + P(a \bullet c_1 \bullet b_2 \bullet c_2) + P(a \bullet c_2 \bullet b_2 \bullet c_2) \\ &= P(b_1 \bullet c_1 \bullet a) + P(b_1 \bullet c_1 \bullet a \bullet c_2) + P(b_1 \bullet c_1 \bullet b_2 \bullet c_2) + P(a \bullet c_1 \bullet c_2) + P(a \bullet c_1 \bullet b_2 \bullet c_2) + P(a \bullet b_2 \bullet c_2) \\ &= P_{b_1} \cdot P_{c_1} \cdot P_a + P_{b_1} \cdot P_{c_1} \cdot P_a \cdot P_{c_2} + P_{b_1} \cdot P_{c_1} \cdot P_{b_2} \cdot P_{c_2} + P_a \cdot P_{c_1} \cdot P_{c_2} + P_a \cdot P_{c_1} \cdot P_{b_2} \cdot P_{c_2} + P_a \cdot P_{b_2} \cdot P_{c_2} \end{aligned}$$

c) Third term  $SP_{ijk}$ :

$$\begin{aligned} \sum_{i < j < k} P(\Pi_i \bullet \Pi_j \bullet \Pi_k) &= P(\Pi_1 \bullet \Pi_2 \bullet \Pi_3) + P(\Pi_1 \bullet \Pi_2 \bullet \Pi_4) + P(\Pi_2 \bullet \Pi_3 \bullet \Pi_4) \\ &= P(b_1 \bullet c_1 \bullet a \bullet a \bullet c_2) + P(b_1 \bullet c_1 \bullet a \bullet a \bullet b_2 \bullet c_2) + P(a \bullet c_1 \bullet a \bullet a \bullet c_2 \bullet b_2 \bullet c_2) \\ &= P(b_1 \bullet c_1 \bullet a \bullet c_2) + P(b_1 \bullet c_1 \bullet a \bullet b_2 \bullet c_2) + P(a \bullet c_1 \bullet b_2 \bullet c_2) \\ &= P_{b_1} \cdot P_{c_1} \cdot P_a \cdot P_{c_2} + P_{b_1} \cdot P_{c_1} \cdot P_a \cdot P_{b_2} \cdot P_{c_2} + P_a \cdot P_{c_1} \cdot P_{b_2} \cdot P_{c_2} \end{aligned}$$

d) Fourth term  $SP_{ijkl}$ :

$$\begin{aligned} \sum_{i < j < k < l} P(\Pi_i \bullet \Pi_j \bullet \Pi_k \bullet \Pi_l) &= P(\Pi_1 \bullet \Pi_2 \bullet \Pi_3 \bullet \Pi_4) \\ &= P(b_1 \bullet c_1 \bullet a \bullet a \bullet c_2 \bullet b_2 \bullet c_2) = P(b_1 \bullet c_1 \bullet a \bullet c_2 \bullet b_2) = P_{b_1} \cdot P_{c_1} \cdot P_a \cdot P_{c_2} \cdot P_{b_2} \end{aligned}$$

Therefore, with these 4 minimal tie sets  $4 + 6 + 3 + 1 = 14$  terms to be calculated have been identified.

As the probability of tie sets,  $P(\Pi_i)$ , are normally not small compared to 1, the probabilities of  $P(\Pi_i \bullet \Pi_j)$ ,  $P(\Pi_i \bullet \Pi_j \bullet \Pi_k)$  are also not small and cannot be neglected.

With 3 events with high probabilities  $P_a = P_b = P_c = 0,9$  the following results are obtained:

$$P(a + b + c) = P_a + P_b + P_c - (P_a \cdot P_b + P_a \cdot P_c + P_b \cdot P_c) + P_a \cdot P_b \cdot P_c$$

$$P(a + b + c) = 2,7 - 2,43 + 0,729 = 0,999$$

Therefore, no term is negligible and all terms have to be considered in the calculations. Therefore Formula (B.19) is not really manageable because too many terms are needed to obtain suitable approximations.

### B.5.3 Sylvester-Poincaré formula with cut sets

The failed state of a system having  $m$  failure paths (minimal cut sets),  $(C_i)$  can be written:

$$\bar{s} = \bigcup_i C_i$$

This leads to the corresponding Sylvester-Poincaré formula:

$$\begin{aligned} P_s = 1 - P_{\bar{s}} &= P\left(\bigcup_{i=1}^m C_i\right) = \sum_i P(C_i) - \sum_{i < j} P(C_i \bullet C_j) + \sum_{i < j < k} P(C_i \bullet C_j \bullet C_k) - \text{etc.} \\ &= SP_i - SP_{ij} + SP_{ijk} - \text{etc.} \end{aligned} \quad (\text{B.20})$$

The example from Clause 8 provides also 4 minimal cut sets

$$C_1 = \bar{b}_1 \bullet \bar{a} \bullet \bar{b}_2, \quad C_2 = \bar{c}_1 \bullet \bar{c}_2, \quad C_3 = \bar{b}_1 \bullet \bar{a} \bullet \bar{c}_2, \quad C_4 = \bar{b}_2 \bullet \bar{a} \bullet \bar{c}_2$$

and, as with the tie sets, this also implies the calculations of 14 terms however the situation is very different because the probabilities  $P(C_i)$  are normally small compared to 1.

Then the probabilities of  $P(C_i \bullet C_j)$ ,  $P(C_i \bullet C_j \bullet C_k)$ , etc. are smaller and smaller and Formula (B.20) converges rather quickly. Therefore, approximations are available.

If the formula  $P(a + b + c) = P_a + P_b + P_c - (P_a \cdot P_b + P_a \cdot P_c + P_b \cdot P_c) + P_a \cdot P_b \cdot P_c$  is considered, the results with 3 events with high ( $P_a = P_b = P_c = 0,9$ ) and 3 events with low probabilities ( $P_a = P_b = P_c = 0,01$ ) can be compared:

- $P(a + b + c) = 2,7 - 2,43 + 0,729 = 0,999$  is obtained with  $P_a = P_b = P_c = 0,9$ ;
- $P(a + b + c) = 0,03 - 0,0003 + 0,000001 = 0,029701$  is obtained with  $P_a = P_b = P_c = 0,01$ .

Then in the case with low probabilities

- the term  $SP_i$  alone provides an upper bound of the probability: 0,03,
- the sum  $SP_i - SP_{ij}$  provides a lower bound: 0,0297,

and the exact result belongs to the interval [0,03 – 0,029 7].

These results can be extrapolated to a large number of events:

- when the probabilities are high, the convergence is very slow and all the terms have to be considered to obtain the result;
- when the probabilities are low, the convergence is fast and the first term of the Sylvester-Poincaré formula provides an acceptable approximated result and the first two terms a good interval to which the result belongs.

Then the Sylvester-Poincaré Formula (B.20) using cut sets ( $C_i$ ) which generally involves low probabilities, is a better candidate than Formula (B.19) using tie sets ( $I_i$ ) to derive acceptable approximations. Therefore, it is better to consider the minimal cut sets ( $C_i$ ) than the tie sets ( $I_i$ ) when performing probabilistic calculations.

The lower the resulting probability,  $P_s$ , the faster the convergence is obtained and in the best cases the following approximation works well:

$$P_s = P\left(\bigcup_{i=1}^n C_i\right) \approx \sum_i P_{C_i} \quad (\text{B.21})$$

This approximation is widely used and is the basis of calculations performed by numerous software packages available for availability/reliability calculations on RBD or fault trees. In some cases the second term of the Sylvester-Poincaré formula is calculated in order to provide the bounds of the interval framing  $P_s$ .

## B.6 Method for disjointing Boolean expressions

### B.6.1 General and background

Formula (B.7) can be written in the equivalent form:

$$s = a + b \equiv (a + b) \bullet \Omega = (a + b) \bullet (a + \bar{a}) = a + \bar{a} \bullet b \quad (\text{B.22})$$

The process of rewriting Formula (B.7) in the form of Formula (B.22) will be referred to as *disjointing*.

In Formula (B.22) the terms  $a$  and  $\bar{a} \bullet b$  are disjoint terms. This implies that  $a \bullet (\bar{a} \bullet b) = \Phi$  and therefore  $P[a \bullet (\bar{a} \bullet b)] = 0$ . Then  $P_s$  is reduced to the well-known result:

$$P_s = P_a + (1 - P_a) \cdot P_b \quad (\text{B.23})$$

Note that it is also possible to write Formula (B.7) in other disjointed forms, one of which is  $s = b + \bar{b} \bullet a$  leading to another correct expression, namely:

$$P_s = P_b + (1 - P_b) \cdot P_a \quad (\text{B.24})$$

Needless to say Formulae (B.23) and (B.24) are equivalent to the formulae  $P_s = P_a + P_b - P_a \cdot P_b$  and  $P_s = 1 - (1 - P_a) \cdot (1 - P_b)$  previously found.

The difference with the previous calculations is that the number of terms in the probability formula is the same as the number of disjoint terms in the Boolean equation.

Let us consider that  $s$  is expressed by the union of disjoint success paths:

$$s = \bigcup_i \Pi_i^d \text{ where } \Pi_i^d \cap \Pi_j^d = \emptyset \forall i, j.$$

Then the Sylvester-Poincaré formula will be reduced to:

$$P_s = P\left(\bigcup_{i=1}^n \Pi_i^d\right) = \sum_i P_{\Pi_i^d} \quad (\text{B.25})$$

In the same way if  $\bar{s}$  is expressed by the union of disjoint cut sets the following formula is obtained:

$$\bar{s} = \bigcup_i C_i^d \text{ where } C_i^d \cap C_j^d = \emptyset \forall i, j$$

and the Sylvester-Poincaré formula will be reduced to:

$$P_{\bar{s}} = P\left(\bigcup_{i=1}^n C_i^d\right) = \sum_i P_{C_i^d} \quad (\text{B.26})$$

Therefore and provided the minimal tie sets or cut sets are disjoint, Formulae (B.25) and (B.26) can be used to perform exact calculations. When the block failure probabilities vary with time they can be used for availability,  $A_S(t)$ , or unavailability  $U_S(t)$  calculations as well.

The primary objective therefore is to be able to cast Boolean expressions for system success (or to system failure) into a disjointed form. This means that each term in the final Boolean expression is disjoint with respect to every other term. Further details of the method can be found in [19].

It should be noted that two terms are mutually disjoint if at least one variable in one term appears in its complementary form in the other. For example the terms  $p \bullet q \bullet r \bullet s$  and  $\bar{s} \bullet t \bullet u$  are disjoint by virtue of  $s$ . The converse is also true. Namely two terms are not disjoint (i.e., they overlap) if none of the variables in one term appear in complementary form in the other. For example, the two terms  $p \bullet q \bullet r$  and  $s \bullet t \bullet u$  are not mutually disjoint.

### B.6.2 Disjointing principle

If two terms  $\theta_1$  and  $\theta_2$  are not disjoint, and it is required to make  $\theta_2$  disjoint with respect to  $\theta_1$  several procedures may be used.

The basic principle is the following:

- pick out all the variables in  $\theta_1$  which do not appear in  $\theta_2$  (such terms are known collectively as the relative complement of  $\theta_2$  with respect to  $\theta_1$ ). Suppose the relative complement is  $v_1 \bullet v_2 \bullet v_3 \bullet v_4$ ;
- then replace  $\theta_2$  by

$$\theta_2^* = \bar{v}_1 \bullet \theta_2 + v_1 \bullet \bar{v}_2 \bullet \theta_2 + v_1 \bullet v_2 \bullet \bar{v}_3 \bullet \theta_2 + v_1 \bullet v_2 \bullet v_3 \bullet \bar{v}_4 \bullet \theta_2.$$

The resulting expression  $\theta_1 + \theta_2^*$  will consist of terms which will all be disjoint with respect to one another.

For example, to make the term  $\theta_2 = d \bullet e \bullet f$  disjoint with respect to the term  $\theta_1 = a \bullet b \bullet c \bullet d \bullet e$ , proceed as follows:

- the relative complement of  $\theta_2$  with respect to  $\theta_1$  is  $a \bullet b \bullet c$ ;
- so that if  $\theta_2$  is replaced by

$$\theta_2^* = \bar{a} \bullet d \bullet e \bullet f + a \bullet \bar{b} \bullet d \bullet e \bullet f + a \bullet b \bullet \bar{c} \bullet d \bullet e \bullet f$$

then  $\theta_1$  and  $\theta_2^*$  will be disjoint with respect to one another.

### B.6.3 Disjointing procedure

The basic disjointing procedure is as follows:

- a) express system success (denoted by  $s_1$ ) in “sum-of-product” Boolean terms<sup>3</sup> (i.e. tie sets) and label the terms from left to right, “ $\theta_{11}, \theta_{12}, \theta_{13}, \dots$ ”;
- b) select  $\theta_{11}$  as a “pivotal” term and compare  $\theta_{12}$  with  $\theta_{11}$ ;
- c) if necessary (i.e. if the two terms are not disjoint), make  $\theta_{12}$  disjoint with respect to  $\theta_{11}$  as described in B.6.2;
- d) if necessary, make  $\theta_{13}$  disjoint with respect to  $\theta_{11}$ ;
- e) continue the process for the remaining terms in  $s_1$ ;
- f) examine the somewhat expanded (on account of additional terms added) expression reached at this stage, and simplify (where possible) using the rules of Boolean algebra (make use of rules such as  $x + x = x$ ,  $x + x \bullet y = x$ ,  $x \bullet y + \bar{x} \bullet y = y$ ). Call the resulting expression  $s_2$  and label the terms from left to right, “ $\theta_{21}, \theta_{22}, \theta_{23}, \dots$ ”;
- g) select the second term ( $\theta_{22}$ ) of  $s_2$  as a “pivotal” term and compare  $\theta_{23}$  with  $\theta_{22}$ , and proceed as indicated in c) to f) but using the terms of  $s_2$ . Call the resulting expression  $s_3$ ;
- h) continue as above until all the terms have been used as “pivotal” terms by which time the final expression obtained will be the fully disjointed version of the original expression  $s_1$ .

Finally a set of disjoint terms ( $\Pi_i^d$ ) related to the success of the system as described in B.6.1 is obtained. Therefore, the probability of success  $P_s$  or the availability  $A_s(t)$  of the system can be calculated by applying Formula (B.25).

The same procedure may be used to obtain the disjoint terms ( $C_i^d$ ) related to the failure of the system as described in B.6.1. Therefore, the probability of failure  $P_s^-$  or the unavailability  $U_s(t)$  of the system can be calculated by applying Formula (B.26).

The procedure described is very basic and can be improved as this is done to process the example given in B.6.4.

### B.6.4 Example of application of disjointing procedure

It is supposed that a network or system consists of five elements A, B, C, D and E and that  $a, b, c, d$  and  $e$  denote the corresponding Boolean “success” variables. It is also supposed that

<sup>3</sup> For particularly simple Boolean expressions for system success, single as well as products of two or more terms may be used.

system success in Boolean terms ( $s$ ) is defined by the following expression, which comprises four sum-of-product terms (i.e. tie sets):

$$s = a \bullet b + e \bullet b + e \bullet d + c \bullet d$$

To make the above expression disjoint, the basic procedure described in B.6.3 can be improved and applied as follows:

**Step 0** – Classification of the paths by increasing lengths and in alphabetic order

$$s = a \bullet b + b \bullet e + c \bullet d + d \bullet e$$

**Step 1** – The disjunctive procedure starts with the last product ( $d \bullet e$ ) to make it disjoint from all its predecessors:

- **1.1:** This procedure applies to its immediate predecessor ( $c \bullet d$ ) by:
  - identifying the event(s) belonging to  $c \bullet d$  but not to  $d \bullet e$ . This gives  $c$ ;
  - changing  $d \bullet e$  by  $d \bullet e \bullet \bar{c}$  in the original formula.
- **1.2:** Reiterate step 1.1 with the next term on the left ( $b \bullet e$ ) by:
  - identifying the event(s) belonging to  $b \bullet e$  but not to  $d \bullet e$ . This gives  $b$ ;
  - changing the expression of  $d \bullet e$  modified in step 1.1, (i.e.,  $d \bullet e \bullet \bar{c}$ ), by  $d \bullet e \bullet \bar{c} \bullet \bar{b}$  in the original formula.
- **1.3:** It is not necessary to reiterate step 1.2 with the next term on the left ( $a \bullet b$ ), because the last product  $d \bullet e$  modified as  $d \bullet e \bullet \bar{c} \bullet \bar{b}$  is already made disjoint from  $a \bullet b$ . The disjunctive procedure applied to  $d \bullet e$  is now achieved.

The original formula can be rewritten as follows:  $s = a \bullet b + b \bullet e + c \bullet d + d \bullet e \bullet \bar{c} \bullet \bar{b}$ .

**Step 2** – Reiterate the above procedure (steps 1.1 to 1.3) to make  $c \bullet d$  disjoint from its predecessors.

- **2.1:** As previously the procedure is first applied to its immediate predecessor  $b \bullet e$  by:
    - identifying the event(s) belonging to  $b \bullet e$  but not to  $c \bullet d$ . This gives  $b$  and  $e$ ;
    - changing the expression of  $c \bullet d$  by  $c \bullet d \bullet \bar{b} \bullet \bar{e}$  in the original formula, by keeping in mind (De Morgan law) that  $c \bullet d \bullet \bar{b} \bullet \bar{e} = c \bullet d \bullet (\bar{b} + \bar{e}) = c \bullet d \bullet (\bar{b} + b \bullet \bar{e})$ . It becomes:
- $$s = a \bullet b + b \bullet e + c \bullet d \bullet \bar{b} + c \bullet d \bullet b \bullet \bar{e} + d \bullet e \bullet \bar{c} \bullet \bar{b}.$$
- **2.2:** Because the first term of the decomposition of  $c \bullet d$ , ( i.e.,  $c \bullet d \bullet \bar{b}$  is already disjoint from all its predecessors  $a \bullet b$  and  $b \bullet e$ , and the second term  $c \bullet d \bullet b \bullet \bar{e}$  is already disjoint from its predecessor  $b \bullet e$ , it remains to make  $c \bullet d$  disjoint from its second predecessor  $a \bullet b$  by:
    - identifying the event(s) belonging to  $a \bullet b$  but not to  $c \bullet d \bullet b \bullet \bar{e}$ . This gives  $a$ ;
    - changing the expression of  $c \bullet d \bullet b \bullet \bar{e}$  by  $c \bullet d \bullet b \bullet \bar{e} \bullet \bar{a}$  in the original formula that becomes:

$$s = a \bullet b + b \bullet e + c \bullet d \bullet \bar{b} + c \bullet d \bullet b \bullet \bar{e} \bullet \bar{a} + d \bullet e \bullet \bar{c} \bullet \bar{b}.$$

**Step 3** – Reiterate the disjunctive procedure to make  $b \bullet e$  disjoint from its unique predecessor  $a \bullet b$  by:

- identifying the event(s) belonging to  $a \bullet b$  but not to  $b \bullet e$ . This gives  $a$ ;
- changing the expression of  $b \bullet e$  by  $b \bullet e \bullet \bar{a}$  in the original formula.

**Step 4** – Because the first product (here  $a \bullet b$ ) remains always unchanged, the procedure is achieved and gives the following final sum of disjoint products:

$$s = a \bullet b + b \bullet e \bullet \bar{a} + c \bullet d \bullet \bar{b} + c \bullet d \bullet b \bullet \bar{e} \bullet \bar{a} + d \bullet e \bullet \bar{c} \bullet \bar{b}$$

Finally 5 disjoint terms are obtained

- $\Pi_1^d = a \bullet b$ ,
- $\Pi_2^d = b \bullet e \bullet \bar{a}$ ,
- $\Pi_3^d = c \bullet d \bullet \bar{b}$ ,
- $\Pi_4^d = c \bullet d \bullet b \bullet \bar{e} \bullet \bar{a}$ ,
- $\Pi_5^d = d \bullet e \bullet \bar{c} \bullet \bar{b}$ ,

and  $s$  can be written  $s = \bigcup_i \Pi_i^d$  as described in B.6.1.

Therefore, the probability of success  $P_s$  or the availability  $A_s(t)$  of the system can be calculated by applying Formula (B.25):  $P_s = P(\bigcup_{i=1}^n \Pi_i^d) = \sum_i P_{\Pi_i^d}$ .

Finally the system availability is found as:

$$A_S(t) = A_A(t) \cdot A_B(t) + A_B(t) \cdot A_E(t) \cdot [1 - A_A(t)] + A_C(t) \cdot A_D(t) \cdot [1 - A_B(t)] + A_C(t) \cdot A_D(t) \cdot A_B(t) \cdot [1 - A_E(t)] \cdot [1 - A_A(t)] + A_D(t) \cdot A_E(t) \cdot [1 - A_C(t)] \cdot [1 - A_B(t)]$$

The number of disjoint terms depends on the order in which the success paths are used to apply the disjunction algorithms. All results are equivalent but are obtained more or less quickly. There is no theoretical optimum and the choice can be based on heuristics which have proven to work well. The use of the alphabetical order is an example of such a heuristic.

Of course the same procedure can be used with the minimal cut sets to find disjoint sets ( $C_i^d$ ) allowing to calculate the probability of failure  $P_s$  or the unavailability  $U_s(t)$  of the system by

applying Formula (B.26):  $P_s = P(\bigcup_{i=1}^n C_i^d) = \sum_i P_{C_i^d}$ .

### B.6.5 Comments

The most important attribute of the procedures described in B.6.4 is that the sequence of steps needed to carry out the disjointing is relatively straightforward to program for running on a computer. The improved procedure described in B.6.4 is often used on modern PCs where quite complicated sum-of-product Boolean expressions can be disjointed almost instantaneously. It is intended that the details given in this standard will be sufficient to enable a suitable program to be written.

Another important attribute is the fact that the procedure, being primarily aimed at disjointing Boolean expressions, can be applied with equal efficacy to Boolean expressions arising from fault tree analyses.

## B.7 Binary decision diagrams

### B.7.1 Establishing a BDD

At the present time the state of the art in probabilistic calculations on Boolean functions is the use of the Shannon decomposition of the Boolean functions in order to build binary decision diagrams (BDD) encoding all the disjoint combinations leading to the realization of the function modelled by this function.

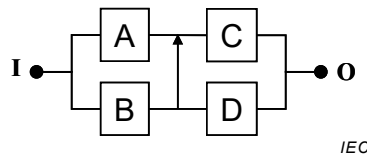


Figure B.6 – Reminder of the RBD in Figure 35

The Boolean function modelled by the RBD in Figure B.6 depends on 4 Boolean variables  $a$ ,  $b$ ,  $c$  and  $d$ .

The Shannon decomposition is similar to the truth table of the Boolean function modelled by the RBD.

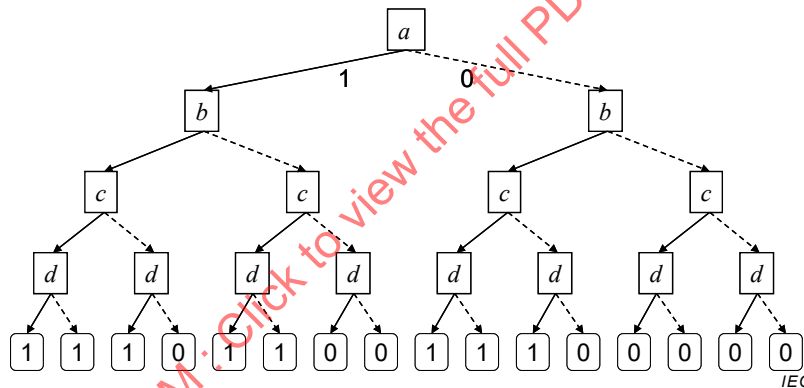
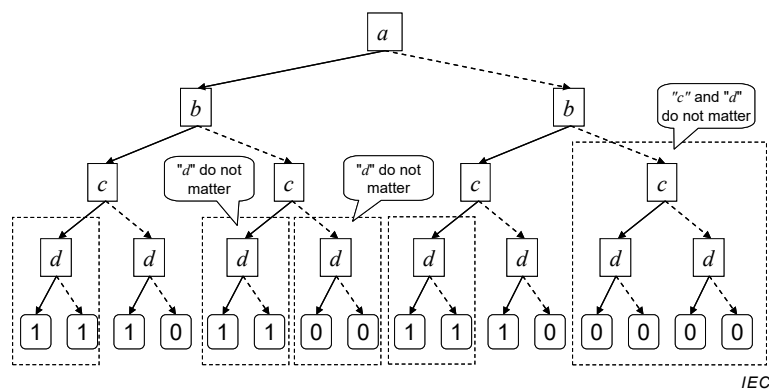


Figure B.7 – Shannon decomposition of the Boolean function represented by Figure B.6

This decomposition has been represented in a graphical form, illustrated in Figure B.7. The process to do that is the following one:

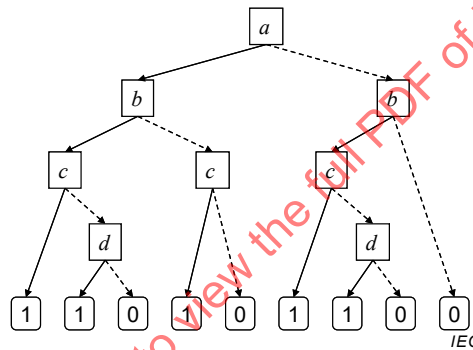
- 1) choose one of the variables (e.g.  $a$ ) and place it at the top of the graph;
- 2) from this variable, draw two arrows to represent its two possible states: e.g. 1 on the left and 0 on the right (solid and dotted lines have been used to make the figure clearer);
- 3) choose another variable (e.g.  $b$ ) and connect it to the previous arrows. This variable will appear twice;
- 4) for each occurrence of this variable draw two arrows to represent its two possible states;
- 5) choose another variable (e.g.  $c$ ) and connect it to the previous arrows. This variable will appear four times;
- 6) etc. continue the process until all variables have been processed.

Then, for  $n$  variables,  $2^n$  paths are obtained. Each of them leads either to the success of the function ( $s = 1$ ) or its failure  $\bar{s} = 0$ . This can be achieved by analysing the RBD corresponding to this Shannon decomposition.



**Figure B.8 – Identification of the parts which do not matter**

The next step is the simplification of this graph by identifying the parts which do not matter. They have been boxed in dotted line in Figure B.8. For example on the left hand side the state of the system does not depend on the state of the variable  $d$  and on the right hand side it does not depend on the states of the variables  $c$  and  $d$ .



**Figure B.9 – Simplification of the Shannon decomposition**

This allows to obtain the simplified the graph shown in Figure B.9. It is not identical to the graph previously obtained in Figure 38 for the same RBD. This is due to a different choice for the order of the variables used for the decomposition. This shows that the decomposition is not unique and leads to a more or less simple graph according to the order which has been chosen.

On this graph 9 paths can be identified: 5 paths lead to the success of  $S$  and 4 to its failure. Reading those paths from the BDD allows to obtain the relationship between  $s$  or  $\bar{s}$  and the states of the variables  $a$ ,  $b$ ,  $c$  and  $d$ :

$$s = a \bullet b \bullet c + a \bullet b \bullet \bar{c} \bullet d + a \bullet \bar{b} \bullet c + a \bullet \bar{b} \bullet \bar{c} \bullet d + a \bullet b \bullet c \bullet \bar{d}$$

$$\bar{s} = a \bullet b \bullet \bar{c} \bullet \bar{d} + a \bullet \bar{b} \bullet \bar{c} + a \bullet b \bullet \bar{c} \bullet d + a \bullet b$$

The next step is to build the BDD related to this RBD. As shown in Figure B.10 this is done just by gathering the inputs with the same values.

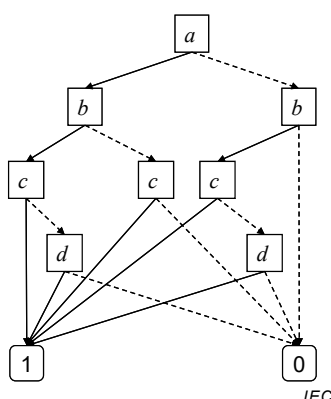


Figure B.10 – Binary decision diagram related to the RBD in Figure B.6

### B.7.2 Minimal success paths and cut sets with BDDs

The same block can appear in different places but in the basic RBD, it has always the same state in its various locations. This implies that the RBD is "coherent" and that the related Boolean function is "monotonic". That means that if the system is failed it cannot be repaired by a further block failure or if the system is in the up state it cannot be failed by a further block repair. In this case the Boolean function can be represented by the union of the minimal tie sets (success paths) and its complementary function can be represented by the union of the minimal cut sets (failure paths).

When a Boolean function is non-monotonic then the concepts of minimal tie or cut sets are not relevant and must be replaced by the concept of "prime implicants". The difference is that a minimal tie set is made only of a combination of blocks in up states (and a minimal cut set only of a combination of blocks in down states), whereas a prime implicant may be made of a combination of blocks in up and down states. The prime implicants cannot be reduced to minimal tie or cut sets and should not be mixed up with the disjoint terms analysed in B.7.1 which are equivalent to a union of minimal tie or cut sets.

Therefore, if the Boolean function is monotonic and  $\Pi_i$  a success path containing failed blocks, removing the failed blocks provide also a success path. For example,  $\bar{a} \bullet b \bullet \bar{c} \bullet d$  being a success path,  $b \bullet d$  is also a success path.

In the same way, if  $C_i$  is a cut set containing blocks in the up state, then removing those blocks provides also a cut set: for example  $a \bullet b \bullet \bar{c} \bullet \bar{d}$  being a cut set,  $\bar{c} \bullet \bar{d}$  is also a cut set.

Therefore, disjoint success paths identified in B.7.1 can be used to identify the success paths of the related to the Boolean function. This is illustrated in Figure B.11.

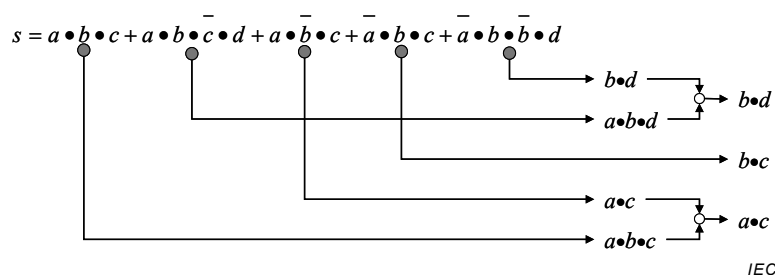
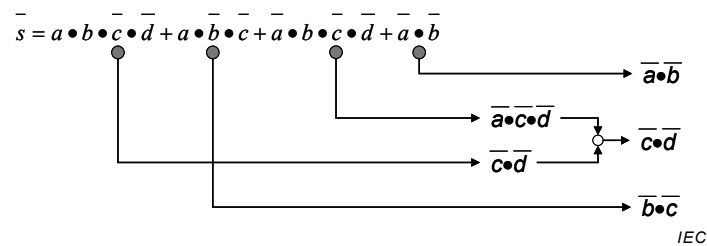


Figure B.11 – Obtaining success paths (tie sets) from an RBD

Among the found tie sets, some are non-minimal sets which are included (from the Boolean algebra point of view) in the minimal tie sets. Finally three minimal success paths are found and they are similar to those previously identified.



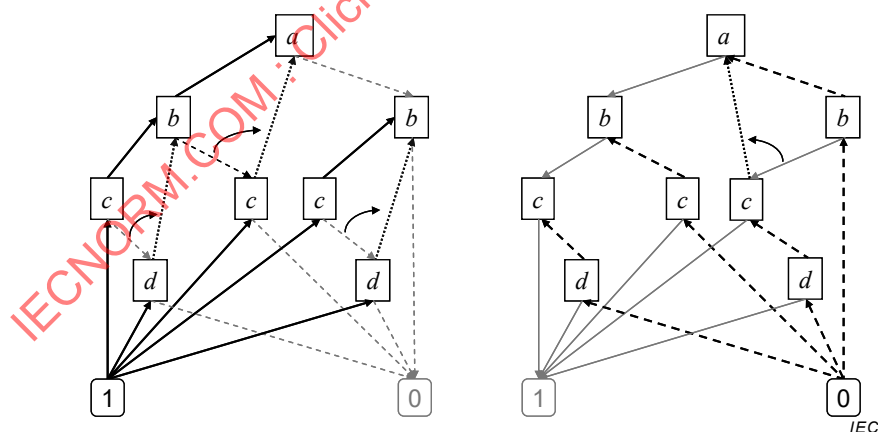
**Figure B.12 – Obtaining failure paths (cut sets) from an RBD**

Figure B.12 shows how the minimal cut sets can be found from the Boolean equation of the system failure. The principle is exactly the same as for the success paths. Three minimal cut sets are found and they are identical to those previously found.

The BDDs provide also an efficient tool to identify the minimal tie or cut sets.

The principle to find the tie sets (success paths) is illustrated in the left hand side of Figure B.13. This is valid only when the BDD is related to a "coherent" RBD as explained in B.7.2 .

The process consists in starting from the success state of the system and exploring the graph from bottom to up in the reverse order (of the variables) used to build the BDD. When exploring a branch, if a variable is found in the failed state, then it is by-passed and a new link with the variable just above is introduced. And so on. If the graph on the left hand side is considered, the next tie sets:  $(c \bullet b \bullet a)$ ,  $(d \bullet b \bullet a)$ ,  $(c \bullet a)$ ,  $(c \bullet a)$ ,  $(c \bullet b)$ ,  $(d \bullet b)$  are found. Some of these combinations are not minimal and one combination appears twice.



**Figure B.13 – Finding cut and tie sets from BDDs**

Similarly, the principle to find the cut sets (failure paths) is illustrated in the right hand side of Figure B.13. The process consists in starting from the failed state of the system and exploring the graph from bottom to up in the reverse order (of the variables) used to build the BDD. When exploring a branch, if a variable is found in the up state, then it is by-passed and a new link with the variable just above is introduced. And so on. If the graph on the right hand side is considered, the next cut sets:  $(d \bullet c)$ ,  $(c \bullet b)$ ,  $(d \bullet c \bullet a)$ ,  $(b \bullet a)$  are found. One of these combinations,  $(d \bullet c \bullet a)$ , is not minimal.

Therefore, the graphs can be simplified in order to encode only minimal combinations. This is not really easy by hand but powerful algorithms have been developed to do that on large BDDs in order to handle RBDs with millions of minimal tie or cut sets.

When the Boolean functions are non-monotonic, the minimal tie or cut sets are meaningless and must be replaced by the prime implicants. This is more complicated to handle but powerful algorithms are also available to deal with this problem.

### B.7.3 Probabilistic calculations with BDDs

#### B.7.3.1 General

The BDD structure presented in Figure B.10 models in a very compact way all the paths leading to the system failure and to the system success. Several equivalent BDDs may be developed for the same RBD. As for the simplified Shannon decomposition, the size of those BDDs depends on the choice of the order of the variables.

All the paths encoded within a BDD being disjoint, the BDD can be used directly for probabilistic calculations just by replacing the state variables by the corresponding probabilities of success or probabilities of failure (see Figure B.14).

Using the paths leading to the system success gives directly:

$$P_s = P_a \cdot P_b \cdot P_c + P_a \cdot P_b \cdot (1 - P_c) \cdot P_d + P_a \cdot (1 - P_b) \cdot P_c + (1 - P_a) \cdot P_b \cdot P_c + (1 - P_a) \cdot P_b \cdot (1 - P_c) \cdot P_d$$

Using the paths leading to the system failure gives directly:

$$P_f = P_a \cdot P_b \cdot (1 - P_c) \cdot (1 - P_d) + P_a \cdot (1 - P_b) \cdot (1 - P_c) + (1 - P_a) \cdot P_b \cdot (1 - P_c) \cdot (1 - P_d) + (1 - P_a) \cdot (1 - P_b)$$

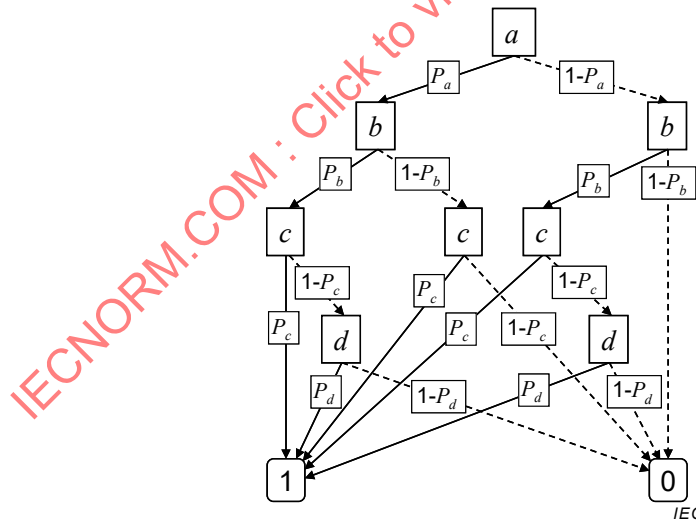
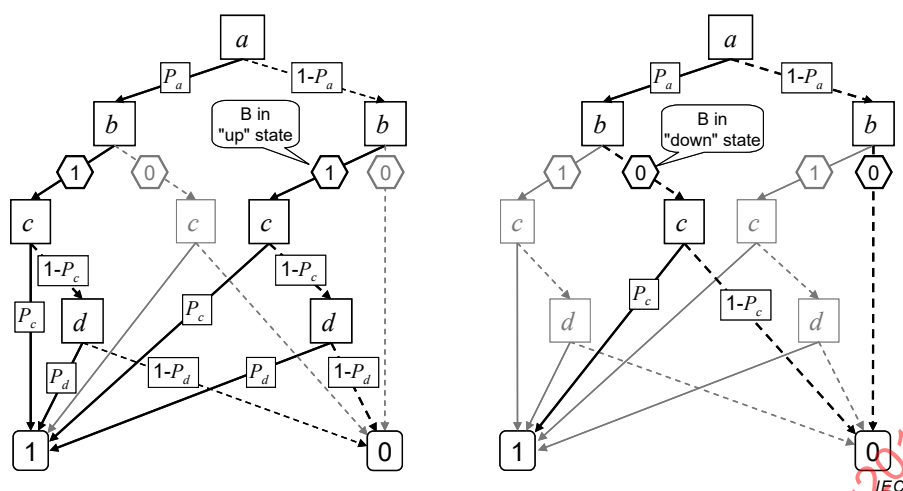


Figure B.14 – Probabilistic calculations from a BDD

#### B.7.3.2 Conditional probability calculations with RBD

BDDs can be used to calculate conditional probabilities. Figure B.15 shows how to calculate  $P_{s|b}$  on the left hand side and  $P_{s|b}^-$  on the right hand side. This is the basis of the calculations related to conditional failure intensity (Vesely failure rate), unconditional failure intensity (failure frequency) and various importance factors (see Annex D).



**Figure B.15 – Calculation of conditional probabilities using BDDs**

#### B.7.4 Key remarks about the use of BDDs

This BDD structure has proven to be very powerful to encode in a very effective and compact way all the disjoint paths leading to the system failure and the system success. This allows to perform probabilistic calculations without approximations.

The BDD can also be used to encode the minimal tie sets (success paths) or minimal cut sets (failure paths) when the RBDs are coherent or to encode the prime implicants when the RBDs are not coherent.

With  $n$  variables, the Shannon decomposition (as well as the truth table) leads to  $2^n$  paths. This is not tractable when  $n$  is large. This is why the modern BDD algorithms have been developed to build the BDD without having to build the whole Shannon decomposition. This allows to handle hundreds of variables (i.e. RBD with hundreds of blocks) and billions of success paths or minimal cut sets. The size is dependent on the choice of the order of the variables used to develop the BDDs and heuristics are available to select, to some extent, the better ones.

Using BDDs is a very effective way to store the RBD within a computer memory and to make probabilistic calculations on Boolean functions (e.g. RBDs and fault trees).

## Annex C (informative)

### Time dependent probabilities and RBD driven Markov processes

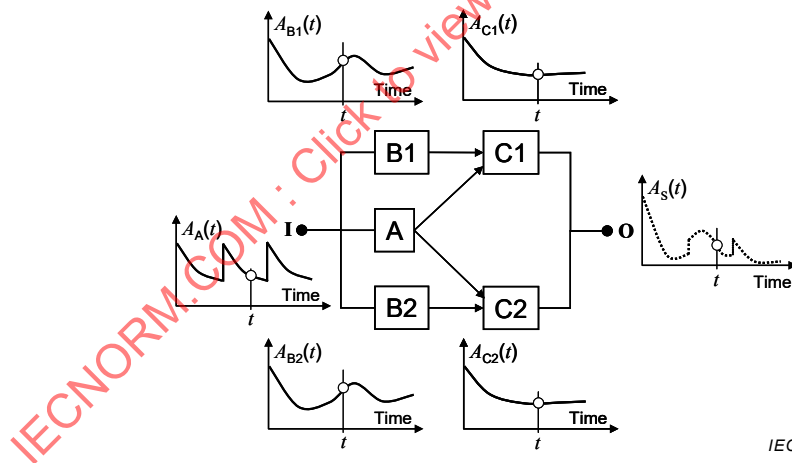
#### C.1 General

The underlying mathematics behind RBDs is Boolean algebra which is static in nature. Therefore, the probabilistic calculations with RBDs are primarily related to constant values. Nevertheless, when the blocks behave independently from each other over time, the use of the formulae developed for constant probability values can be used straightforwardly for the calculation of the system availability  $A_S(t) = P_S(t)$  from availabilities  $A_{X_i}(t) = P_{X_i}(t)$  of the blocks  $X_i$ .

The calculations can also be extended to average availability  $A_S^{avg}(t_1, t_2)$ , steady state availability  $A_S^{st}$ , asymptotic availability  $A_S^{as}$ , failure frequency  $w_S(t)$  and, only in particular cases, reliability  $R_S(t)$ .

The user of RBDs should understand that RBDs are rather more focused on availability calculations than on reliability calculations.

#### C.2 Principle for calculation of time dependent availabilities



**Figure C.1 – Principle of time dependent availability calculations**

Figure C.1 illustrates the principle of the availability calculations by using RBDs. On this figure the availabilities of each block have been drawn. Those availabilities may have any form. The only constraint is that, according to the basic independency requirement in 5.2 d), they behave independently from each other.

Therefore, the principle is to pick up a set of block availabilities for a given time  $t$  (small circles on the figure) and use it to calculate the system availability at time  $t$  through the logic modelled by the RBD. This procedure can be used for any time in order to provide the whole evolution of the system availability  $A_S(t)$  (in dotted line on the figure).

Except in very simple cases, this procedure is not easy to handle by hand but this can be easily undertaken by the fast algorithms implemented nowadays in the RBD/FT software packages (e.g., the algorithms based on binary decision diagrams).

### C.3 Non-repaired blocks

#### C.3.1 General

The principle explained in C.2 is very easy to apply with non-repaired blocks.

#### C.3.2 Simple non-repaired blocks

For example, if the RBD presented in Figure C.1 is made of simple non-repaired blocks  $X_i$  with constant failure rates, the input curves will simply be of the classical form:

$$A_{X_i}(t) = R_{X_i}(t) = \exp(-\lambda_{X_i} \cdot t).$$

#### C.3.3 Composite block: example on a non-repaired standby system

This can also be applied to the composite block like that represented by the diagrams in Figure 11 and which models a frequently used form of redundancy known as standby redundancy (see 7.5.3 and first paragraph of Annex A).

In its most elementary form the blocks A and B are not repaired and do not behave independently from each other: B starts when A fails. Then the composite block C has to be considered as a whole (see Figure 12) and its availability  $A_C(t)$  has to be established as shown in C.2. When A and B are not repaired, C is also not repaired and therefore  $A_C(t) = R_C(t)$ .

The availability  $A_C(t)$ , of such a system can be obtained by considering what possible events may occur during a mission time  $t$ . The following are possibilities:

- block A is in up state throughout time  $t$ ; or
- block A fails at time  $\tau < t$ , item B starts at  $\tau$  (i.e., B has not failed in dormant state and the switch has not failed before  $\tau$ ) and does not fail over the interval  $[\tau, t]$ .

If it is noted:

- $\lambda_A$  is the failure rate of block A and  $f_A(\tau)$  is its failure density function;
- $\lambda_{Bd}$  is the failure rate of block B when in the passive (dormant) state, either cold or under low power;
- $\lambda_B$  is the failure rate of block B when in active state, after it has started due to the failure of A;
- $\lambda_{SW}$  is the failure rate of the switch S and  $R_{SW}(\tau)$  is its reliability at time  $\tau$ .

This leads to the following mathematical expression:

$$A_C(t) \equiv R_C(t) = R_A(t) + \int_0^t f_A(\tau) \cdot R_{Bd}(\tau) \cdot R_{SW}(\tau) \cdot R_B(t - \tau) \cdot d\tau$$

If it is assumed that all items have a constant active or dormant failure rate, then this mathematical expression becomes:

$$A_C(t) \equiv R_C(t) = e^{-\lambda_A t} + \int_0^t \lambda_A \cdot e^{-\lambda_A \tau} \cdot e^{-\lambda_{Bd} \tau} e^{-\lambda_{SW} \tau} e^{-\lambda_B \cdot (t-\tau)} \cdot d\tau$$

NOTE If the reliability of the switch is not a function of time but a function of some other variable (number of operations, demands, etc.), it would be preferable not to use functional notation at all, but to use instead  $P_{sw}$  to denote the switch reliability or  $\gamma_B$  to denote the probability of B to fail to start on demand.

On evaluating the integral of the above mathematical expression:

$$A_C(t) \equiv R_C(t) = e^{-\lambda_A t} + \frac{\lambda_A}{\lambda_A + \lambda_{SW} + \lambda_{Bd} - \lambda_B} \cdot \left[ e^{-\lambda_B t} - e^{-(\lambda_A + \lambda_{SW} + \lambda_{Bd})t} \right]$$

With an assumption of perfect switching,  $\lambda_{SW} = 0$ , the equation becomes:

$$A_C(t) \equiv R_C(t) = e^{-\lambda_A t} + \frac{\lambda_A}{\lambda_A + \lambda_{Bd} - \lambda_B} \cdot \left[ e^{-\lambda_B t} - e^{-(\lambda_A + \lambda_{Bd})t} \right]$$

If the dormant failure rate of item B is also assumed equal to zero, then the availability of a standby redundant system is:

$$A_C(t) \equiv R_C(t) = e^{-\lambda_A t} + \frac{\lambda_A}{\lambda_A - \lambda_B} \cdot \left[ e^{-\lambda_B t} - e^{-\lambda_A t} \right] \quad (C.1)$$

If, in addition, both failure rates are equal ( $\lambda_A = \lambda$  and  $\lambda_B = \lambda$ ), then the formula for system availability can be shown to be given by:

$$A_C(t) \equiv R_C(t) = e^{-\lambda t} \cdot (1 + \lambda \cdot t) \quad (C.2)$$

If, under such ideal conditions, there are  $n$  (instead of one) items on standby, this latter formula becomes:

$$A_C(t) \equiv R_C(t) = e^{-\lambda t} \left( 1 + \lambda \cdot t + \frac{(\lambda \cdot t)^2}{2!} + \frac{(\lambda \cdot t)^3}{3!} + \dots + \frac{(\lambda \cdot t)^n}{n!} \right) \quad (C.3)$$

It should be noted that a practical RBD should include blocks to represent the availability of the switch plus sensing mechanism, which is often the "weak link" in standby systems.

Formulae (C.1), (C.2) and (C.3) can be used for the composite block C in the same way the ordinary formulae are used for ordinary blocks. Nevertheless, establishing those formulae is difficult and other procedures, such as Markov analysis, should be used to analyse standby systems.

#### C.4 RBD driven Markov processes

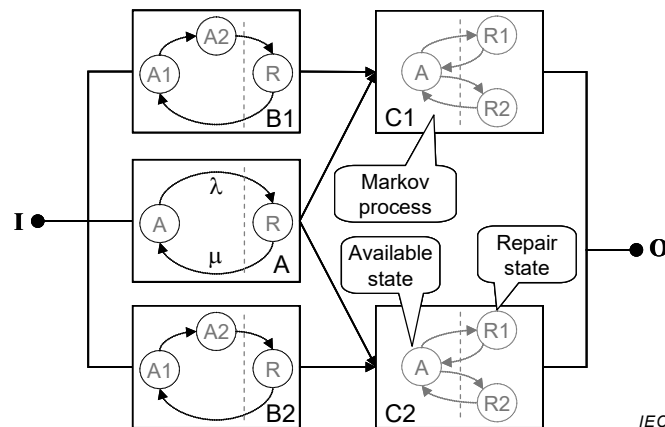


Figure C.2 – Principle of RBD driven Markov processes

As said in the previous clauses, the block availabilities may have any form and, as shown in Figure C.2, they can be calculated by using Markov processes. Such a model which is a mix between RBD and Markov graphs is an "RBD driven Markov process": the RBD provides the backbone of the model and the small Markov graphs the availabilities of the blocks. It is a way to build Markov processes for large systems and help to avoid the combinatorial explosion of the number of states.

This approach covers most of the problems encountered when dealing with repaired blocks as in most of the cases only constant failure and repair rates are considered.

In Figure C.2 the block availabilities are modelled by single Markov graphs where the repairs start as soon as the failures occur. Then, after a transient period, asymptotic values are reached and this leads to the typical behaviour of the availability illustrated in Figure C.3.

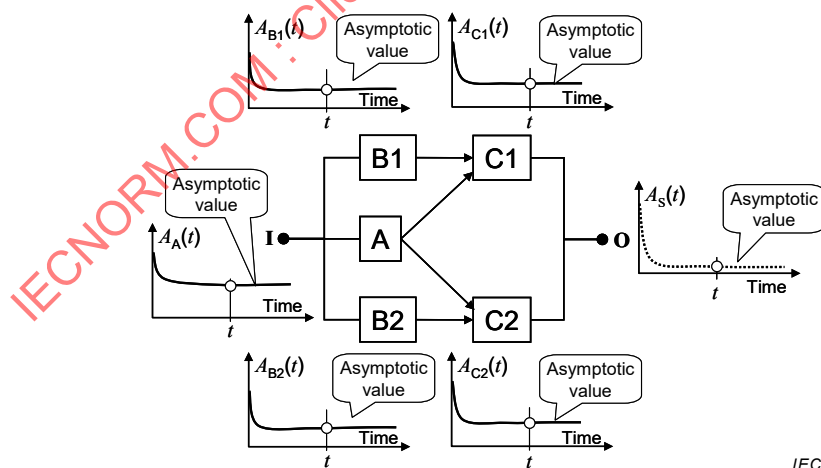
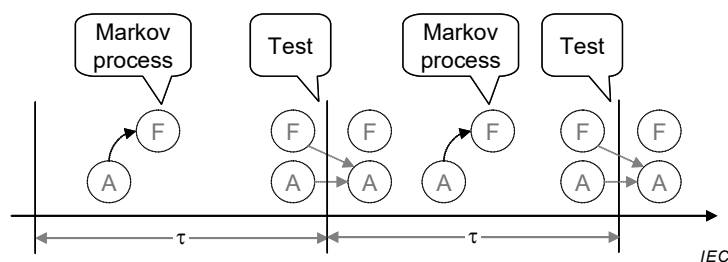


Figure C.3 – Typical availability of RBD with quickly repaired failures

For example, the availability of the block A which is modelled by the parameters  $(\lambda, \mu)$ , reaches an asymptotic value  $A_A^{as} = \frac{\mu}{\lambda + \mu}$  after a duration equal to 2 or 3 MTTRs (where  $MTTR = 1/\mu$ ).

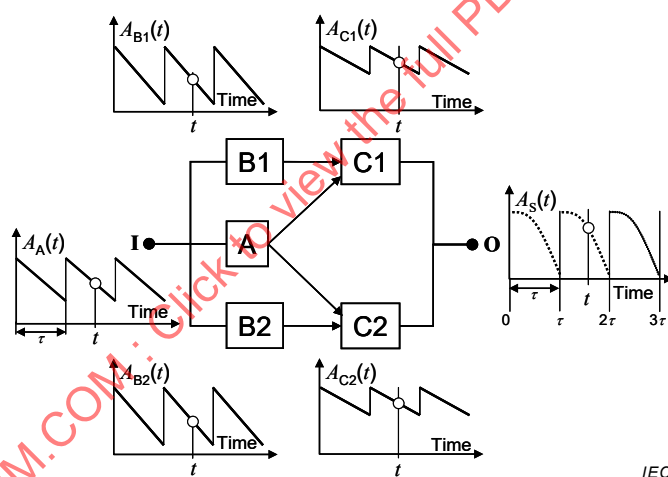
The RBD driven Markov process can also be implemented when the blocks have hidden failures which are not immediately detected when they occur. In this case, periodic tests have

to be performed to detect the failures and repair them. This cannot be modelled by single Markov graphs as in Figure C.2 but "multi-phase" Markov processes have to be used instead.



**Figure C.4 – Example of simple multi-phase Markov process**

Figure C.4 illustrates a simple multi-phase Markov model related to a periodically tested block: each test interval is a phase and the probabilities of states at the beginning of a phase are calculated from the probabilities at the end of the previous one. Then, during the test intervals, the block availability is modelled by a simple Markov graph where failure F is hidden and when a test occurs the failure is detected and repaired instantaneously. The availability of such periodically tested blocks is equal to 1 just after a test and then decreases until the next test is performed where it comes back to 1 again. This leads to the typical "saw tooth" curves shown in Figure C.5 where all blocks are tested with the same test interval.



**Figure C.5 – Typical availability of RBD with periodically tested failures**

Safety systems implementing periodically tested components are easily modelled in this way. This is in particular the typical case of the safety instrumented systems described in the functional safety standards IEC 61508, IEC 61511 and ISO/TR 12489.

This combination of individual Markov processes through logical combinations has proven very useful for both RBD and FT approaches.

## C.5 Average and asymptotic (steady state) availability calculations

It is easy to calculate average availability  $A_S^{avg}(t_1, t_2)$  by a simple numerical averaging of the curve  $A_S(t)$ , as shown as a dotted line in Figure C.1 over a period of time  $[t_1, t_2]$ .

This calculation is valid in any case but when an asymptotic value  $A_S^{as} = \lim_{t \rightarrow \infty} A_S(t)$  is reached like in Figure C.5, this asymptotic value also gives the average availability as soon as  $t$  is long enough for allowing all the block availabilities to have reached the asymptotic values. Therefore, when the system availability has an asymptotic value, this is also the long term average availability:  $A_S^{avg} = A_S^{as}$ .

When the blocks are very quickly repaired ( $MTTR_i \ll MTTF_i$ ), the asymptotic values are reached very quickly (after a duration equal to 2 or 3 times the largest  $MTTR_i$ ) and this case is almost the same as the one with constant probabilistic values.

When as in Figure C.5 there is no asymptotic value, the average availability has to be calculated from  $A_S(t)$ . Nevertheless, in case of recurrent phases, the availability  $A_S(t)$  converges toward a recurrent profile after some phases. For example, for a simple block and when the repairs are not instantaneous, the recurrent profile is reached after 2 or 3 test intervals and the average availability during an interval converges to a limit value:

$$A_S^{lim}(\tau) = \lim_{n \rightarrow \infty} A_S^{avg}[n\tau, (n+1)\tau].$$

Models like Figure C.5 can be used to model safety systems and calculate the  $PFD_{avg}$  (average of the probability of failure on demand) required by the functional safety standards IEC 61508 and IEC 61511 for safety instrumented systems operating in low demand mode:

$$PFD_{avg} = U_S^{avg}(0, T) = 1 - A_S^{avg}(0, T).$$

When a recurrent profile exists, and this is often the case, then  $PFD_{avg} = U_S^{lim}(\rho) = 1 - A_S^{lim}(\rho)$  where  $\rho$  is the length of the recurring interval (see 10.3.2).

## C.6 Frequency calculations

In addition of the classical availability  $A_S(T)$  and reliability  $R_S(T)$ , the average failure frequency  $w_S^{avg}(0, T)$  is another relevant probabilistic indicator useful to characterize a system.

This parameter which does not exist for constant failure probabilities and is not useful for non-repaired systems is very useful when dealing with repaired systems which may fail (and be repaired) several times over a given period  $[0, T]$ . In this case, if  $n$  is the number of failures over this given time interval, the average failure frequency is given by  $n/T = w_S^{avg}(0, T)$ .

The average failure frequency can be calculated by using RBDs but the mathematics which implies the calculation of the Birnbaum importance factors (see Clause D.3) are not as simple as for availability and reliability calculations. Therefore, it is difficult to perform the calculations by hand but powerful algorithms are available to do that.

The calculation of the average frequency is performed in several steps.

- 1) Calculation of Birnbaum importance factors  $MIF_S(B_i, t)$  related to each block  $B_i$ . This importance factor is also called "marginal importance factor" (see Annex D).  $MIF_S(B_i, t)$  is obtained from the conditional availabilities  $A_{S|B_i}(t)$  and  $A_{S|\bar{B}_i}(t)$  by the following formula (see reference [14]):

$$MIF_S(B_i, t) = \frac{\partial[A_S(t)]}{\partial[A_{B_i}(t)]} = A_{S|B_i}(t) - A_{S|\bar{B}_i}(t) \quad (C.4)$$

- 2) Calculation of the unconditional failure intensities  $w_i(t)$  of each block  $B_i$ . This is obtained by combining the failure rate  $\lambda_i(t)$  and the availability  $A_{B_i}(t)$  of the related block:

$$w_i(t) = \lambda_i(t) \cdot A_{B_i}(t) \quad (C.5)$$

- 3) Calculation of the unconditional failure intensity of the system:

$$w_S(t) = \sum_i MIF_S(B_i, t) \cdot w_i(t) \quad (C.6)$$

- 4) Calculation of the expected number of failures  $W_S(T)$  over  $[0, T]$ . As the unconditional failure intensity  $w_S(t)$  is also the failure frequency (see 3.31) of the system at time  $t$ , the expected number of failures can be obtained by a simple integration:

$$W_S(T) = \int_0^T w_S(t) \cdot dt \quad (C.7)$$

- 5) Calculation of the average failure frequency:

$$w_S^{avg}(T) = \frac{1}{T} \int_0^T w_S(t) \cdot dt = \frac{W_S(T)}{T} \quad (C.8)$$

Except in very simple cases, Formula (C.8) cannot be done by hand and must be done numerically.

## C.7 Reliability calculations

While the average failure frequency  $w_S^{avg}(0, t)$  can be calculated in any case, the system reliability  $R_S(t)$  can be obtained by analytical calculations only in very particular cases:

- a) the RBD comprises only non-repaired blocks and in this case  $R_S(t) = A_S(t)$ ;
- b) the conditional failure intensity  $\Lambda_{vS}(t)$  reaches an asymptotic value  $\Lambda_{vS}^{as}$ .

In the case b) the conditional failure intensity  $\Lambda_{vS}(t)$  can be obtained from the unconditional failure intensity and the system availability by the following formula:

$$\Lambda_{vS}(t) = w_S(t) / A_S(t) \quad (C.9)$$

$\Lambda_{vS}(t)$  is also called Vesely failure rate as it can be used as an approximation of the system failure rate  $\Lambda_S(t)$  to perform reliability calculation from the classical equation:

$$R_S(t) \approx \exp\left(-\int_0^t \Lambda_{vS}(u) \cdot du\right) \quad (C.10)$$

Of course this is particularly useful when the system reaches a steady state because in this case  $A_{vS}(t)$  reaches a constant asymptotic value  $A_{vS}(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} A_{vS}^{as}$ . This is typically the case of RBDs like those presented in Figure C.3 where the availability  $A_S(t)$ , the unconditional failure intensity  $w_S(t)$  and the conditional failure intensity  $A_{vS}(t)$  reach asymptotic values  $A_S^{as}$ ,  $w_S^{as}$ ,  $A_{vS}^{as}$ .

Then in this case the system failure rate  $\lambda_S$  can be approximated by  $\lambda_S \approx A_{vS}^{as} = w_S^{as} / A_S^{as}$  and the system reliability is obtained as:

$$R_S(t) \approx \exp(-A_{vS}^{as} \cdot t) \quad (C.11)$$

The accuracy of the approximation given by Formula (C.11) is very good when the transient period has elapsed. This transient period is very short when the failures of the blocks of the RBD are quickly detected and repaired: i.e. Formula (C.11) can be used after two or three times the largest MTTR of the blocks.

All those calculations are not easy to perform by hand but the fast algorithms now available and based on BDD are able to process large RBDs for reliability calculation purposes.

For cases other than a) and b), other techniques, like Monte Carlo simulation (e.g. by using DRBDs, see 12.2 and Annex E), Markov or Petri net techniques, should be used instead.

## Annex D (informative)

### Importance factors

#### D.1 General

When analysing a system, it is useful to rank the components according to their impact on the probability of success (or of failure) of the system of interest. This can be done by using one or several of the importance factors which have been developed for this purpose (see references [12], [13], [14], [29] and [30]).

The following Clauses D.2 to D.9 describe the main importance factors and explain how to compute them when coherent RBDs are implemented. For the sake of simplicity, this is developed for the constant probability case but when the probabilities are time-dependent (e.g., repaired systems), the formulae are similar for a given value of the time  $t$ .

#### D.2 Vesely-Fussell importance factor

The Vesely-Fussell importance factor,  $FV_S(B_i)$ , is one of the most popular importance factors. It is based on the minimal cut sets of the system. It measures the probability that, when system S fails, the failure of the block  $B_i$  participates in at least one of the minimal cut sets having caused the failure of S. This importance factor takes into account both the probability of failure of  $B_i$  and the order of the minimal cut set that it belongs to. This is a rather accurate importance factor for measuring the impact of a component on the probability of failure of the system.

Let us consider  $C(\bar{b}_i)_j$  a minimal cut set containing  $\bar{b}_i$  (i.e. the failure of component  $B_i$ ). Then the Vesely-Fussell importance factor is given by:

$$FV_S(B_i, t) = \frac{P[\bigcup_j C(\bar{b}_i)_j]}{P_S} \quad (D.1)$$

Formula (D.1) is not very easy to calculate and, when the probability of system failure is low ( $P_S \ll 1$ ), the following approximation is often used instead:

$$FV_S(B_i, t) \approx \frac{\sum_j P[C(\bar{b}_i)_j]}{\sum_{i,j} P[C(b_i)_j]} \quad (D.2)$$

This Formula (D.2) is very easy to use by hand when the number of minimal cut sets is not too high: this is the sum of the probabilities of minimal cut sets containing the failure of  $B_i$  divided by the sum of all the minimal cut sets.

#### D.3 Birnbaum importance factor or marginal importance factor

The marginal importance factor  $MIF_S(B_i)$  is also called Birnbaum importance factor. It provides the basis for estimating the equivalent failure rate (and therefore the reliability) of a repaired system (see 10.3.1.4). It is based on the partial derivative of the probability of

success (or failure) of the system with regards to the probability of success (or failure) of the considered block  $B_i$ . The Birnbaum importance factor is basically given by the following Formula (D.3):

$$MIF_S(B_i) = \frac{\partial P_s}{\partial P_{b_i}} = \frac{\partial P_s^-}{\partial P_{b_i}^-} \quad (D.3)$$

It is symmetrical with regards to success or failure. It may be interpreted as the probability that the system is in a critical state (working or failed) due to the state of  $B_i$  i.e., if S is working the failure of  $B_i$  will fail S and if S is failed then the repair of  $B_i$  will cause the repair of S.

Formula (D.3) is equivalent to Formula (D.4):

$$MIF_S(B_i) = P_{s|b_i} - P_{s|b_i}^- = P_{s^-|b_i}^- - P_{s^-|b_i} \quad (D.4)$$

Therefore, this importance factor can be calculated by using the BDD calculations described in 11.6 for the conditional probabilities  $P_{s|b_i}$  and  $P_{s|b_i}^-$ .

It has to be noted that the Birnbaum importance factor does not depend on the probability of success (or failure) of the component  $B_i$ .

#### D.4 Lambert importance factor or critical importance factor

The critical importance factor  $CIF_S(B_i)$  is also called Lambert importance factor. This is a normalized Birnbaum importance factor. It is given by the following Formula (D.5):

$$CIF_S(B_i) = \frac{P_{b_i}^-}{P_s^-} MIF_S(B_i) = \frac{1 - P_{b_i}}{1 - P_s} MIF_S(B_i) \quad (D.5)$$

This importance factor is easy to calculate when  $MIF_S(B_i)$  has been calculated.

#### D.5 Diagnostic importance factor

The diagnostic importance factor  $DIF_S(B_i)$  is given by the conditional probability that  $B_i$  is failed given that S is failed. Therefore, it allows to determine which components have to be examined in priority when S is failed in order to repair it as soon as possible.

It is given by the following Formula (D.6):

$$DIF_S(B_i) = P_{b_i|s}^- \quad (D.6)$$

The following equivalent Formula (D.7) is easier to calculate:

$$DIF_S(B_i) = P_{b_i}^- \frac{P_{s|b_i}^-}{P_s^-} \quad (D.7)$$

This importance factor is linked to  $RAW_S(B_i)$  (see Clause D.6) by:

$$DIF_S(B_i) = P_{b_i}^- \cdot RAW_S(B_i) = (1 - P_{b_i}) \cdot RAW_S(B_i)$$

NOTE 1 When  $DIF_S(B_i)$  is low, the probability that  $B_i$  is failed when  $S$  is failed is low. When  $DIF_S(B_i)$  is high, the probability that  $B_i$  is failed when  $S$  is failed is also high. Therefore, the most useful is to examine  $B_i$  with intermediate values of  $DIF_S(B_i)$  to diagnose if they are failed or not.

NOTE 2 The repair of a failed component identified by using the DIF does not necessarily repair the system  $S$ .

## D.6 Risk achievement worth

The risk achievement worth  $RAW_S(B_i)$  is the conditional probability that  $S$  is failed given  $B_i$  is failed, normalized by the probability of failure of  $S$ . It allows to measure the increase of the probability of failure when  $B_i$  actually fails.

It is given by the following Formula (D.8):

$$RAW_S(B_i) = \frac{P_{s|b_i}}{P_s} = \frac{1 - P_{s|b_i}}{1 - P_s} \quad (D.8)$$

## D.7 Risk reduction worth

The risk reduction worth  $RRW_S(B_i)$  is the conditional probability that  $S$  is failed given  $B_i$  is not failed, normalized by the probability of failure of  $S$ . It allows to measure the reduction of the probability of failure when  $B_i$  actually works.

It is given by the following Formula (D.9):

$$RRW_S(B_i) = \frac{P_s}{P_{s|b_i}} = \frac{1 - P_{s|b_i}}{1 - P_s} \quad (D.9)$$

## D.8 Differential importance measure

The differential importance measure  $DIM_S(B_i)$  is a local sensitivity measure of  $P_{b_i}$  on  $P_s$  defined as follows:

$$DIM_S(B_i) = \frac{\frac{\partial P_s}{\partial P_{b_i}} dP_{b_i}}{\sum_{k=1}^n \frac{\partial P_s}{\partial P_{b_k}} dP_{b_k}} \quad (D.10)$$

In the Formula (D.10),  $\frac{\partial P_s}{\partial P_{b_i}} dP_{b_i}$  is the change of  $P_s$  induced by a small change ( $dP_{b_i}$ ) in the probability of block  $B_i$ .

The differential importance measure has two important properties:

- this is an additive measure:  $DIM_S(B_i, B_j) = DIM_S(B_i) + DIM_S(B_j)$ ;
- the sum of the differential importance measure of all blocks within an RBD equals unity:  $DIM_S(B_1, B_2, \dots, B_n) = DIM_S(B_1) + DIM_S(B_2) + \dots + DIM_S(B_n) = 1$ .

The differential importance measure  $DIM_S(B_i)$  is linked to other importance factors in special cases:

a) uniform change (criterion H1):  $\Delta P_{b_i} = \Delta P_{b_k} \ll 1$  for  $j, k = 1, 2, \dots, n$

$$DIM_S^{H1}(B_i) = \frac{MIF_S(B_i)}{\sum_{k=1}^n MIF_S(B_k)}$$

b) proportional relative changes (criterion H2):  $\frac{\Delta P_{b_i}}{P_{b_i}} = \frac{\Delta P_{b_k}}{P_{b_k}}, \Delta P_{b_i} = \Delta P_{b_k} \ll 1$  for  $i, k = 1, 2, \dots, n$

$$DIM_S^{H2}(B_i) = \frac{CIF_S(B_i)}{\sum_{k=1}^n CIF_S(B_k)}$$

The calculations of marginal importance factor are explained in Clause D.3 and that of critical importance factor in Clause D.4.

## D.9 Remarks about importance factors

There are many importance factors which have been developed for specific uses. It can be demonstrated that:

$$RAW_S(B_i) \geq DIF_S(B_i) \geq FV_S(B_i) \geq CIF_S(B_i)$$

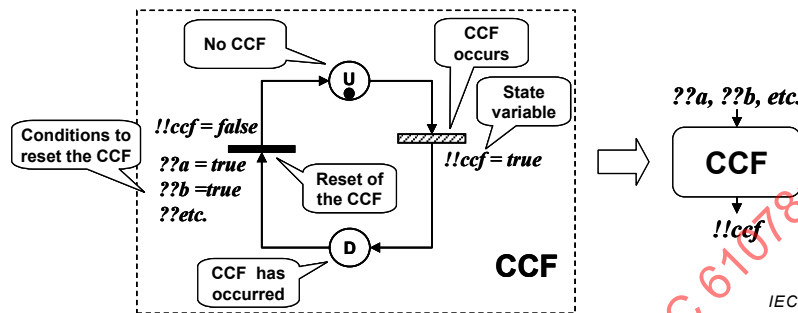
Among them only the Vesely-Fussell importance factor can be handled by hand (when  $1 - P_s \ll 1$  and the number of minimal cut sets is not too high). The others imply the use of conditional probabilities difficult to handle by hand but easy to calculate by for example, using the BDD method described in 11.6.

Other importance factors have been developed to deal with non-coherent RBDs (see 12.2). They shall be used in this case as the importance factors described above are not valid and may lead to inconsistent results.

- three states: up (U), down (D) and repair (R);
- four transitions: (independent) failure, failure due to common cause failure, start of repair and end of repair;
- several predicates and assertions:
  - two assertions,  $!!a=true$  and  $!!a=false$ , to update the state of the block (up or down). Each block state is modelled in this way in order to evaluate the state of the whole system through the logical architecture of the RBD;
  - one predicate,  $??ccf = true$ , which triggers the failure of the block when the CCF occurs. This is used to model the interactions with an external element modelling the CCF;
  - one predicate,  $??r > 0$ , allowing to start the repair when at least one repair team is available. This is used to model the interactions between the blocks sharing the same repair teams;

- one assertion,  $!!r = r-1$ , to decrease the number of repair teams available by one when a repair is started. This is used to model the interactions between the blocks sharing the same repair teams;
- one assertion,  $!!r = r+1$ , to increase the number of repair teams available by one when a repair is completed. This is used to model the interactions between the blocks sharing the same repair teams.

On the right hand side of Figure E.1 is proposed a representation of the block related to this sub-PN.



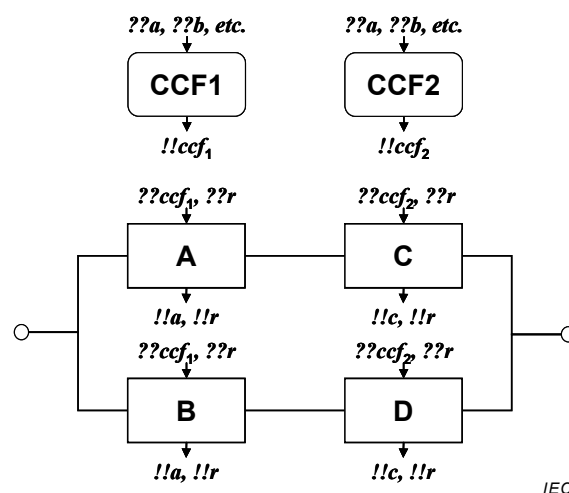
**Figure E.2 – Example of a sub-PN modelling a common cause failure**

Figure E.2 gives an example of a sub-PN developed to be used as an external element of a DRBD. It models a common cause failure characterized by

- two states: U (up: not occurred CCF), D (down: occurred CCF),
- two transitions: occurrence of CCF, reset of the CCF,
- several predicates and assertions:
  - two assertions,  $!!ccf=true$  and  $!!ccf=false$ , to update the state of the CCF (not-occurred or occurred). This is used to fail the blocks related to this CCF;
  - several predicates,  $??a = true$ ,  $??b = true$ , etc. which allow to reset the CCF only after all the blocks affected by this CCF have been repaired.

On the right hand side of Figure E.2 is proposed a representation of the external element related to this sub-PN.

Those sub-PNs may be used to build DRBD as this is shown in Figure E.3.



**Figure E.3 – Example of DRBD based on RBD driven PN**

This DRDB models

- a common cause failure on blocks A and B and another common cause failure on blocks C and D,
- a limited number of repair teams for repairing the four blocks. The number of repair teams is given by the initial conditions:  $r = 1$  models a single repair team,  $r = 2$  models two available repair teams, etc.,  $r = 4$  is equivalent to the classical assumption considering that there are as many repair teams as repaired blocks.

### E.3 Evaluation of the DRBD state

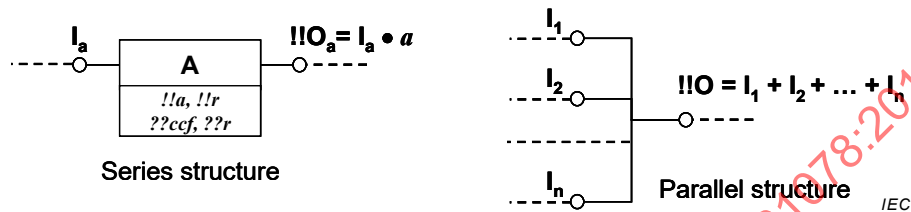


Figure E.4 – Logical calculation of classical RBD structures

The state of the system is given by the combinations of the states of the blocks ( $a, b, c$  and  $d$ ) and this can be done exactly as for an ordinary RBD by using the global assertions presented in Figure E.4:

- $!!O_a = I_a \cdot a$  for series structures: the output of block A is up if its input is up and if the block is in up state;
- $!!O = I_1 + I_2 + \dots + I_n$  for parallel structures: the output is up if at least one of the inputs is up.

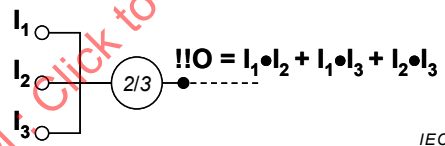
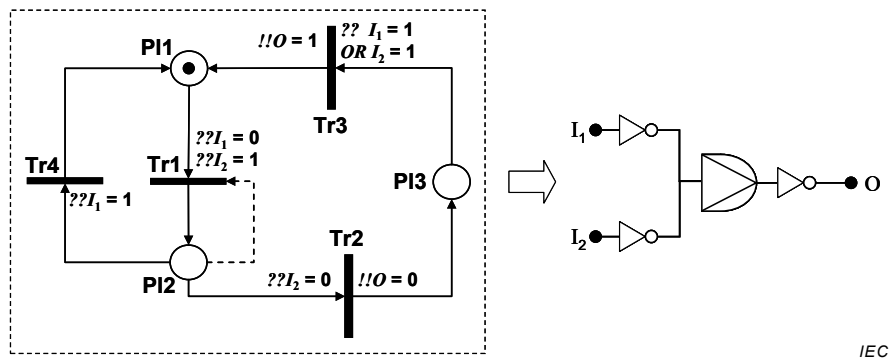


Figure E.5 – Example of logical calculation for an  $n/m$  gate

Figure E.5 shows that a 2/3 gate can also be calculated by a simple logical formula. This can be easily extended to any kind of  $n/m$  gates.

For the PAND gate, no logical formula exists but a simple sub-PN such as the one presented in Figure E.6 can be used instead. This PN has been drawn for two inputs but can be easily extended to  $n$  inputs. It is equivalent to the finite-state automaton presented in Figure 50.



IEC

**Figure E.6 – Example of sub-PN modelling a PAND gate with 2 inputs**

The behaviour of this PN is the following:

- 1) at the beginning, the output is in the up state ( $O = 1$ ) and the place PI1 is marked with 1 token;
- 2) if  $I_2$  is false ( $I_2 = 0$ ) when  $I_1$  is true ( $I_1 = 1$ ) the transition Tr1 is inhibited;
- 3) if  $I_1$  becomes false ( $I_1 = 0$ ) when  $I_2$  is true ( $I_2 = 1$ ) that means that  $I_1$  has occurred before  $I_2$  and then the transition Tr1 is immediately fired. The token is removed from PI1 and one token is added in PI2. This inhibits Tr1 (thanks to the inhibitor arrow in dotted lines) and validates Tr2 and Tr4;
- 4) if  $I_1$  is true ( $I_1 = 1$ ) before  $I_2$  becomes false, then Tr4 is fired and the PN comes back to its initial state;
- 5) if  $I_2$  becomes false ( $I_2 = 0$ ) while  $I_1$  is still false ( $I_1 = 0$ ), the transition Tr2 is immediately fired and the output becomes false ( $O = 0$ );
- 6) if  $I_1$  or  $I_2$  become true again ( $I_1 = 1$  or  $I_2 = 1$ ), then Tr3 is fired and the output becomes true again ( $O = 1$ );
- 7) if Tr3 has been fired because  $I_1 = 1$  the PN comes back to step 2 where Tr1 is inhibited;
- 8) if Tr3 has been fired because  $I_2 = 1$  the PN comes back to step 3 and Tr1 is immediately fired.

With this sub-PN the output becomes "false" ( $O = 0$ ) only if  $I_1$  and  $I_2$  become "false" ( $I_1 = 0$ ,  $I_2 = 0$ ) and in this order.

The same sub-PN can be used to model the finite-state automaton presented in Figure 52 for a SEQ gate but it is not sufficient to model the dynamic interaction between  $I_2$  and  $I_1$ :  $I_2$  cannot go into the down state before  $I_1$  has gone to the down state. This can be achieved, for example, by modelling blocks C and D in Figure 51 by sub-PNs like the one presented in Figure E.7 for block C.

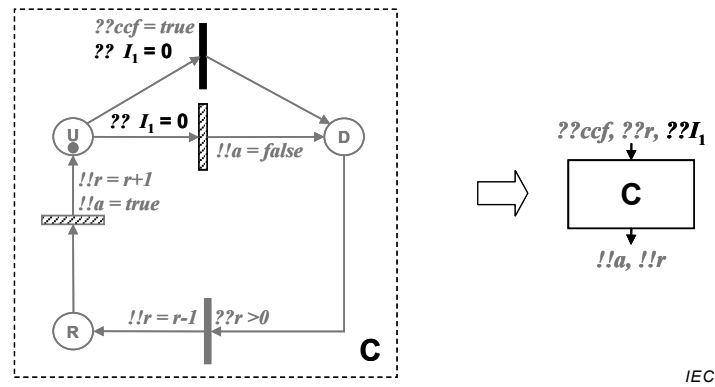


Figure E.7 – Example of the inhibition of the failure of a block

This sub-PN is derived from the one presented in Figure E.1 where the failure transitions of the block (independent and common cause failures) are inhibited as long as  $I_1$  has not gone to the down state ( $I_1 = 0$ ).

#### E.4 Availability, reliability, frequency and MTTF calculations

When the model is built, it can be used for probabilistic calculation and this is achieved by using Monte Carlo simulation. The sub-PN presented in Figure E.8 models the DRBD output and it can be used to obtain all the needed probabilistic results:

- the marking of place U at time  $t$  gives the system availability  $A_S(t)$ ;
- the marking of place D at time  $t$  gives the system unavailability  $U_S(t)$ ;
- the mean marking of place U at over  $[0, T]$  gives the average system availability  $A(0, T)$  over  $[0, T]$ ;
- the mean marking of place D at over  $[0, T]$  gives the average system unavailability  $U(0, T)$  over  $[0, T]$ ;
- the frequency of firing of the transition "First failure" gives the system unreliability  $R_S(t)$  over  $[0, t]$ ;
- the frequency of firing of the transition "failure" gives the average system failure frequency  $w_S^{avg}(0, t)$ ;
- the mean marking of the place M gives the mean time before the first failure occurs. When the time is long enough to have at least one failure per simulation, then this gives the MTTF of the system modelled by the DRBD;
- etc.

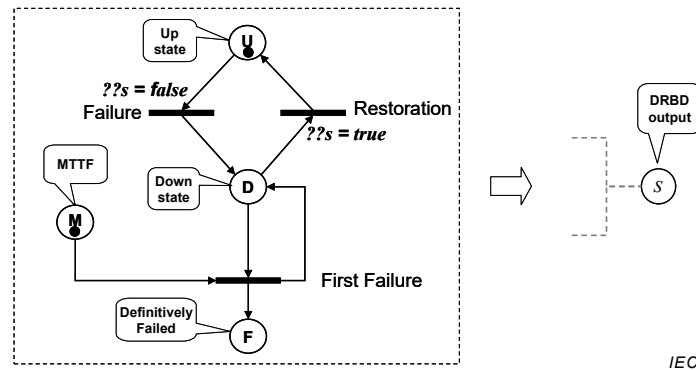


Figure E.8 – Sub-PN for availability, reliability and frequency calculations

## Annex F (informative)

### Numerical examples and curves

#### F.1 General

Annex F develops some numerical examples on a typical RBD structure and establishes the corresponding availability (definition 3.21), reliability (definition 3.26), conditional failure intensity (Vesely failure rate) (definition 3.30) and unconditional failure intensity (failure frequency) (definition 3.31). Curves are drawn in order to show how those parameters vary when time elapses.

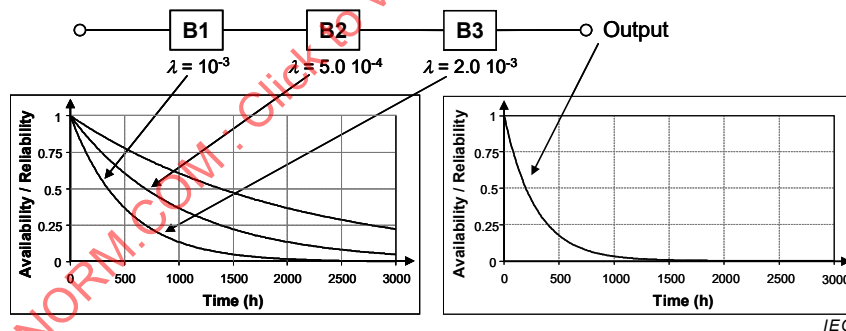
Analytical calculations are performed by using a tool implementing the BDD approach in order to propose results without approximations.

In Clause F.5 the Monte Carlo simulation approach is used to calculate the availability of dynamic RBDs involving several functional dependencies.

#### F.2 Typical series RBD structure

##### F.2.1 Non-repaired blocks

Figure F.1 represents a typical RBD series structure made of 3 non-repaired blocks. In this case the reliability and availability of the blocks are equal and this is the same for the whole system.



**Figure F.1 – Availability/reliability of a typical non-repaired series structure**

The left hand side of the figure represents the reliability/availability of the blocks which are modelled by constant failure rates (exponential laws):

- Block B<sub>1</sub>:  $\lambda_1 = 1,0 \times 10^{-3} \text{ h}^{-1}$ ,
- Block B<sub>2</sub>:  $\lambda_2 = 5,0 \times 10^{-4} \text{ h}^{-1}$ ,
- Block B<sub>3</sub>:  $\lambda_3 = 2,0 \times 10^{-3} \text{ h}^{-1}$

The right hand side of the figure represents the reliability/availability of the whole system.

Figure F.2 represents the failure rate,  $\Lambda(t)$ , and the failure frequency  $w(t)$  of the non-repaired series structure.

In this case the Vesely failure rate  $\Lambda_V(t)$  (conditional failure intensity) and the failure rate  $\Lambda(t)$  are equal and constant. As expected  $\Lambda(t) = \Lambda_V(t) = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = \text{constant}$ .

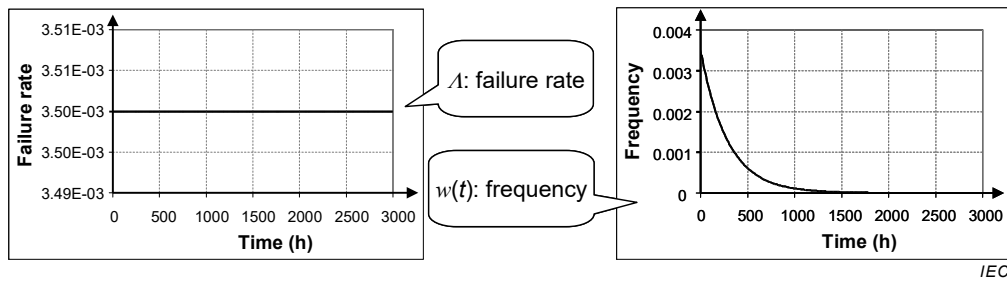


Figure F.2 – Failure rate and failure frequency related to Figure F.1

Therefore, the system made of three blocks is equivalent to a single block C with  $\lambda_C = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$ .

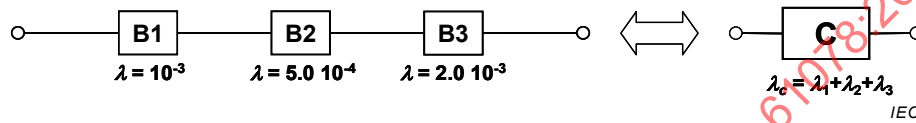


Figure F.3 – Equivalence of a non-repaired series structure to a single block

The failure frequency (unconditional failure intensity) decreases as the time  $t$  increases and goes to 0 when  $t$  goes to infinity. This is due to the fact that, being non-repaired, the system can fail only once.

## F.2.2 Repaired blocks

Figure F.4 represents a typical RBD series structure made of 3 repaired blocks. In this case the availability and the reliability of the blocks are different and this is the same for the whole system.

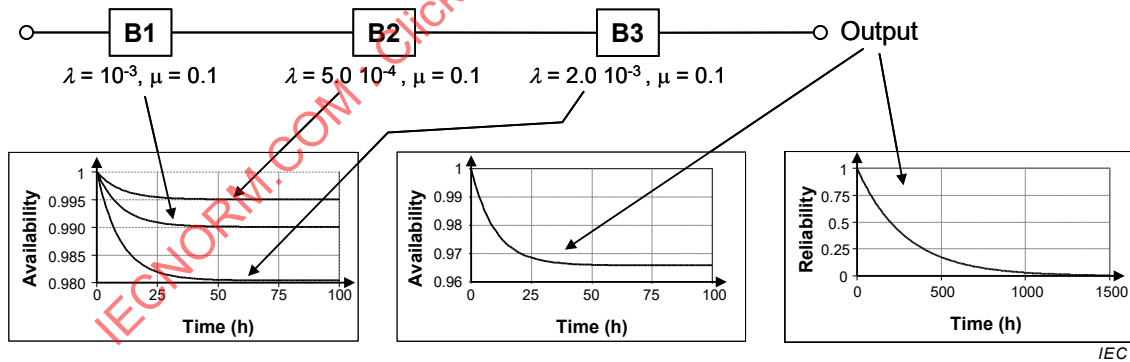


Figure F.4 – Availability/reliability of a typical repaired series structure

The left hand side of the figure represents the availability of the blocks which are modelled by the following constant failure and repair rates:

- Block B<sub>1</sub>:  $\lambda_1 = 1,0 \times 10^{-3} \text{ h}^{-1}$ ,  $\mu = 0,1 \text{ h}^{-1}$ ;
- Block B<sub>2</sub>:  $\lambda_2 = 5,0 \times 10^{-4} \text{ h}^{-1}$ ,  $\mu = 0,1 \text{ h}^{-1}$ ;
- Block B<sub>3</sub>:  $\lambda_3 = 2,0 \times 10^{-3} \text{ h}^{-1}$ ,  $\mu = 0,1 \text{ h}^{-1}$ .

The system availability is presented in the middle of the figure and the reliability on the right hand side.

The behaviour is very different compared to the non-repaired case: as shown in Figure F.4, the availabilities of the blocks (left hand side) as well as the availability of the whole system (middle of the figure) quickly reach asymptotic values.

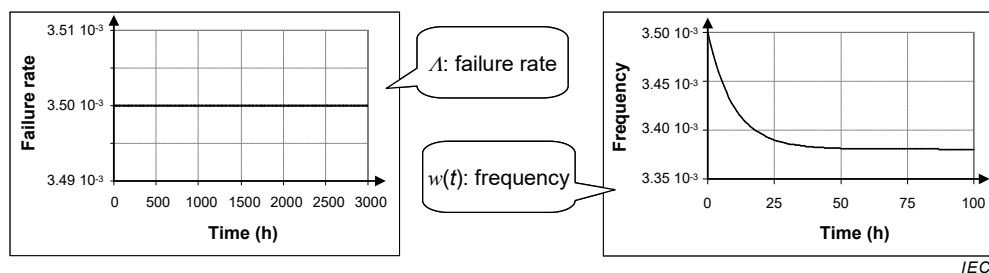


Figure F.5 – Failure rate and failure frequency related to Figure F.4

Figure F.5 represents the failure rate,  $\lambda(t)$ , and the failure frequency  $w(t)$  of the repaired series structure.  $\lambda(t)$  is the same as in non-repaired case because each block failure causes the whole system failure and then, from a reliability calculation point of view cannot be repaired (see 10.3.3).

### F.3 Typical parallel RBD structure

#### F.3.1 Non-repaired blocks

Figure F.6 represents a typical RBD parallel structure made of 3 non-repaired blocks. In this case the reliability and availability of the blocks are equal and this is the same for the whole system.

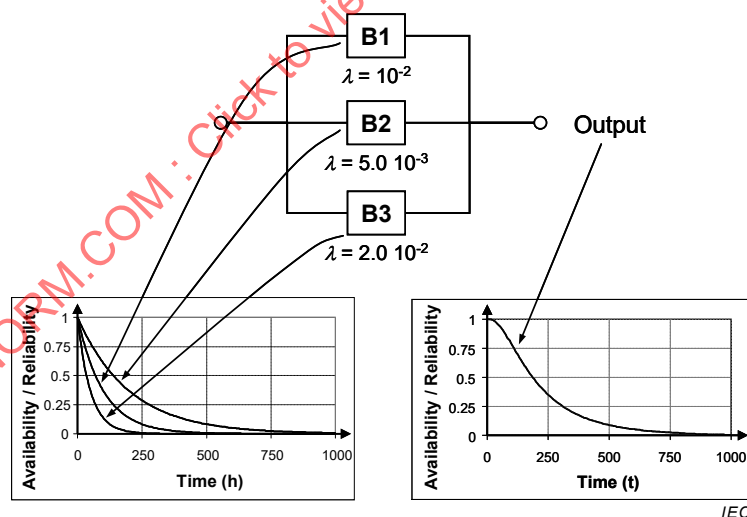


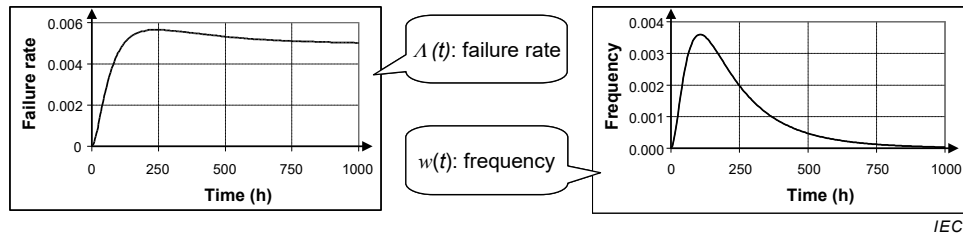
Figure F.6 – Availability/reliability of a typical non-repaired parallel structure

The left hand side of the figure represents the availability/reliability of the blocks which are modelled by constant failure rates (exponential laws):

- block B<sub>1</sub>:  $\lambda_1 = 1,0 \times 10^{-2} \text{ h}^{-1}$ ;
- block B<sub>2</sub>:  $\lambda_2 = 5,0 \times 10^{-3} \text{ h}^{-1}$ ;
- block B<sub>3</sub>:  $\lambda_3 = 2,0 \times 10^{-2} \text{ h}^{-1}$ .

The right hand side of the figure represents the reliability/availability of the whole system.

Figure F.7 represents the failure rate,  $\lambda(t)$ , and the failure frequency,  $w(t)$ , of the non-repaired parallel structure. As the availabilities and reliabilities are the same, the failure rate and the Vesely failure rate are also the same:  $\lambda(t) = \lambda_V(t)$ .



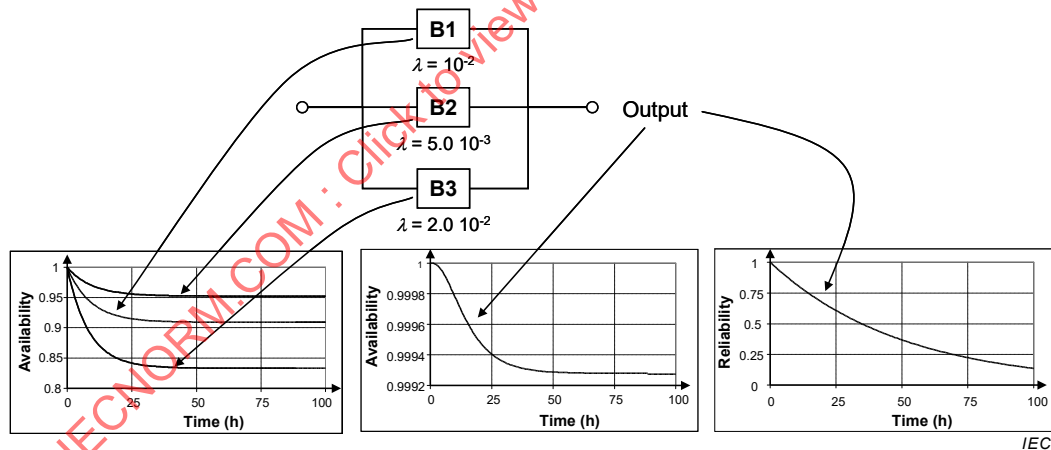
**Figure F.7 – Failure rate and failure frequency related to Figure F.6**

The behaviour is very different compared to the non-repaired series structure:

- $\lambda(t)$  needs a very long time to reach an asymptotic value which is equal to that of the lower failure rate of the three blocks. This asymptotic value is reached when the blocks with higher failure rates have had time to fail. It is reached very slowly and cannot be used as an approximation of the failure rate.
- the failure intensity,  $w(t)$ , goes through a maximum value before decreasing to zero.

### F.3.2 Repaired blocks

Figure F.8 represents a typical RBD parallel structure made of 3 repaired blocks. In this case the reliability and availability of the blocks are different and this is the same for the whole system.



**Figure F.8 – Availability/reliability of a typical repaired parallel structure**

The left hand side of the figure represents the availability of the blocks which are modelled by the following constant failure and repair rates:

- block B<sub>1</sub>:  $\lambda_1 = 1,0 \times 10^{-2} \text{ h}^{-1}$ ,  $\mu = 0,1 \text{ h}^{-1}$ ;
- block B<sub>2</sub>:  $\lambda_2 = 5,0 \times 10^{-3} \text{ h}^{-1}$ ,  $\mu = 0,1 \text{ h}^{-1}$ ;
- block B<sub>3</sub>:  $\lambda_3 = 2,0 \times 10^{-2} \text{ h}^{-1}$ ,  $\mu = 0,1 \text{ h}^{-1}$ .

The system availability is presented in the middle of the figure and the reliability on the right hand side.

The behaviour is very different compared to the non-repaired case: as shown in Figure F.8, the availabilities of the blocks (left hand side) as well as the availability of the whole system (middle of the figure) quickly reach asymptotic values.

Figure F.9 represents the Vesely failure rate (conditional failure intensity),  $\Lambda_V(t)$ , and the failure frequency  $w(t)$  of the repaired parallel structure.

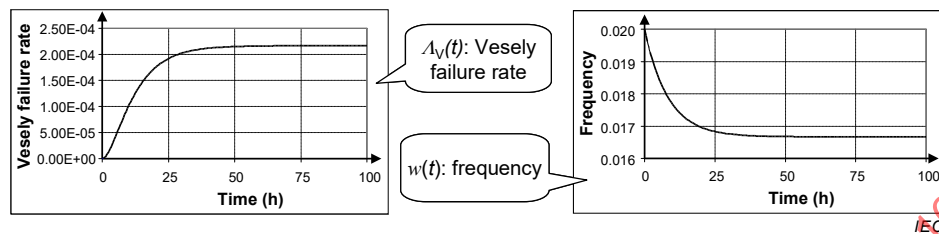


Figure F.9 – Vesely failure rate and failure frequency related to Figure F.8

The behaviour is very different compared to the non-repaired parallel structure:

- $\Lambda_V(t)$  very quickly reaches an asymptotic value. In this case, it becomes constant after 3 or 4 MTTR (30 h to 40 h) and this asymptotic value can be used as a constant failure rate to calculate the system reliability;
- the failure intensity,  $w(t)$ , also very quickly reaches an asymptotic value which can be used to calculate the average system failure frequency.

## F.4 Complex RBD structures

### F.4.1 Non series-parallel RBD structure

Figure F.10 represents the RBD with a common block introduced in 7.5.2. This is a structure which cannot be reduced to simple series or parallel structures.

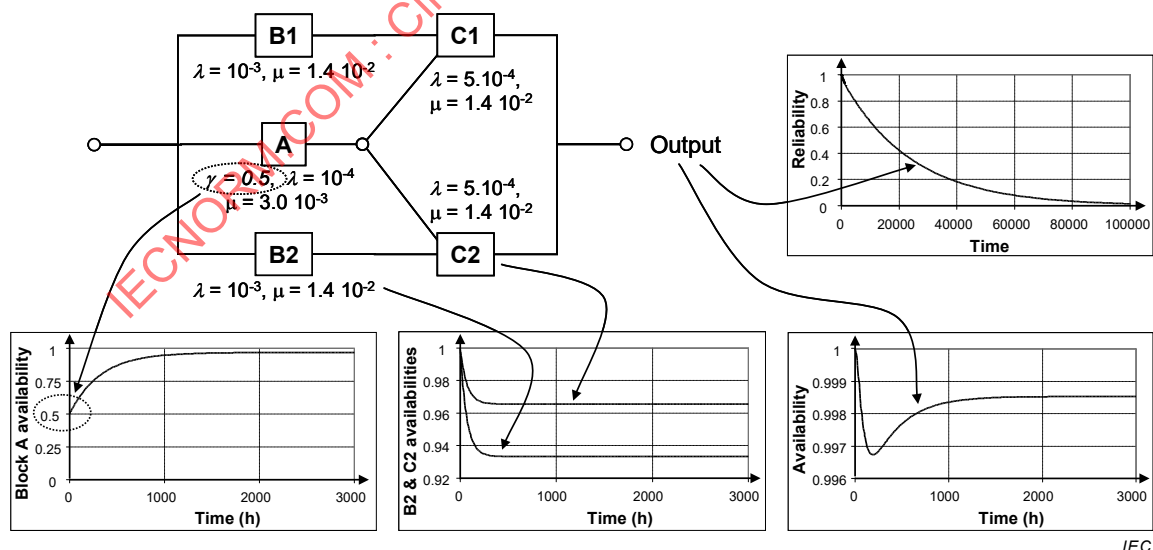


Figure F.10 – Example 1 from 7.5.2

The left hand side and the middle of the figure represent the availability of the blocks which are modelled by the following constant failure and repair rates:

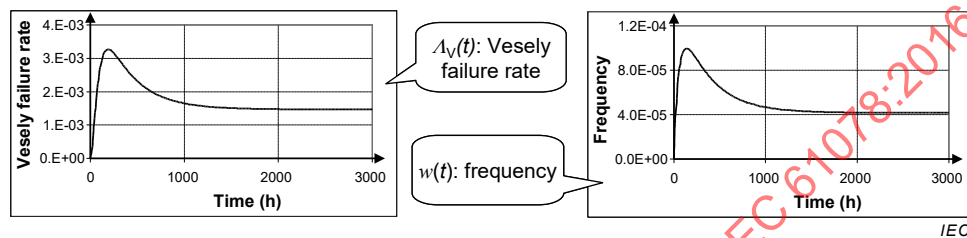
- blocks  $B_1$  and  $B_2$ :  $\lambda_1 = 1,0 \times 10^{-4} \text{ h}^{-1}$ ,  $\mu = 0,014 \text{ h}^{-1}$ ;
- blocks  $C_1$  and  $C_2$ :  $\lambda_2 = 5,0 \times 10^{-5} \text{ h}^{-1}$ ,  $\mu = 0,014 \text{ h}^{-1}$ ;

- block A:  $\lambda_3 = 1,0 \times 10^{-5} \text{ h}^{-1}$ ,  $\mu = 3,0 \times 10^{-3} \text{ h}^{-1}$ ,  $\gamma = 0,5$ .

The blocks are common repaired blocks but the repair rate of A is longer than the others and this block also has a probability of 0,5 to be in up state at time  $t$  equal to 0. As a result and as shown on Figure F.10, the availability of this block does not behave as the availability of the other blocks.

The system availability and the system reliability are presented on the right hand side of the figure. Due to the behaviour of A, the availability goes to a minimum before reaching an asymptotic value. This minimum corresponds to the MTTR of A.

The reliability behaves as usual.

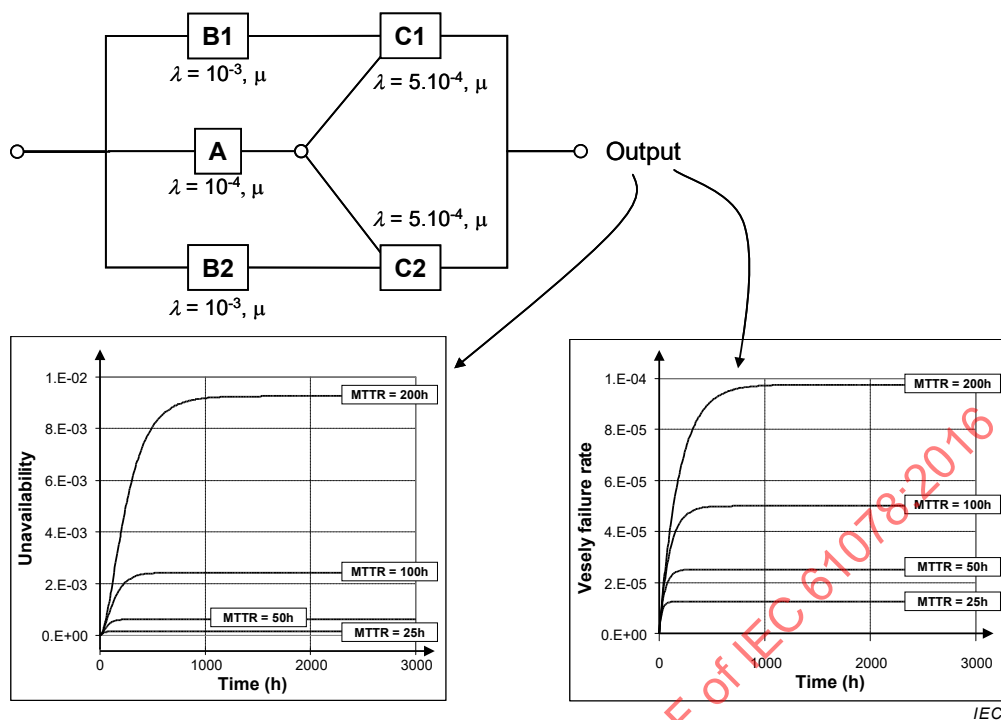


**Figure F.11 – Failure rate and failure frequency related to Figure F.10**

Figure F.11 represents the Vesely failure rate (conditional failure intensity),  $\lambda_V(t)$ , and the failure frequency  $w(t)$  of the system presented in Figure F.10. The shape of these parameters is due to the special behaviour of A:  $\lambda_V(t)$  as well as  $w(t)$  reach a maximum value before reaching asymptotic values

#### **F.4.2 Convergence to asymptotic values versus MTTR**

The unavailability and the equivalent failure rate of the RBD shown in Figure F.12 have been calculated with 4 different constant repair rates in order to visualize the impact of the MTTR on the speed of the convergence toward asymptotic values.



**Figure F.12 – Impact of the MTTR on the convergence quickness**

The blocks of the RBD presented in Figure F.12 have constant failure and repair rates. Therefore, they have markovian behaviours and this is why the system availability, system unavailability and conditional failure intensity (Vesely failure rate) converge toward asymptotic values.

Figure F.12 shows clearly that the convergence speed increases when the MTTR decreases. Then, when the system is quickly repaired, it behaves as if it had

- constant probabilities of success or of failures for the availability or unavailability calculations,
- constant failure rate for the reliability calculations.

#### **F.4.3 System with periodically tested components**

Figure F.13 represents the same RBD as above but with periodically tested components.

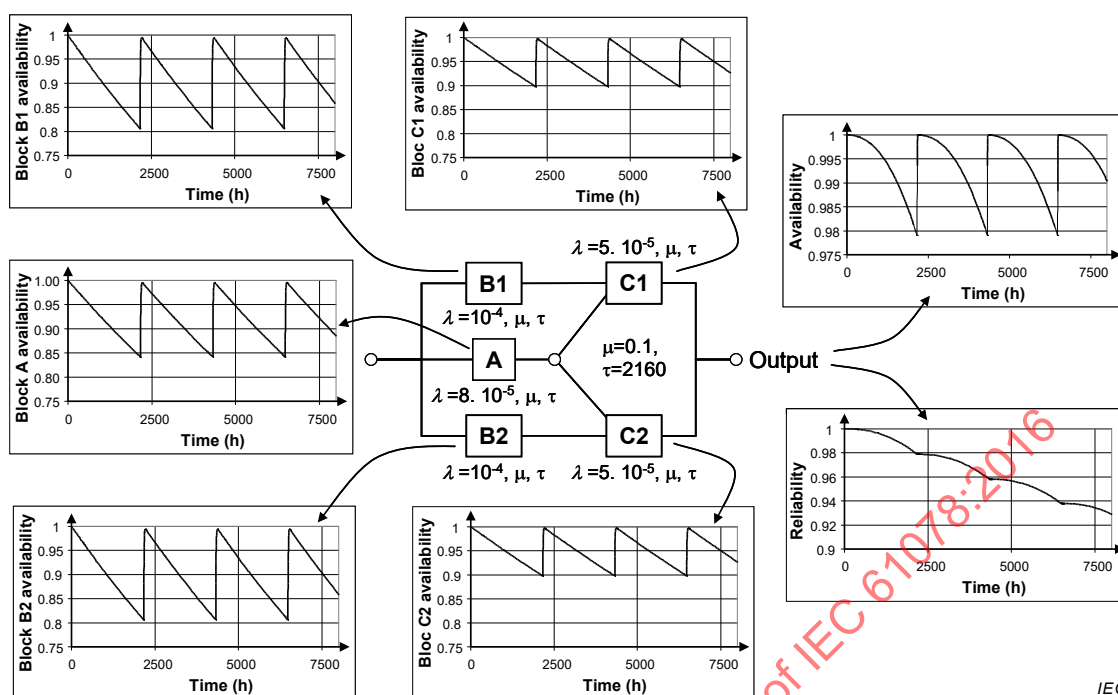


Figure F.13 – System with periodically tested blocks

The left hand side and the middle of the figure represents the availability of the blocks which are periodically tested and modelled by the following test intervals and constant failure and repair rates:

- blocks B<sub>1</sub> and B<sub>2</sub>:  $\lambda_1 = 1,0 \times 10^{-4} \text{ h}^{-1}$ ,  $\mu = 0,1 \text{ h}^{-1}$ ,  $\tau = 2\,160 \text{ h}$ ;
- blocks C<sub>1</sub> and C<sub>2</sub>:  $\lambda_2 = 5,0 \times 10^{-5} \text{ h}^{-1}$ ,  $\mu = 0,1 \text{ h}^{-1}$ ,  $\tau = 2\,160 \text{ h}$ ;
- block A:  $\lambda_3 = 8,0 \times 10^{-5} \text{ h}^{-1}$ ,  $\mu = 0,1 \text{ h}^{-1}$ ,  $\tau = 2\,160 \text{ h}$ .

The availabilities of the blocks are typical saw tooth curves and this is the same for the system availability on the right hand side.

The test intervals give the special shape to the system reliability shown on the right hand side of Figure F.13. This is still a non-increasing function.

Such RBDs are commonly encountered when dealing with the functional safety of safety instrumented systems where some dangerous failures are detected by periodical tests. The average unavailability of these systems is called  $\text{PFD}_{\text{avg}}$  (see 3.24 and IEC 61508 [5]).

Figure F.14 illustrates the Vesely failure rate and the failure frequency of such a system made of periodically tested components.

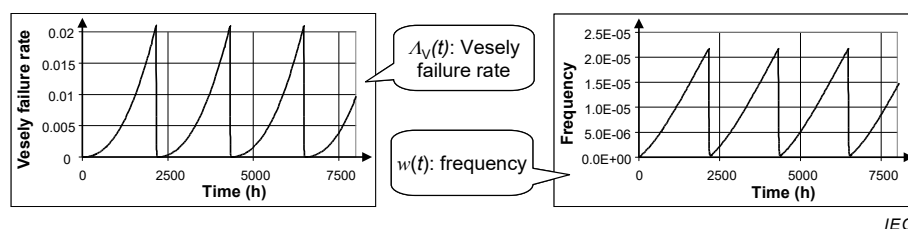
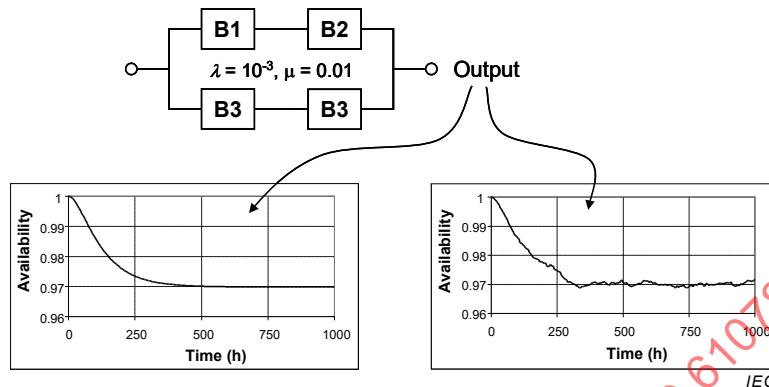


Figure F.14 – Failure rate and failure frequency related to Figure F.13

## F.5 Dynamic RBD example

### F.5.1 Comparison between analytical and Monte Carlo simulation results

Figure F.15 represents a small parallel-series RBD structure made of 4 similar blocks with the same failure and repair rate:  $\lambda = 1,0 \times 10^{-3} \text{ h}^{-1}$ ,  $\mu = 0,01 \text{ h}^{-1}$ .



**Figure F.15 – Analytical versus Monte Carlo simulation results**

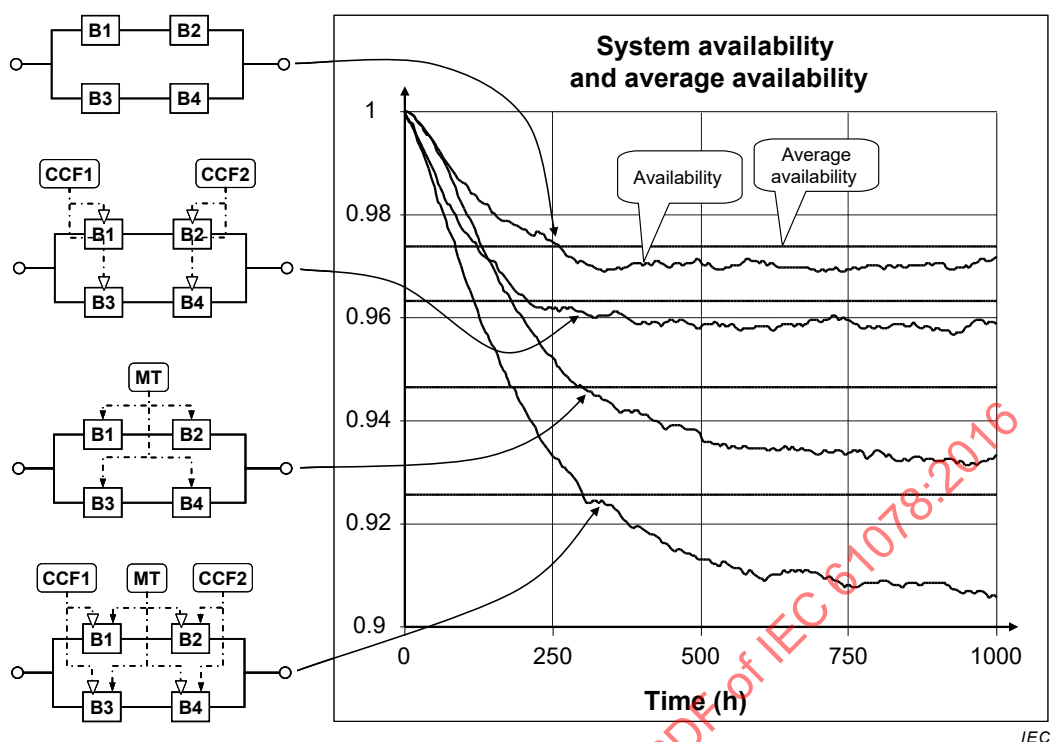
The results obtained by a classical analytical calculation implementing the BDD approach are presented on the left hand side of Figure F.15 and those obtained by Monte Carlo simulation are presented on the right hand side.

The Monte Carlo results have been obtained in about 10 s on an ordinary laptop computer and 50 000 histories have been simulated. Of course the analytical curve is smoother than the one obtained from Monte Carlo simulation but the shape is the same and the two curves provide the same average availability value of 0,973 9 over 1 000 h and converge toward the same asymptotic value of 0,97.

### F.5.2 Dynamic RBD example

Several dynamic dependencies have been added to the previous RBD presented in F.5.1 in order to see which impact they can have on the results:

- common cause failures on B1 and B3, and common cause failures on B2 and B4 ( $\lambda_{CCF} = 1,0 \times 10^{-4}$ );
- single repair team;
- both a single repair team and common cause failures.



**Figure F.16 – Impact of CCF and limited number of repair teams**

Figure F.16 shows clearly that the impacts are not negligible and this is analysed in more details in Table F.1:

**Table F.1 – Impact of functional dependencies**

| Configuration              | System availability   |                       | System unavailability |                      |
|----------------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|----------------------|
|                            | $A_{avg}(1000)$       | $A^{as}$              | $U_{avg}(1000)$       | $U^{as}$             |
| No functional dependencies | $9,74 \times 10^{-1}$ | $9,71 \times 10^{-1}$ | $2,6 \times 10^{-2}$  | $2,9 \times 10^{-2}$ |
| CCFs                       | $9,63 \times 10^{-1}$ | $9,59 \times 10^{-1}$ | $3,7 \times 10^{-2}$  | $4,1 \times 10^{-2}$ |
| Single repair team         | $9,47 \times 10^{-1}$ | $9,32 \times 10^{-1}$ | $5,4 \times 10^{-2}$  | $6,8 \times 10^{-2}$ |
| CCF + single repair team   | $9,26 \times 10^{-1}$ | $9,06 \times 10^{-1}$ | $7,4 \times 10^{-2}$  | $9,4 \times 10^{-2}$ |

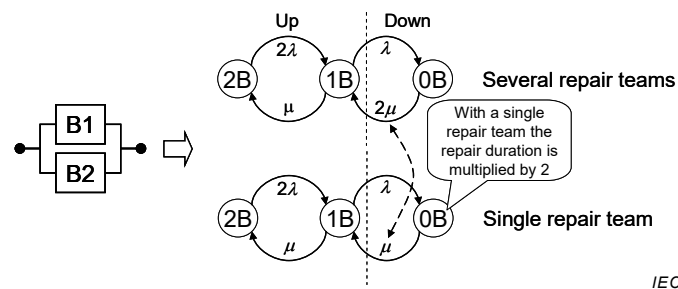
The impact is more visible when considering the unavailability rather than the availability. For example, for the asymptotic unavailabilities, the rates are:

- common cause failures: 140 %;
- single repair team: 234 %;
- both: 323 %.

Therefore, the assumption that there is as many repair teams as blocks is not really neutral and is non-conservative. The impact increases when:

- a) the block failure rates increase (the probability to have several failures at the same time increases),
- b) the MTTR increases (the probability to have the failure of one block during the repair of another one increases),
- c) the order of the preponderant minimal cut sets increases.

When the blocks are very reliable and when the MTTR is short, items a) and b) have a very limited impact. The main problem occurs with item c).



**Figure F.17 – Markov graphs modelling the impact of the number of repair teams**

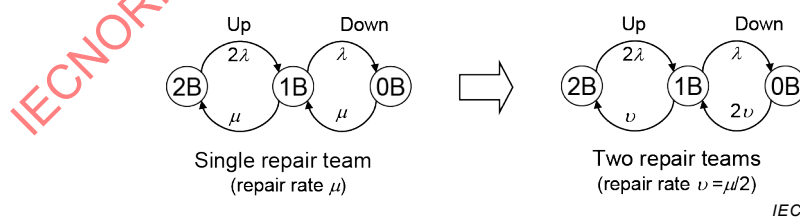
Let us imagine an RBD made of two similar blocks B1 and B2 with the same failure and repair rates ( $\lambda$ ,  $\mu$ ). Figure F.17 proposes the Markov graphs drawn in the case of two repair teams (top of the figure) and of a single repair team (bottom of the figure). Those Markov graphs have 3 states:

- 2B: 2 blocks in up states;
- 1B: 1 block in up state and 1 block in down state;
- 0B: 2 blocks in down states (0 blocks in up states).

The system is failed when both B1 and B2 are failed (state 0B). The sojourn time in this state is

- $1/\mu$  = MTTR when there is only a single repair team,
- $1/2\mu$  = 2xMTTR when there are several repair teams.

Then, with a single repair team, the mean time to repair the system is twice the needed mean time to repair when there are several teams. Therefore, when there is only a single repair team, a conservative approach should be to use an MTTR equal to twice that used with several repair teams. This is illustrated in Figure F.18 where the Markov graph on the right hand side (two repair teams with a repair rate  $\nu = \mu/2$ ) is an approximation of the Markov graph on the left hand side (one single repair team with a repair rate  $\mu$ ). Therefore the MTTR of each block has been multiplied by 2 on the right hand side.



**Figure F.18 – Approximation for two redundant blocks**

This approach is conservative because the mean sojourn time in the state 1B has been multiplied by 2. Nevertheless, even in this simple case, it may be too conservative. In addition, this may be difficult to apply for larger or more complex RBDs and it would be better to use, for example, an RBD driven PN (see Annex E) and perform Monte Carlo simulations which are now achievable on simple laptop computers.

## Bibliography

- [1] IEC 61025, *Fault tree analysis (FTA)*
- [2] IEC 61165, *Application of Markov techniques*
- [3] IEC 62551, *Analysis techniques for dependability – Petri net techniques*
- [4] IEC 60812, *Analysis techniques for system reliability – Procedure for failure mode and effects analysis (FMEA)*
- [5] IEC 61508:2010 (all parts), *Functional safety of electrical/electronic/programmable electronic safety-related systems*
- [6] IEC 61511:2016 (all parts), *Functional safety – Safety instrumented systems for the process industry sector*
- [7] ISO/TR 12489, *Petroleum, petrochemical and natural gas industries – Reliability modelling and calculation of safety systems*

### RBD methods (general)

- [8] Karnaugh, M., *The Map Method for Synthesis of Combinational Logic Circuits*. Trans. AIEE. pt. I, Vol. 72, No. 9., pp. 593-598, 1953
- [9] Mc Cluskey Jr, E., *Minimization of Boolean functions*. Bell System Technical Journal, Vol. 35, Issue 6, pp 1417 – 1444, 1956
- [10] Veitch, E. W., *A chart method for simplifying truth functions*. In Proceedings of the 1952 ACM national meeting, Pittsburgh, pp. 127-133). ACM, 1952
- [11] Umezawa, T., *A method of two-level simplification of Boolean functions*. Nagoya Mathematical Journal, Vol. 29, pp 201-210. 1967
- [12] Dutuit Y., Rauzy A., *Efficient algorithms to assess component and gate importance in fault tree analysis*, Reliability Engineering and System Safety, Vol. 72, No. 1, pp 213-222, 2001
- [13] Borgonovo E and Apostolakis G.E. *A New Importance Measure for Risk Informed Decision-Making*, Reliability Engineering and System Safety, Vol. 72 No. 2, pp 193-212, 2001
- [14] Borgonovo E. *Differential, Criticality and Birnbaum Importance Measures and Application to Basic Events, Groups and SSCs in Event Trees and Binary Decision Diagrams*, Reliability Engineering and System Safety, Vol. 92, No. 10, pp 1458-1467, 2007
- [15] Distefano, S., *System Dependability and performances: Techniques, Methodologies and Tools*. Thesis of doctor in philosophy, University of Messina, Italy, 2005
- [16] Bobbio, A., Codetta, D., *Parametric Fault trees with dynamic gates and repair boxes*, RAMS 2004, pp 459-465, 2004
- [17] Simeu-Abazi, Z. et als, *A methodology of alarm filtering using dynamic fault tree*, Reliability Engineering and System Safety, Vol. 96, No. 2, pp 257–266, 2011

- [18] Signoret, J.-P. & al, *Make your Petri nets understandable: Reliability block diagrams driven Petri nets*. Reliability Engineering and System Safety, Vol. 113, pp 61–75, 2013
- [19] Bennetts, R.G. *Analysis of Reliability Block Diagrams by Boolean Techniques*, IEEE Transactions on reliability, Vol. 31, No. 2, pp. 159-166, 1982
- [20] Barlow R.E., Proschan F., *Statistical Theory of Reliability and Life Testing. Probabilistic Models*, New York, Holt, Rinehart and Winston, 1975
- [21] Billinton R., Allan R.N., *Reliability Evaluation of Engineering Systems. Concepts and Techniques*. Second Edition, Springer, 1992
- [22] Birolini A., *Quality and Reliability of Technical Systems. Theory – Practice – Management*. Berlin, Springer Verlag, 1997
- [23] Gaede K.W., *Zuverlässigkeit, Mathematische Modelle*. München, Carl Hanser Verlag, 1977
- [24] Rausand M. and Hoyland A. *System Reliability Theory – Models, Statistical Methods and Applications*, second edition, Wiley, New York, 2004
- [25] Kaufmann A., Grouchko D., Cruon R., *Mathematical Models for the Study of the Reliability of Systems*, New York, Academic Press, 1977
- [26] Kuo W., Zuo M.J., *Optimal Reliability Modeling: Principles and Applications*. New York, Wiley, 2003
- [27] Lewis E.E., *Introduction to Reliability Engineering*, Second Edition, Wiley, New York, 1996
- [28] MIL-HDBK-338B, *Military Handbook Electronic Reliability Design Handbook*, 1 October 1998
- [29] Pagès A., Gondran A., *System Reliability. Evaluation and Prediction in Engineering*, Berlin, Springer Verlag, 1986
- [30] Villemeur A., *Reliability, Availability, Maintainability and Safety Assessment*. Volume 1. Methods and Techniques, Chichester, Wiley, 1992.

#### **Disjointing procedures (or sum of disjoint products methods)**

- [31] Rauzy, A., *Binary Decision Diagrams for Reliability Studies. Pages 381–396, Handbook of Performability Engineering*. K.B. Misra ed., Elsevier. 2008
- [32] Akers B., *Binary decision diagrams*. IEEE Transactions on Computers, Vol. 27, issue 6, pp.509-516, 1978
- [33] Bryant R., *Graph based algorithms for Boolean functions manipulation*. IEEE Transactions on Computers, Vol 35, issue 8, pp.677-691, 1986
- [34] Abraham J.A., *An improved method for network reliability*, IEEE Transactions on Reliability, Vol. 8, No.1, pp.58-61, 1979
- [35] Beichelt F., *Zuverlässigkeit strukturierter Systeme*, Berlin, VEB Verlag Technik, 1988

- [36] Beichelt F., Spross L., *An improved Abraham-method for generating disjoint sums. IEEE Transactions on Reliability*, Vol.36, No.1, pp.70-74, 1987
- [37] Heidtmann K.D., *Smaller sums of disjoint products by subproducts inversion. IEEE Transactions on Reliability*, Vol.38, No.3, pp.305-311, 1989
- [38] Locks M.O., *Recursive disjoint products. A review of three algorithms. IEEE Transactions on Reliability*, Vol. 31, No.1, pp.33-35, 1982
- [39] Locks M.O., *Recent developments in computing of system-reliability. IEEE Transactions on Reliability*, Vol. 34, No.5, pp.425-436, 1985
- [40] Locks M.O., *A minimizing algorithm for sum of disjoint products. IEEE Transactions on Reliability*, Vol. 36, No.4, pp.445-453, 1987
- [41] Châtelet E., Dutuit Y., Rauzy A and Bouhoufani T. *An optimized procedure to generate sums of disjoint products*, Reliability Engineering and System Safety, Vol. 65, No3, pp 280-294, 1999
- [42] Rauzy A., Châtelet E., Dutuit Y. and Béranger C. *A practical comparison of methods to assess sum-of-products*, Reliability Engineering and System Safety, Vol. 79, No.1, pp 33-42, 2003
- [43] Luo Tong, Trivedi K.S., *An improved algorithm for coherent-system reliability. IEEE Transactions on Reliability*, Vol.47, No.1, pp.73-78, 1998

IECNORM.COM : Click to view the full PDF of IEC 61078:2016

IECNORM.COM : Click to view the full PDF of IEC 61078:2016

## SOMMAIRE

|                                                                                               |     |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| AVANT-PROPOS.....                                                                             | 126 |
| INTRODUCTION.....                                                                             | 128 |
| 1 Domaine d'application.....                                                                  | 129 |
| 2 Références normatives .....                                                                 | 129 |
| 3 Termes et définitions .....                                                                 | 129 |
| 4 Symboles et termes abrégés.....                                                             | 137 |
| 5 Considérations préalables, hypothèses principales et limitations.....                       | 142 |
| 5.1 Considérations générales .....                                                            | 142 |
| 5.2 Prérequis/hypothèses principales .....                                                    | 142 |
| 5.3 Limitations .....                                                                         | 143 |
| 6 Établissement des états de succès/défaillance .....                                         | 144 |
| 6.1 Considérations générales .....                                                            | 144 |
| 6.2 Considérations détaillées .....                                                           | 144 |
| 6.2.1 Fonctionnement du système .....                                                         | 144 |
| 6.2.2 Conditions environnementales.....                                                       | 144 |
| 6.2.3 Cycles de fonctionnement .....                                                          | 145 |
| 7 Modèles élémentaires.....                                                                   | 145 |
| 7.1 Développement du modèle .....                                                             | 145 |
| 7.2 Structures série.....                                                                     | 145 |
| 7.3 Structures parallèles .....                                                               | 146 |
| 7.4 Mélange de structures séries et de structures parallèles .....                            | 146 |
| 7.5 Autres structures.....                                                                    | 147 |
| 7.5.1 Structures $m$ sur $n$ .....                                                            | 147 |
| 7.5.2 Structures avec blocs communs .....                                                     | 148 |
| 7.5.3 Blocs composites.....                                                                   | 149 |
| 7.6 BDF volumineux et utilisation de portes de transfert.....                                 | 149 |
| 8 Analyse qualitative: ensembles de fermeture minimaux et coupes minimales. ....              | 150 |
| 8.1 Analogie électrique .....                                                                 | 150 |
| 8.2 Représentation série-parallèle avec chemin de succès minimal et coupes minimales .....    | 152 |
| 8.3 Analyse qualitative à partir des coupes minimales.....                                    | 153 |
| 9 Analyse quantitative: blocs avec probabilité constante de défaillance/succès .....          | 154 |
| 9.1 Structures série.....                                                                     | 154 |
| 9.2 Structures parallèles .....                                                               | 154 |
| 9.3 Mélange de structures séries et de structures parallèles .....                            | 155 |
| 9.4 Architectures $m/n$ (entités identiques) .....                                            | 155 |
| 10 Analyse quantitative: blocs avec probabilité de défaillance/succès dépendant du temps..... | 156 |
| 10.1 Généralités .....                                                                        | 156 |
| 10.2 Blocs non réparés .....                                                                  | 157 |
| 10.2.1 Généralités .....                                                                      | 157 |
| 10.2.2 Bloc non réparé simple.....                                                            | 157 |
| 10.2.3 Blocs composites non réparés.....                                                      | 157 |
| 10.2.4 BDF avec blocs non réparés.....                                                        | 158 |
| 10.3 Blocs réparés.....                                                                       | 158 |

|                        |                                                                                                        |     |
|------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 10.3.1                 | Calculs de disponibilité .....                                                                         | 158 |
| 10.3.2                 | Calculs de disponibilité moyenne.....                                                                  | 161 |
| 10.3.3                 | Calculs de fiabilité.....                                                                              | 163 |
| 10.3.4                 | Calculs de fréquence .....                                                                             | 165 |
| 11                     | Techniques booléennes d'analyse quantitative de grands modèles .....                                   | 165 |
| 11.1                   | Généralités .....                                                                                      | 165 |
| 11.2                   | Méthode de réduction de BDF .....                                                                      | 166 |
| 11.3                   | Utilisation du théorème des probabilités totales .....                                                 | 167 |
| 11.4                   | Utilisation des tables de vérité booléennes .....                                                      | 168 |
| 11.5                   | Utilisation des tableaux de Karnaugh.....                                                              | 170 |
| 11.6                   | Utilisation de la décomposition de Shannon et des diagrammes de décision binaires.....                 | 171 |
| 11.7                   | Utilisation de la formule de Sylvester-Poincaré .....                                                  | 173 |
| 11.8                   | Exemples d'application de BDF .....                                                                    | 174 |
| 11.8.1                 | Modèles avec blocs répétés .....                                                                       | 174 |
| 11.8.2                 | Modèles $m$ sur $n$ (entités pas identiques) .....                                                     | 177 |
| 12                     | Extension des techniques de diagramme de fiabilité .....                                               | 178 |
| 12.1                   | Diagrammes de fiabilité non cohérents .....                                                            | 178 |
| 12.2                   | Diagrammes de fiabilité dynamiques.....                                                                | 181 |
| 12.2.1                 | Généralités .....                                                                                      | 181 |
| 12.2.2                 | Interactions locales .....                                                                             | 182 |
| 12.2.3                 | Interactions dynamiques systémiques.....                                                               | 183 |
| 12.2.4                 | Représentations graphiques des interactions dynamiques.....                                            | 184 |
| 12.2.5                 | Calculs de probabilité.....                                                                            | 187 |
| Annexe A (informative) | Récapitulatif des formules .....                                                                       | 188 |
| Annexe B (informative) | Méthodes algébriques booléennes.....                                                                   | 192 |
| B.1                    | Remarques préliminaires .....                                                                          | 192 |
| B.2                    | Notation .....                                                                                         | 192 |
| B.3                    | Analyse des ensembles de fermeture (chemins de succès) et des coupes (chemins de défaillance).....     | 193 |
| B.3.1                  | Notion de coupes et d'ensembles de fermeture .....                                                     | 193 |
| B.3.2                  | Représentation série-parallèle à l'aide d'ensembles de fermeture minimaux et de coupes minimales ..... | 194 |
| B.3.3                  | Identification des coupes minimales et des ensembles de fermeture minimaux.....                        | 195 |
| B.4                    | Principes des calculs.....                                                                             | 196 |
| B.4.1                  | Structures série .....                                                                                 | 196 |
| B.4.2                  | Structures parallèles .....                                                                            | 197 |
| B.4.3                  | Mélange de structures séries et de structures parallèles .....                                         | 198 |
| B.4.4                  | Architectures $m$ sur $n$ (entités identiques).....                                                    | 199 |
| B.5                    | Utilisation de la formule de Sylvester-Poincaré pour des BDF volumineux et des blocs répétés.....      | 200 |
| B.5.1                  | Généralités .....                                                                                      | 200 |
| B.5.2                  | Formule de Sylvester-Poincaré avec ensembles de fermeture.....                                         | 200 |
| B.5.3                  | Formule de Sylvester-Poincaré avec les coupes .....                                                    | 201 |
| B.6                    | Méthodes pour disjoindre des expressions booléennes .....                                              | 203 |
| B.6.1                  | Généralités et contexte .....                                                                          | 203 |
| B.6.2                  | Principe de disjonction .....                                                                          | 204 |
| B.6.3                  | Procédure de disjonction .....                                                                         | 204 |

|                                                                                                       |                                                                                              |     |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| B.6.4                                                                                                 | Exemple d'application de procédure de disjonction .....                                      | 205 |
| B.6.5                                                                                                 | Commentaires.....                                                                            | 207 |
| B.7                                                                                                   | Diagrammes de décision binaires .....                                                        | 207 |
| B.7.1                                                                                                 | Établissement d'un BDD.....                                                                  | 207 |
| B.7.2                                                                                                 | Chemins de succès minimaux et coupes minimales avec les BDD .....                            | 210 |
| B.7.3                                                                                                 | Calculs de probabilité avec des BDD .....                                                    | 212 |
| B.7.4                                                                                                 | Remarques essentielles relatives à l'utilisation des BDD .....                               | 213 |
| Annexe C (informative) Probabilités en fonction du temps et processus markoviens pilotés par BDF..... |                                                                                              | 215 |
| C.1                                                                                                   | Généralités .....                                                                            | 215 |
| C.2                                                                                                   | Principe de calcul des disponibilités en fonction du temps.....                              | 215 |
| C.3                                                                                                   | Blocs non réparés .....                                                                      | 216 |
| C.3.1                                                                                                 | Généralités .....                                                                            | 216 |
| C.3.2                                                                                                 | Blocs non réparés simples .....                                                              | 216 |
| C.3.3                                                                                                 | Bloc composite: exemple sur un système en attente non réparé .....                           | 216 |
| C.4                                                                                                   | Processus markoviens pilotés par BDF .....                                                   | 218 |
| C.5                                                                                                   | Calculs de la disponibilité moyenne et de la disponibilité asymptotique (régime établi)..... | 220 |
| C.6                                                                                                   | Calculs de fréquence.....                                                                    | 221 |
| C.7                                                                                                   | Calculs de fiabilité.....                                                                    | 222 |
| Annexe D (informative) Facteurs d'importance.....                                                     |                                                                                              | 224 |
| D.1                                                                                                   | Généralités .....                                                                            | 224 |
| D.2                                                                                                   | Facteur d'importance de Vesely-Fussell.....                                                  | 224 |
| D.3                                                                                                   | Facteur d'importance de Birnbaum ou facteur d'importance marginal.....                       | 224 |
| D.4                                                                                                   | Facteur d'importance de Lambert ou facteur d'importance critique.....                        | 225 |
| D.5                                                                                                   | Facteur d'importance de diagnostic .....                                                     | 225 |
| D.6                                                                                                   | Facteur d'augmentation de risque.....                                                        | 226 |
| D.7                                                                                                   | Facteur de réduction de risque .....                                                         | 226 |
| D.8                                                                                                   | Facteur d'importance différentiel.....                                                       | 226 |
| D.9                                                                                                   | Remarques relatives aux facteurs d'importance .....                                          | 227 |
| Annexe E (informative) Réseaux de Petri pilotés par BDF .....                                         |                                                                                              | 228 |
| E.1                                                                                                   | Généralités .....                                                                            | 228 |
| E.2                                                                                                   | Exemple de sous-RDP utilisable dans les modèles de RDP piloté par BDF .....                  | 228 |
| E.3                                                                                                   | Évaluation de l'état du BDFD.....                                                            | 231 |
| E.4                                                                                                   | Calculs de disponibilité, de fiabilité, de fréquence et de MTTF.....                         | 233 |
| Annexe F (informative) Exemples numériques et courbes .....                                           |                                                                                              | 234 |
| F.1                                                                                                   | Généralités .....                                                                            | 234 |
| F.2                                                                                                   | Structure de BDF série typique .....                                                         | 234 |
| F.2.1                                                                                                 | Blocs non réparés .....                                                                      | 234 |
| F.2.2                                                                                                 | Blocs réparés.....                                                                           | 235 |
| F.3                                                                                                   | Structure de BDF parallèle typique .....                                                     | 237 |
| F.3.1                                                                                                 | Blocs non réparés .....                                                                      | 237 |
| F.3.2                                                                                                 | Blocs réparés.....                                                                           | 238 |
| F.4                                                                                                   | Structures de BDF complexes .....                                                            | 239 |
| F.4.1                                                                                                 | Structure de BDF non série-parallèle .....                                                   | 239 |
| F.4.2                                                                                                 | Convergence vers des valeurs asymptotiques par rapport au MTTR.....                          | 241 |
| F.4.3                                                                                                 | Système doté de composants périodiquement testés .....                                       | 242 |
| F.5                                                                                                   | Exemple de BDF dynamique.....                                                                | 244 |

|                     |                                                                                            |     |
|---------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| F.5.1               | Comparaison entre résultats analytiques et résultats d'une simulation de Monte Carlo ..... | 244 |
| F.5.2               | Exemple de BDF dynamique .....                                                             | 245 |
| Bibliographie ..... |                                                                                            | 248 |

|                                                                                                                     |     |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Figure 1 – Décomposition de Shannon d'une expression booléenne simple et diagramme de décision binaire obtenu ..... | 137 |
| Figure 2 – Diagramme de fiabilité série .....                                                                       | 145 |
| Figure 3 – Diagramme de fiabilité parallèle .....                                                                   | 146 |
| Figure 4 – Structure parallèle composée de sous-BDF en série dupliqués .....                                        | 146 |
| Figure 5 – Structure série composée de diagrammes de fiabilité parallèles .....                                     | 147 |
| Figure 6 – Diagramme de fiabilité série-parallèle général .....                                                     | 147 |
| Figure 7 – Autre type de diagramme de fiabilité série-parallèle général .....                                       | 147 |
| Figure 8 – Redondance 2 sur 3 .....                                                                                 | 148 |
| Figure 9 – Redondance 3 sur 4 .....                                                                                 | 148 |
| Figure 10 – Diagramme non représenté facilement par une disposition en série/parallèle de blocs .....               | 148 |
| Figure 11 – Exemple de BDF mettant en œuvre des blocs dépendants .....                                              | 149 |
| Figure 12 – Exemple de bloc composite .....                                                                         | 149 |
| Figure 13 – Utilisation de portes de transfert et de sous-BDF .....                                                 | 150 |
| Figure 14 – Analogie entre un bloc et un interrupteur électrique .....                                              | 151 |
| Figure 15 – Analogie avec un circuit électrique .....                                                               | 151 |
| Figure 16 – Exemple de chemin de succès (ensemble de fermeture) minimal .....                                       | 151 |
| Figure 17 – Exemple de chemin de défaillance (coupe) minimal .....                                                  | 152 |
| Figure 18 – BDF équivalents avec chemins de succès minimaux .....                                                   | 153 |
| Figure 19 – BDF équivalents avec coupes minimales .....                                                             | 153 |
| Figure 20 – Lien entre une structure série de base et les calculs de probabilité .....                              | 154 |
| Figure 21 – Lien entre une structure parallèle et les calculs de probabilité .....                                  | 155 |
| Figure 22 – Graphe de Markov de disponibilité pour un bloc réparé simple .....                                      | 159 |
| Figure 23 – Redondance en attente .....                                                                             | 159 |
| Figure 24 – Disponibilité typique d'un bloc périodiquement testé .....                                              | 160 |
| Figure 25 – Exemple de BDF atteignant un régime établi .....                                                        | 162 |
| Figure 26 – Exemple de BDF avec phases récurrentes .....                                                            | 163 |
| Figure 27 – BDF et graphe de Markov équivalent pour les calculs de fiabilité .....                                  | 164 |
| Figure 28 – Présentation du groupement de blocs avant réduction .....                                               | 166 |
| Figure 29 – Diagrammes de fiabilité réduits .....                                                                   | 166 |
| Figure 30 – Représentation de la Figure 10 lorsque l'entité A est défaillante .....                                 | 167 |
| Figure 31 – Représentation de la Figure 10 lorsque l'entité A fonctionne .....                                      | 167 |
| Figure 32 – BDF représentant trois entités redondantes .....                                                        | 168 |
| Figure 33 – Décomposition de Shannon équivalente au Tableau 5 .....                                                 | 172 |
| Figure 34 – Diagramme de décision binaire équivalent au Tableau 5 .....                                             | 173 |
| Figure 35 – BDF utilisant une flèche pour aider à définir le succès du système .....                                | 175 |
| Figure 36 – Autre représentation de la Figure 35 utilisant des blocs répétés et des chemins de succès .....         | 175 |

|                                                                                                            |     |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Figure 37 – Autre représentation de la Figure 35 utilisant les blocs répétés et les coupes minimales ..... | 175 |
| Figure 38 – Décomposition de Shannon liée à la Figure 35 .....                                             | 177 |
| Figure 39 – 2 sur 5 entités non identiques .....                                                           | 177 |
| Figure 40 – Bloc direct et inversé .....                                                                   | 178 |
| Figure 41 – Exemple de circuit électrique avec un interrupteur A .....                                     | 179 |
| Figure 42 – Circuit électrique: chemins de défaillance.....                                                | 179 |
| Figure 43 – Exemple de BDF avec des blocs aux états inversés .....                                         | 180 |
| Figure 44 – BDD équivalent à la Figure 43 .....                                                            | 181 |
| Figure 45 – Symbole pour les éléments externes .....                                                       | 182 |
| Figure 46 – Interaction dynamique entre une DCC et les blocs de BDF .....                                  | 184 |
| Figure 47 – Manières différentes d'indiquer les interactions dynamiques entre les blocs.....               | 184 |
| Figure 48 – Interaction dynamique entre une équipe de réparation unique et les blocs de BDF .....          | 185 |
| Figure 49 – Mise en œuvre d'une porte logique PAND .....                                                   | 185 |
| Figure 50 – Automate à états finis équivalent et exemple de chronogramme pour une porte logique PAND ..... | 186 |
| Figure 51 – Mise en œuvre d'une porte logique SEQ .....                                                    | 186 |
| Figure 52 – Automate d'états finis équivalent et exemple de chronogramme pour une porte logique SEQ .....  | 187 |
| Figure B.1 – Exemples d'ensembles de fermeture minimaux (chemins de succès).....                           | 193 |
| Figure B.2 – Exemples d'ensembles de fermeture non minimaux (chemins de succès non minimaux) .....         | 193 |
| Figure B.3 – Exemples de coupes minimales .....                                                            | 194 |
| Figure B.4 – Exemples de coupes non minimales .....                                                        | 194 |
| Figure B.5 – Exemple de BDF avec ensembles de fermeture et coupes d'ordre différent ....                   | 195 |
| Figure B.6 – Rappel du BDF de la Figure 35.....                                                            | 208 |
| Figure B.7 – Décomposition de Shannon de la fonction booléenne représentée par la Figure B.6 .....         | 208 |
| Figure B.8 – Identification des parties qui n'ont pas d'importance.....                                    | 209 |
| Figure B.9 – Simplification de la décomposition de Shannon .....                                           | 209 |
| Figure B.10 – Diagramme de décision binaire lié au BDF de la Figure B.6.....                               | 210 |
| Figure B.11 – Obtention de chemins de succès (ensembles de fermeture) à partir d'un BDF.....               | 211 |
| Figure B.12 – Obtention de chemins de défaillance (coupes) à partir d'un BDF .....                         | 211 |
| Figure B.13 – Détermination de coupes et d'ensembles de fermeture à partir de BDD .....                    | 212 |
| Figure B.14 – Calculs de probabilité à partir d'un BDD .....                                               | 213 |
| Figure B.15 – Calcul des probabilités conditionnelles à l'aide des BDD .....                               | 213 |
| Figure C.1 – Principe de calcul des disponibilités en fonction du temps.....                               | 215 |
| Figure C.2 – Principe des processus markoviens pilotés par BDF .....                                       | 218 |
| Figure C.3 – Disponibilité typique du BDF avec défaillances rapidement réparées.....                       | 219 |
| Figure C.4 – Exemple de processus markovien multiphase simple .....                                        | 219 |
| Figure C.5 – Disponibilité typique d'un BDF avec défaillances périodiquement testées .....                 | 220 |
| Figure E.1 – Exemple de sous-RDP modélisant un bloc BDFD .....                                             | 228 |
| Figure E.2 – Exemple de sous-RDP modélisant une défaillance de cause commune .....                         | 229 |
| Figure E.3 – Exemple de BDFD reposant sur un RDP piloté par BDF .....                                      | 230 |

|                                                                                                               |     |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Figure E.4 – Calcul logique de structures de BDF classiques .....                                             | 231 |
| Figure E.5 – Exemple de calcul logique pour une porte logique $n/m$ .....                                     | 231 |
| Figure E.6 – Exemple de sous-RDP modélisant une porte logique PAND avec 2 entrées .....                       | 231 |
| Figure E.7 – Exemple d'inhibition de la défaillance d'un bloc .....                                           | 232 |
| Figure E.8 – Sous-RDP pour les calculs de disponibilité, de fiabilité et de fréquence .....                   | 233 |
| Figure F.1 – Disponibilité/fiabilité d'une structure série non réparée typique .....                          | 234 |
| Figure F.2 – Taux de défaillance et fréquence de défaillance liés à la Figure F.1 .....                       | 235 |
| Figure F.3 – Équivalence d'une structure série non réparée avec un bloc unique .....                          | 235 |
| Figure F.4 – Disponibilité/fiabilité d'une structure série réparée typique .....                              | 236 |
| Figure F.5 – Taux de défaillance et fréquence de défaillance liés à la Figure F.4 .....                       | 236 |
| Figure F.6 – Disponibilité/fiabilité d'une structure parallèle non réparée typique .....                      | 237 |
| Figure F.7 – Taux de défaillance et fréquence de défaillance liés à la Figure F.6 .....                       | 238 |
| Figure F.8 – Disponibilité/fiabilité d'une structure parallèle réparée typique .....                          | 238 |
| Figure F.9 – Taux de défaillance de Vesely et fréquence de défaillance liés à la Figure F.8 .....             | 239 |
| Figure F.10 – Exemple 1 du 7.5.2 .....                                                                        | 240 |
| Figure F.11 – Taux de défaillance et fréquence de défaillance liés à la Figure F.10 .....                     | 241 |
| Figure F.12 – Impact du MTTR sur la rapidité de convergence .....                                             | 242 |
| Figure F.13 – Système doté de blocs périodiquement testés .....                                               | 243 |
| Figure F.14 – Taux de défaillance et fréquence de défaillance liés à la Figure F.13 .....                     | 244 |
| Figure F.15 – Résultats analytiques versus résultats d'une simulation de Monte Carlo .....                    | 244 |
| Figure F.16 – Impact de la DCC et du nombre limité d'équipes de réparation .....                              | 245 |
| Figure F.17 – Graphes de Markov modélisant l'impact du nombre d'équipes de réparation .....                   | 246 |
| Figure F.18 – Approximation pour deux blocs redondants .....                                                  | 247 |
| Tableau 1 – Acronymes utilisés dans l'IEC 61078 .....                                                         | 137 |
| Tableau 2 – Symboles utilisés dans l'IEC 61078 .....                                                          | 138 |
| Tableau 3 – Représentation graphique des diagrammes de fiabilité: structures booléennes .....                 | 140 |
| Tableau 4 – Représentation graphique des diagrammes de fiabilité: structures non booléennes/BDFD .....        | 141 |
| Tableau 5 – Application de la table de vérité à l'exemple de la Figure 32 .....                               | 169 |
| Tableau 6 – Tableau de Karnaugh lié à la Figure 10 lorsque A est disponible .....                             | 170 |
| Tableau 7 – Tableau de Karnaugh lié à la Figure 10 lorsque A est indisponible .....                           | 170 |
| Tableau 8 – Tableau de Karnaugh lié à la Figure 35 .....                                                      | 176 |
| Tableau A.1 – Exemple d'équations pour le calcul de la probabilité de succès des configurations de base ..... | 188 |
| Tableau F.1 – Impact des dépendances fonctionnelles .....                                                     | 246 |

## COMMISSION ÉLECTROTECHNIQUE INTERNATIONALE

### DIAGRAMMES DE FIABILITÉ

#### AVANT-PROPOS

- 1) La Commission Electrotechnique Internationale (IEC) est une organisation mondiale de normalisation composée de l'ensemble des comités électrotechniques nationaux (Comités nationaux de l'IEC). L'IEC a pour objet de favoriser la coopération internationale pour toutes les questions de normalisation dans les domaines de l'électricité et de l'électronique. A cet effet, l'IEC – entre autres activités – publie des Normes internationales, des Spécifications techniques, des Rapports techniques, des Spécifications accessibles au public (PAS) et des Guides (ci-après dénommés "Publication(s) de l'IEC"). Leur élaboration est confiée à des comités d'études, aux travaux desquels tout Comité national intéressé par le sujet traité peut participer. Les organisations internationales, gouvernementales et non gouvernementales, en liaison avec l'IEC, participent également aux travaux. L'IEC collabore étroitement avec l'Organisation Internationale de Normalisation (ISO), selon des conditions fixées par accord entre les deux organisations.
- 2) Les décisions ou accords officiels de l'IEC concernant les questions techniques représentent, dans la mesure du possible, un accord international sur les sujets étudiés, étant donné que les Comités nationaux de l'IEC intéressés sont représentés dans chaque comité d'études.
- 3) Les Publications de l'IEC se présentent sous la forme de recommandations internationales et sont agréées comme telles par les Comités nationaux de l'IEC. Tous les efforts raisonnables sont entrepris afin que l'IEC s'assure de l'exactitude du contenu technique de ses publications; l'IEC ne peut pas être tenue responsable de l'éventuelle mauvaise utilisation ou interprétation qui en est faite par un quelconque utilisateur final.
- 4) Dans le but d'encourager l'uniformité internationale, les Comités nationaux de l'IEC s'engagent, dans toute la mesure possible, à appliquer de façon transparente les Publications de l'IEC dans leurs publications nationales et régionales. Toutes divergences entre toutes Publications de l'IEC et toutes publications nationales ou régionales correspondantes doivent être indiquées en termes clairs dans ces dernières.
- 5) L'IEC elle-même ne fournit aucune attestation de conformité. Des organismes de certification indépendants fournissent des services d'évaluation de conformité et, dans certains secteurs, accèdent aux marques de conformité de l'IEC. L'IEC n'est responsable d'aucun des services effectués par les organismes de certification indépendants.
- 6) Tous les utilisateurs doivent s'assurer qu'ils sont en possession de la dernière édition de cette publication.
- 7) Aucune responsabilité ne doit être imputée à l'IEC, à ses administrateurs, employés, auxiliaires ou mandataires, y compris ses experts particuliers et les membres de ses comités d'études et des Comités nationaux de l'IEC, pour tout préjudice causé en cas de dommages corporels et matériels, ou de tout autre dommage de quelque nature que ce soit, directe ou indirecte, ou pour supporter les coûts (y compris les frais de justice) et les dépenses découlant de la publication ou de l'utilisation de cette Publication de l'IEC ou de toute autre Publication de l'IEC, ou au crédit qui lui est accordé.
- 8) L'attention est attirée sur les références normatives citées dans cette publication. L'utilisation de publications référencées est obligatoire pour une application correcte de la présente publication.
- 9) L'attention est attirée sur le fait que certains des éléments de la présente Publication de l'IEC peuvent faire l'objet de droits de brevet. L'IEC ne saurait être tenue pour responsable de ne pas avoir identifié de tels droits de brevets et de ne pas avoir signalé leur existence.

La Norme internationale IEC 61078 a été établie par le comité d'études 56: Sûreté de fonctionnement.

Cette troisième édition annule et remplace la deuxième édition publiée en 2006. Cette édition constitue une révision technique.

Cette édition inclut les modifications techniques majeures suivantes par rapport à l'édition précédente:

- a) la structure du document a été entièrement remaniée, le titre modifié et le contenu étendu et amélioré afin de fournir de plus amples informations sur les calculs de disponibilité, de fiabilité et de fréquence de défaillance;
- b) l'Article 3 a été étendu et des articles ont été introduits pour décrire l'analogie électrique, les BDF "non cohérents" et les BDF "dynamiques";
- c) l'Annexe B relative aux méthodes algébriques booléennes a été étendue;

- d) l'Annexe C (Calculs des probabilités en fonction du temps), l'Annexe D (Facteurs d'importance), l'Annexe E (Modèles de réseau de Petri piloté par BDF) et l'Annexe F (Exemples numériques et courbes) ont été introduites.

Le texte de cette norme est issu des documents suivants:

| FDIS         | Rapport de vote |
|--------------|-----------------|
| 56/1685/FDIS | 56/1694/RVD     |

Le rapport de vote indiqué dans le tableau ci-dessus donne toute information sur le vote ayant abouti à l'approbation de cette norme.

Cette publication a été rédigée selon les Directives ISO/IEC, Partie 2.

Le comité a décidé que le contenu de cette publication ne sera pas modifié avant la date de stabilité indiquée sur le site web de l'IEC sous "<http://webstore.iec.ch>" dans les données relatives à la publication recherchée. A cette date, la publication sera

- reconduite,
- supprimée,
- remplacée par une édition révisée, ou
- amendée.

IECNORM.COM : Click to view the full PDF of IEC 61078:2016

## INTRODUCTION

Un diagramme de fiabilité (BDF) est une représentation graphique du bon fonctionnement d'un système. Il montre la connexion logique des composants (en bon état de fonctionnement) (représentés par des blocs) nécessaires au bon fonctionnement du système (ci-après appelé "état de succès du système"). Par conséquent, un BDF équivaut à une équation logique de variables booléennes, et les calculs de probabilité sont essentiellement liés à des valeurs constantes des probabilités de succès/de défaillance des blocs.

De nombreuses méthodes analytiques de sûreté de fonctionnement sont disponibles, le diagramme de fiabilité (BDF) étant l'une d'entre elles. Avant d'utiliser le BDF, il convient que l'analyste examine l'objet de chaque méthode et leur pertinence individuelle ou combinée dans l'évaluation de la disponibilité, de la fiabilité et de la fréquence de défaillance et d'autres mesures de sûreté de fonctionnement pouvant être applicables à un système ou à un composant donné. Il convient que les résultats atteignables avec chaque méthode soient pris en considération, ainsi que les données exigées pour réaliser l'analyse, la complexité de celle-ci, et les autres facteurs identifiés dans la présente norme.

À condition que les blocs du BDF se comportent de manière indépendante les uns des autres et que l'ordre d'occurrence des défaillances n'ait pas d'importance, les calculs de probabilité peuvent être étendus à des calculs de probabilité en fonction du temps impliquant les blocs non réparés et réparés (c'est-à-dire que les blocs représentent des composants non réparés ou réparés). Dans ce cas, trois mesures de sûreté de fonctionnement associées au bon fonctionnement du système doivent être prises en considération: la fiabilité elle-même,  $R_S(t)$ , mais aussi la disponibilité,  $A_S(t)$  et la fréquence de défaillance,  $w_S(t)$ . Tandis que pour des systèmes impliquant des composants réparés, les calculs de  $A_S(t)$  ou  $w_S(t)$  peuvent être effectués de manière simple et directe, le calcul de  $R_S(t)$  implique des dépendances systémiques (voir définition 3.34) qui ne peuvent être prises en compte dans le cadre mathématique des BDF. Néanmoins, dans des cas particuliers, des approximations de  $R_S(t)$  sont disponibles.

La technique BDF est liée à l'analyse par arbre de panne, aussi dénommée arbre de défaillance[1]<sup>1</sup> et aux techniques de Markov [2]:

- Le principe mathématique sous-jacent est le même pour les BDF et l'analyse par arbre de panne (AAP): alors qu'un BDF est axé sur le succès du système, l'AP est axé sur la défaillance du système. Un BDF peut toujours être traduit en AP, et inversement. D'un point de vue mathématique, les modèles BDF et AP partagent des expressions logiques duales. Par conséquent, les développements mathématiques et les limitations sont similaires dans les deux cas.
- Lorsque la disponibilité  $A_i(t)$  d'un bloc peut être calculée à l'aide d'un processus markovien individuel [2] indépendant des autres blocs, cette disponibilité,  $A_i(t)$ , peut être utilisée comme entrée pour les calculs associés à un BDF comprenant ce bloc. Cette approche selon laquelle un BDF fournit la structure logique et les valeurs numériques des processus markoviens les disponibilités des blocs est appelée "processus markoviens pilotés par BDF".

Pour les systèmes pour lesquels l'ordre des défaillances doit être pris en compte, ou si les blocs réparés ne se comportent pas indépendamment les uns des autres, ou si la fiabilité du système,  $R_S(t)$ , ne peut être calculée par des méthodes analytiques, la simulation de Monte Carlo ou d'autres techniques de modélisation comme les BDF dynamiques, les techniques de Markov [2] ou les réseaux de Petri [3], peuvent être plus adaptées.

<sup>1</sup> Les chiffres indiqués entre crochets font référence à la Bibliographie.

## DIAGRAMMES DE FIABILITÉ

### 1 Domaine d'application

La présente Norme internationale décrit:

- les exigences à appliquer lors de l'utilisation de diagrammes de fiabilité (BDF) dans le cadre d'analyses de sûreté de fonctionnement;
- les procédures de modélisation de la sûreté de fonctionnement d'un système avec des diagrammes de fiabilité;
- comment utiliser les BDF pour procéder à des analyses qualitatives et quantitatives;
- les procédures d'utilisation du modèle BDF pour calculer les mesures de disponibilité, de fréquence de défaillance et de fiabilité pour différents types de systèmes avec des probabilités constantes (ou dépendant du temps) de succès/défaillance de blocs, et ceci pour des blocs non réparés ou des blocs réparés;
- certains aspects et limitations théoriques liés aux calculs des mesures de disponibilité, de fréquence de défaillance et de fiabilité;
- les relations avec l'analyse par arbre de panne (voir IEC 61025 [1]) et les techniques de Markov (voir IEC 61165 [2]).

### 2 Références normatives

Les documents suivants sont cités en référence de manière normative, en intégralité ou en partie, dans le présent document et sont indispensables pour son application. Pour les références datées, seule l'édition citée s'applique. Pour les références non datées, la dernière édition du document de référence s'applique (y compris les éventuels amendements).

IEC 60050-192, *Vocabulaire électrotechnique international – Partie 192: Sûreté de fonctionnement* (disponible sur <http://www.electropedia.org>)

IEC 61703, *Expressions mathématiques pour les termes de fiabilité, de disponibilité, de maintenabilité et de logistique de maintenance*

### 3 Termes et définitions

Pour les besoins du présent document, les termes et définitions donnés dans l'IEC 60050-192 ainsi que les suivants s'appliquent.

NOTE Certains termes ont été tirés de l'IEC 60050-192 et modifiés pour les besoins de la présente norme.

#### 3.1

##### **diagramme de fiabilité**

##### **bloc-diagramme de fiabilité**

##### **BDF**

représentation graphique logique d'un système montrant dans quelle mesure les états de bon fonctionnement de ses sous-entités (représentées par des blocs) et leurs combinaisons affectent l'état de bon fonctionnement du système

Note 1 à l'article: La technique du BDF a été créée il y a longtemps lorsque le terme "fiabilité" était utilisé comme terme générique pour désigner un "bon fonctionnement". Ce terme générique est désormais remplacé par "sûreté de fonctionnement". Il est cependant toujours utilisé dans la langue vernaculaire et dans des termes tels que "ingénierie de fiabilité", études de fiabilité ou "diagramme de fiabilité". Par conséquent, le terme "fiabilité" utilisé

dans le BDF ne signifie pas que cette technique permet de calculer la fiabilité d'un système complexe de manière simple et directe à partir des fiabilités des blocs qui le composent (voir 10.3.1.4).

Note 2 à l'article: Un BDF est un graphe orienté acyclique (c'est-à-dire un graphe sans boucle) représentant les liens logiques entre l'état opérationnel d'un système et l'état opérationnel des blocs qui le composent. L'architecture logique est essentiellement représentée par des structures séries et parallèles conventionnelles (voir l'Article 4 et l'Article 7).

Note 3 à l'article: Les BDF peuvent être étendus de manière à représenter des systèmes multiétats (c'est-à-dire à plus de deux états), mais ces extensions ne peuvent pas être traitées dans le cadre booléen.

[SOURCE: IEC 60050-192:2015, 192-11-03, modifiée – Synonyme, acronyme et Notes ajoutés]

### 3.2

#### **modèle booléen**

modèle mathématique dans lequel l'état d'un système est représenté par une fonction logique de variables booléennes représentant l'état de ses composants

Note 1 à l'article: Une variable booléenne  $a$  comporte uniquement deux valeurs, une fonction logique de plusieurs variables booléennes n'en comporte que deux également. Ces deux valeurs peuvent être, par exemple, {0, 1}, {disponible, indisponible}, {vrai, faux}, {succès, défaillance}, etc. Les principes mathématiques sous-jacents des fonctions logiques sont ceux de l'algèbre de Boole.

### 3.3

#### **processus markovien piloté par BDF**

processus markovien modélisé par un BDF composé de blocs modélisés par des sous-modèles de Markov individuels qui se comportent indépendamment les uns des autres

Note 1 à l'article: La logique sous-jacente d'un BDF permet de combiner les disponibilités individuelles des blocs de manière à obtenir la disponibilité du système. Lorsque les blocs sont modélisés par de petits processus markoviens individuels (avec moins de 10 états, par exemple), le BDF équivaut au processus markovien lié au système et il peut englober des millions d'états. Il s'agit de la base de la plupart des calculs de probabilité réalisés avec les diagrammes de fiabilité. Un tel processus markovien reposant sur l'utilisation du BDF est appelé "processus markovien piloté par BDF".

Note 2 à l'article: Le processus markovien indépendant est développé en [2].

### 3.4

#### **BDF dynamique**

##### **BDFD**

diagramme de fiabilité dans lequel l'hypothèse d'indépendance entre les blocs n'est pas satisfaite

Note 1 à l'article: Les blocs d'un BDFD peuvent avoir des interactions avec des éléments externes au BDF lui-même.

### 3.5

#### **BDF non cohérent**

diagramme de fiabilité modélisant une fonction logique non monotone

Note 1 à l'article: Un BDF non cohérent est un BDF dont les blocs peuvent apparaître à la fois dans des états directs et inversés (voir le Tableau 3). Dans ce cas, certains chemins de succès minimaux (voir la définition 3.15) peuvent comporter des blocs dans l'état d'indisponibilité et certains chemins de défaillance minimaux et des blocs dans l'état de disponibilité. Les concepts d'ensemble de fermeture minimal et de coupe minimale ne sont plus valides et doivent être remplacés par le concept d'implicants premiers.

Note 2 à l'article: Dans un BDF non cohérent, un chemin de succès minimal peut devenir un chemin de défaillance suite à la réparation d'un bloc indisponible, et un chemin de défaillance minimal peut devenir un chemin de succès suite à la défaillance d'un bloc disponible. C'est la raison pour laquelle ils sont dits "non cohérents".

### 3.6

#### **entité**

sujet que l'on considère

Note 1 à l'article: Dans la présente Norme internationale, le terme "entité" couvre essentiellement le système modélisé par le BDF et les "blocs" du BDF.

[SOURCE: IEC 60050-192:2015, 192-01-01, modifiée – Les notes à l'article ont été supprimées, Note 1 à l'article ajoutée]

### 3.7

#### **bloc**

élément de base utilisé pour construire un BDF

Note 1 à l'article: Un bloc n'a que deux états (disponible et indisponible) et peut représenter une entité avec deux états (des composants, des fonctions, des sous-systèmes, par exemple) réparés ou non réparés. Par analogie, et pour simplifier l'énoncé, un bloc réparé/non réparé représente une entité réparée/non réparée, la défaillance/réparation d'un bloc représente la défaillance/réparation de l'entité modélisée et l'état de disponibilité/indisponibilité d'un bloc représente l'état de disponibilité/indisponibilité de l'entité modélisée.

Note 2 à l'article: Le nombre d'états peut être supérieur à deux, de manière à représenter des systèmes multiétats (c'est-à-dire à plus de deux états), mais ces extensions ne peuvent pas être traitées dans le cadre booléen.

Note 3 à l'article: Pour les besoins de la présente norme, les blocs sont divisés en "blocs élémentaires" (plus simplement, "blocs") et en "blocs composites" contenant plusieurs "blocs élémentaires". Cela est présenté au Tableau 3.

### 3.8

#### **bloc répété**

bloc apparaissant plusieurs fois dans un diagramme de fiabilité

Note 1 à l'article: Les blocs répétés représentent les mêmes entités physiques. Il convient de ne pas les confondre avec les blocs dupliqués, qui représentent différentes entités physiques similaires utilisées pour mettre en œuvre de la redondance.

Note 2 à l'article: Les blocs répétés peuvent apparaître à l'état direct ou inversé (le bloc apparaissant dans l'état disponible dans une partie du BDF et dans l'état indisponible dans une autre partie, et inversement). Ils sont très utiles pour représenter les diagrammes de fiabilité liés à un système complexe ou pour représenter des diagrammes de fiabilité sous la forme de chemins de succès ou de défaillance (voir 8.2).

### 3.9

#### **état de disponibilité**

#### **état disponible**

#### **état de bon fonctionnement**

#### **état de succès**

état caractérisé par l'aptitude à fonctionner tel que requis

Note 1 à l'article: L'absence de ressources externes nécessaires peut empêcher le fonctionnement, mais n'a aucun impact sur l'état de disponibilité.

Note 2 à l'article: L'état de disponibilité est lié à la disponibilité de l'entité.

Note 3 à l'article: Une entité peut être considérée comme étant en état de disponibilité pour certaines fonctions et en même temps en état d'indisponibilité pour d'autres fonctions.

Note 4 à l'article: L'adjectif "disponible" qualifie une entité dans un état de disponibilité.

Note 5 à l'article: Dans le contexte des diagrammes de fiabilité, l'état d'un bloc est identique à l'état du composant modélisé par ce bloc. Par conséquent, un bloc dans un état de disponibilité fait référence à un composant dans un état de disponibilité. Le même concept s'applique au BDF et au système correspondant.

Note 6 à l'article: Au sein d'un BDF et par analogie avec un circuit électrique, un bloc disponible peut être considéré comme un interrupteur virtuel en position fermée et un bloc indisponible comme un interrupteur virtuel en position ouverte.

[SOURCE: IEC 60050-192:2015, 192-02-01, modifiée – les synonymes, la Note 5 à l'article et la Note 6 à l'article ont été ajoutés]

### 3.10

#### **temps de disponibilité**

intervalle de temps pendant lequel une entité est dans un état de disponibilité

[SOURCE: IEC 60050-192:2015, 192-02-02]

### 3.11

#### **temps moyen de disponibilité**

##### **TMD**

espérance mathématique de la durée du temps de disponibilité

[SOURCE: IEC 60050-192:2015, 192-08-09]

### 3.12

#### **état d'indisponibilité**

##### **état indisponible**

##### **état de panne**

##### **état de défaillance**

état ne permettant pas de fonctionner tel que requis par suite d'une panne interne ou de la maintenance préventive

Note 1 à l'article: L'état d'indisponibilité est lié à l'indisponibilité de l'entité.

Note 2 à l'article: L'adjectif "indisponible" qualifie une entité dans un état d'indisponibilité.

Note 3 à l'article: Dans le contexte des diagrammes de fiabilité, l'état d'un bloc (respectivement un diagramme de fiabilité) est assimilé à l'état du composant (respectivement le système) modélisé par ce bloc (respectivement ce BDF). Par conséquent, un bloc (respectivement un BDF) dans un état d'indisponibilité fait référence à un composant (respectivement un système) dans un état d'indisponibilité.

Note 4 à l'article: Dans un diagramme de fiabilité, un bloc indisponible peut être interprété comme étant un interrupteur électrique ouvert.

[SOURCE: IEC 60050-192:2015, 192-02-20, modifiée – les synonymes et les Notes 3 et 4 à l'article ont été ajoutés]

### 3.13

#### **temps d'indisponibilité**

intervalle de temps pendant lequel une entité est dans un état d'indisponibilité

[SOURCE: IEC 60050-192:2015, 192-02-21, modifiée – la figure et la Note 1 à l'article ont été supprimées]

### 3.14

#### **temps moyen d'indisponibilité**

##### **TMI**

espérance mathématique de la durée du temps d'indisponibilité

[SOURCE: IEC 60050-192:2015, 192-08-10]

### 3.15

#### **chemin de succès**

##### **ensemble de fermeture**

ensemble de blocs, chaque bloc de l'ensemble étant disponible, le BDF étant donc dans un état de disponibilité

Note 1 à l'article: Le terme d'ensemble de fermeture est donné par analogie à un circuit électrique: les blocs disponibles constituent un circuit fermé entre l'entrée du BDF et la sortie du BDF.

### 3.16

#### **ensemble de fermeture minimal**

ensemble de fermeture tel que la défaillance de l'un quelconque des blocs disponibles de cet ensemble entraîne la défaillance du BDF

Note 1 à l'article: Dans un ensemble de fermeture minimal, chaque bloc disponible est nécessaire au maintien du BDF disponible.

Note 2 à l'article: L'ordre d'un ensemble de fermeture minimal est donné par le nombre de blocs de l'ensemble disponible: l'ordre 1 comprend 1 bloc disponible, l'ordre 2 comprend 2 blocs disponibles, etc.

### 3.17

#### **chemin de défaillance coupe**

#### **ensemble de coupure**

ensemble de blocs dans des états d'indisponibilité tel que l'ensemble du BDF est également dans un état d'indisponibilité

Note 1 à l'article: Le terme de coupe est donné par analogie à un circuit électrique: les blocs indisponibles constituent un circuit ouvert (coupé) entre l'entrée du BDF et la sortie du BDF.

### 3.18

#### **coupe minimale**

#### **ensemble de coupure minimal**

coupe telle que le rétablissement de l'un des blocs indisponibles rétablit également le BDF à l'état de disponibilité

Note 1 à l'article: Dans une coupe minimale, chaque bloc indisponible est nécessaire au maintien de l'état d'indisponibilité du BDF

Note 2 à l'article: L'ordre d'une coupe minimale est donné par le nombre de blocs indisponibles de l'ensemble: l'ordre 1 comprend 1 bloc indisponible, l'ordre 2 comprend 2 blocs indisponibles, etc.

### 3.19

#### **ensemble disjoint d'éléments**

ensemble d'éléments booléens dont les intersections sont vides

EXEMPLE Si  $(C_i^d)$  est un ensemble de coupes disjointes, alors  $C_i^d \cap C_j^d = \emptyset \quad \forall i \neq j$  et par conséquent, la probabilité  $P(C_i^d \cap C_j^d) = 0 \quad \forall i \neq j$ .

Note 1 à l'article: Le terme "élément" est pris ici dans le sens général utilisé dans la théorie des ensembles, c'est-à-dire qu'il s'agit d'un membre d'une collection donnée d'objets.

Note 2 à l'article: Les éléments disjoints sont incompatibles: si la valeur de l'un est "vrai", la valeur de l'autre est "faux", et inversement. Cela décrit une exclusion mutuelle et, par conséquent, une dépendance complète entre les éléments.

### 3.20

#### **disponibilité**

<d'une entité> aptitude à être en état de disponibilité

[SOURCE: IEC 60050-192:2015, 192-01-23, modifiée – les notes ont été supprimées]

### 3.21

$A(t)$

#### **disponibilité instantanée**

#### **disponibilité ponctuelle**

<mesure> probabilité d'être en état de disponibilité à un instant donné

[SOURCE: IEC 60050-192:2015, 192-08-01, modifiée]

### 3.22

$U(t)$

#### **indisponibilité instantanée**

#### **indisponibilité ponctuelle**

<mesure> probabilité d'être en état d'indisponibilité à un instant donné

[SOURCE: IEC 60050-192:2015, 192-08-04, modifiée]

### 3.23

$A^{avg}(t_1, t_2)$

**disponibilité moyenne**

**disponibilité moyenne**

<mesure> moyenne de la disponibilité instantanée sur un intervalle de temps donné  $[t_1, t_2]$

[SOURCE: IEC 60050-192:2015, 192-08-05, modifiée – la Note 1 à l'article a été supprimée]

### 3.24

$U^{avg}(t_1, t_2)$

**indisponibilité moyenne**

**indisponibilité moyenne**

<mesure> moyenne de l'indisponibilité instantanée sur un intervalle de temps donné  $[t_1, t_2]$

Note 1 à l'article: L'indisponibilité moyenne d'un système instrumenté de sécurité (voir l'IEC 61508 [5]) est également appelée "probabilité moyenne de défaillance à la demande" (Acronyme:  $PFD_{avg}$ ).

[SOURCE: IEC 60050-192:2015, 192-08-06, modifiée – la Note 1 à l'article a été supprimée]

### 3.25

$A^{st}$

$A^{as}$

**disponibilité en régime établi**

**disponibilité asymptotique**

limite, si elle existe, de la disponibilité instantanée lorsque le temps tend vers l'infini

Note 1 à l'article: Dans certaines conditions, la disponibilité en régime établi peut être exprimée comme le quotient  $TMD/(TMD+TMI)$ . Voir l'IEC 61703.

[SOURCE: IEC 60050-192:2015, 192-08-07, modifiée – Note 1 à l'article modifiée]

### 3.26

**fiabilité**

<d'une entité> aptitude à fonctionner tel que requis sans défaillance, pendant un intervalle de temps donné et dans des conditions données

[SOURCE: IEC 60050-192:2015, 192-01-24, modifiée – les Notes à l'article ont été supprimées]

### 3.27

$R(t_1, t_2)$

$R(t)$

**fiabilité**

<mesure> probabilité de fonctionnement tel que requis pendant un intervalle de temps  $[t_1, t_2]$ , dans des conditions données

Note 1 à l'article: La fiabilité  $R(t)$  est la fiabilité pendant l'intervalle de temps  $[0, t]$ .

[SOURCE: IEC 60050-192:2015, 192-01-24, modifiée – les Notes à l'article ont été remplacées par la nouvelle Note 1 à l'article]

### 3.28

$F(t_1, t_2)$

$F(t)$

**défiabilité**

<mesure> probabilité de ne pas fonctionner tel que requis pendant un intervalle de temps  $[t_1, t_2]$ , dans des conditions données

Note 1 à l'article: La défiabilité  $F(t)$  est la défiabilité pendant l'intervalle de temps  $[0, t]$ .

Note 2 à l'article: La défiabilité est le complément à 1 de la fiabilité:  $F(t)=1-R(t)$ .

### 3.29

$\lambda(t)$

#### taux instantané de défaillance

#### taux de défaillance

limite, si elle existe, du quotient de la probabilité conditionnelle pour qu'une entité tombe en panne dans l'intervalle de temps  $[t, t + \Delta t]$ , et  $\Delta t$ , lorsque  $\Delta t$  tend vers zéro, sachant qu'elle est restée en bon état de fonctionnement dans l'intervalle de temps  $[0, t]$

Note 1 à l'article: La définition a été adaptée à partir de l'IEC 60050-192 pour couvrir également les entités réparables:

- si l'entité ne présente aucune redondance interne intégrée, le taux de défaillance est identique à ce qu'il serait si elle n'était pas réparable;
- si l'entité présente une redondance interne intégrée, elle peut rester disponible en cas de défaillance de certaines parties redondantes. Par conséquent, ces défaillances sont réparables tant que l'ensemble de l'entité ne devient pas indisponible suite à la défaillance d'une autre partie.

Note 2 à l'article: Les termes taux de défaillance (3.29), intensité de défaillance conditionnelle (3.30) intensité de défaillance inconditionnelle (3.31) semblent similaires, mais ils diffèrent en fonction des événements conditionnels utilisés dans leurs définitions. Même si des valeurs numériques proches peuvent être attribuées à ces paramètres dans des cas particuliers, ils se comportent de manière différente et il convient de ne pas les confondre.

[SOURCE: IEC 60050-192:2015, 192-05-06, modifiée – les Notes à l'article ont été remplacées par de nouvelles Notes à l'article]

### 3.30

$\lambda_v(t)$

#### intensité instantanée de défaillance conditionnelle

#### intensité de défaillance conditionnelle

#### taux de défaillance de Vesely

limite, si elle existe, du quotient de la probabilité conditionnelle que la défaillance d'une entité se produise dans l'intervalle de temps  $[t, t + \Delta t]$ , et  $\Delta t$ , lorsque  $\Delta t$  tend vers zéro, sachant que l'entité était disponible aux instants  $t$  et 0

Note 1 à l'article: Voir la Note 2 à l'article de la définition du taux de défaillance (3.29).

### 3.31

$w(t)$

#### intensité instantanée de défaillance inconditionnelle

#### intensité de défaillance inconditionnelle

#### fréquence de défaillance

limite, si elle existe, du quotient de la probabilité conditionnelle que la défaillance d'une entité se produise dans l'intervalle de temps  $[t, t + \Delta t]$ , et  $\Delta t$ , lorsque  $\Delta t$  tend vers zéro, sachant que l'entité était disponible à l'instant 0

Note 1 à l'article: Voir la Note 2 à l'article de la définition du taux de défaillance (3.29).

Note 2 à l'article: Ce paramètre est équivalent à l'intensité de défaillance définie dans l'IEC 60050-192:2015, 192-05-08. Son nom a été modifié pour le distinguer du terme d'intensité de défaillance conditionnelle (3.30).

### 3.32

$w^{avg}(0, T)$

#### fréquence moyenne de défaillance

nombre de défaillances par unité de temps d'une entité, moyenné sur une période de temps donnée  $T$

Note 1 à l'article: Si  $N$  est le nombre de défaillances de l'entité sur  $[0, T]$ , alors la fréquence moyenne de défaillance sur cette période de temps est calculée par  $w^{avg}(0, T) = N/T$ .

Note 2 à l'article: Si  $m$  est la durée moyenne entre les défaillances (voir l'IEC 60050-192) d'une entité, alors le nombre moyen de défaillances se produisant sur  $[0, T]$  est  $N \approx T/m$ . Par conséquent,  $w^{avg}(0, T) = N/T \approx 1/m$ .

Note 3 à l'article: D'un point de vue mathématique,  $w^{avg}(0,T)$  est la moyenne de  $w(t)$  sur  $[0, T]$ . Alors  $w^{avg}(0,T) = \frac{1}{T} \int_0^T w(\tau) d\tau$ .

### 3.33

#### **durée moyenne de fonctionnement avant défaillance**

##### **MTTF**

espérance mathématique du temps de fonctionnement avant défaillance

Note 1 à l'article: Dans le cas des entités non réparables avec une distribution exponentielle des temps de fonctionnement avant défaillance (c'est-à-dire avec un taux de défaillance constant), la durée moyenne de fonctionnement avant défaillance est numériquement égale à l'inverse du taux de défaillance. Cela est également vrai pour les entités réparables si, après rétablissement, elles peuvent être considérées comme aussi bonnes que neuves.

Note 2 à l'article: L'abréviation "MTTF" est dérivée du terme anglais développé correspondant "mean time to failure".

[SOURCE IEC 60050-192, 192-05-11, modifiée – la Note 2 à l'article a été supprimée]

### 3.34

#### **dépendance systémique**

##### **dépendance holistique**

dépendance entre les parties d'un système liées au système pris en considération dans son ensemble

EXEMPLE 1 Une équipe de réparation représente une dépendance systémique entre les entités réparables: en cas de défaillance d'une entité, elle peut être réparée uniquement si l'équipe n'est pas occupée par la réparation d'une autre entité appartenant au système.

EXEMPLE 2 La fiabilité  $R(t)$  d'un système peut être exprimée comme la probabilité que le système soit disponible à l'instant  $t$ , à condition qu'il n'ait jamais été indisponible durant l'intervalle  $[0, t]$ . Par conséquent, seules les séquences d'événements ne donnant pas lieu à l'état d'indisponibilité sur  $[0, t]$  peuvent être retenues et les séquences d'événements comprenant une succession "état disponible" → "état indisponible" → "état disponible" doivent être exclues des calculs. Ceci implique, concernant le calcul de  $R(t)$ , qu'une entité tombant en panne est réparable uniquement si le système reste disponible pendant la réparation de l'entité. Par conséquent, concernant le calcul de  $R(t)$ , les entités sont réparables ou non selon les états des autres blocs et ceci constitue des dépendances systémiques entre tous les blocs du BDF modélisant le système.

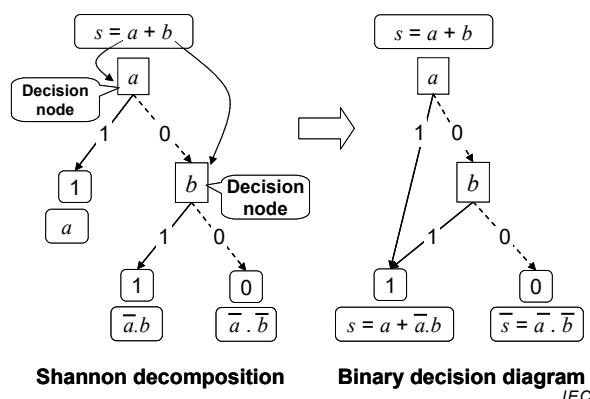
Note 1 à l'article: Une dépendance systémique ne peut pas être décrite comme une propriété locale des entités individuelles du système.

### 3.35

#### **diagramme de décision binaire**

##### **BDD**

arbre de décision compact reposant sur la décomposition de Shannon d'une expression booléenne



| Anglais                 | Français                      |
|-------------------------|-------------------------------|
| Shannon decomposition   | Décomposition de Shannon      |
| Binary decision diagram | Diagramme de décision binaire |
| Decision node           | Nœud de décision              |

**Figure 1 – Décomposition de Shannon d'une expression booléenne simple et diagramme de décision binaire obtenu**

Note 1 à l'article: Figure 1 montre comment l'expression booléenne simple  $s = a + b$  peut être transformée en arbre de décision à l'aide de la décomposition de Shannon, puis comment le diagramme de décision binaire correspondant est obtenu en rassemblant les chemins donnant la même valeur (0 ou 1) de l'expression booléenne.

Note 2 à l'article: D'un point de vue mathématique, les diagrammes de décision binaire sont des graphes orientés acycliques possédant une origine. Il s'agit d'une structure de données exprimant des expressions booléennes comme des unions de termes disjoints. En retour, cela conduit à des calculs de probabilité exacts. Il s'agit de l'état de l'art en matière de calcul de probabilité réalisé sur des modèles booléens. De plus amples informations concernant les BDD peuvent être consultées à la référence [33]

Note 3 à l'article: L'abréviation "BDD" est dérivée du terme anglais développé correspondant "binary decision diagram".

## 4 Symboles et termes abrégés

**Tableau 1 – Acronymes utilisés dans l'IEC 61078**

| Abréviation/Acronyme | Signification                                                                       |
|----------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|
| BDD                  | Binary decision diagram (Diagramme de décision binaire).                            |
| DCC                  | Défaillance de cause commune.                                                       |
| AMDE                 | Analyse des modes de défaillance et de leurs effets.                                |
| AP, AAP              | Arbre de panne, analyse par arbre de panne.                                         |
| MTTF                 | Mean operating time to failure (Durée moyenne de fonctionnement avant défaillance). |
| MTTR                 | Mean time to restoration (Durée moyenne jusqu'à rétablissement).                    |
| BDFD                 | Diagramme de fiabilité dynamique.                                                   |
| PFD <sub>avg</sub>   | Moyenne de la probabilité de défaillance à la demande (indisponibilité moyenne).    |
| PAND                 | Priority AND gate (Porte logique ET prioritaire).                                   |
| RDP                  | Réseau de Petri.                                                                    |
| BDF                  | Bloc-diagramme de fiabilité ou diagramme de fiabilité                               |
| SEQ                  | Sequential gate (Porte logique séquentielle).                                       |

**Tableau 2 – Symboles utilisés dans l'IEC 61078**

| Symbole                                                                   | Signification                                                                                                                     |
|---------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $S$                                                                       | Système modélisé par un BDF.                                                                                                      |
| $X \in (A, B, C, \dots), X \neq S$                                        | Blocs utilisés à l'intérieur d'un BDF. $S$ est réservé pour le système et les autres lettres pour les blocs.                      |
| $s = S$ disponible                                                        | Variable booléenne indiquant que le système $S$ est disponible. Il s'agit également de l'événement "S disponible".                |
| $\bar{s} = S$ indisponible                                                | Variable booléenne indiquant que le système $S$ est indisponible. Il s'agit également de l'événement "S indisponible".            |
| $x = X$ disponible                                                        | Variable booléenne indiquant que le bloc $X$ est disponible. Il s'agit également de l'événement "X disponible".                   |
| $\bar{x} = X$ indisponible                                                | Variable booléenne indiquant que le bloc $X$ est indisponible. Il s'agit également de l'événement "X indisponible".               |
| $(\Pi_i), (C_i)$                                                          | Chemins de succès minimaux (ensembles de fermeture minimaux), chemins de défaillance minimaux (coupes minimales).                 |
| $(\Pi_i^d), (C_i^d)$                                                      | Chemins de succès disjoints (ensembles de fermeture disjoints), chemins de défaillance disjoints (ensembles de coupes disjoints). |
| $P(\cdot)$                                                                | Fonction de probabilité.                                                                                                          |
| $P_s = P(S \text{ disponible})$                                           | Probabilité constante que le système $S$ soit disponible.                                                                         |
| $P_{\bar{s}} = P(S \text{ indisponible})$                                 | Probabilité constante que le système $S$ soit indisponible.                                                                       |
| $P_x = P(X \text{ disponible})$                                           | Probabilité constante que le bloc $X$ soit disponible.                                                                            |
| $P_{\bar{x}} = P(X \text{ indisponible})$                                 | Probabilité constante que le bloc $X$ soit indisponible.                                                                          |
| $P_{s x} = P(S \text{ disponible} \mid X \text{ disponible})$             | Probabilité conditionnelle que le système $S$ soit disponible, étant donné que le bloc $X$ est disponible.                        |
| $P_{s \bar{x}} = P(S \text{ disponible} \mid X \text{ indisponible})$     | Probabilité conditionnelle que le système $S$ soit disponible, étant donné que le bloc $X$ est indisponible.                      |
| $P_s(t)$                                                                  | Probabilités en fonction du temps que le système $S$ soit disponible.                                                             |
| $P_x(t)$                                                                  | Probabilité en fonction du temps que le bloc $X$ soit disponible.                                                                 |
| $P_{\bar{s}}(t)$                                                          | Probabilités en fonction du temps que le système $S$ soit indisponible.                                                           |
| $P_{\bar{x}}(t)$                                                          | Probabilité en fonction du temps que le bloc $X$ soit indisponible.                                                               |
| $P(OK, t)$                                                                | Probabilité d'état OK à l'instant $t$ .                                                                                           |
| $t, t_i$                                                                  | Instant actuel.                                                                                                                   |
| $T, T_i$                                                                  | Durée.                                                                                                                            |
| $[t_1, t_2], [0, T] \equiv [t_1 = 0, t_2 = 0 + T]$                        | Intervalle de temps, $t_1 < t_2$                                                                                                  |
| $A_S(t) = P(S \text{ disponible au temps } t)$                            | Disponibilité du système $S$ à l'instant $t$ .                                                                                    |
| $A_S^{\text{avg}}(t_1, t_2), A_S^{\text{avg}}(0, T), A_S^{\text{avg}}(T)$ | Disponibilité moyenne du système $S$ sur l'intervalle de temps $[t_1, t_2]$ ou $[0, T]$ .                                         |
| $A_S^{\text{avg}}, A_S^{\text{st}}, A_S^{\text{as}}$                      | Disponibilité moyenne du système $S$ sur $[0, \infty]$ , disponibilité en régime établi et disponibilité asymptotique.            |
| $A_X(t) = P(X \text{ disponible au temps } t)$                            | Disponibilité du bloc $X$ à l'instant $t$ .                                                                                       |
| $A_i(t) = A_{X_i}(t) = P(X_i \text{ disponible au temps } t)$             | Disponibilité du bloc $X_i$ à l'instant $t$ .                                                                                     |

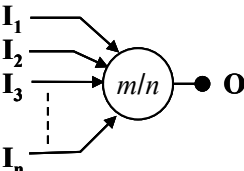
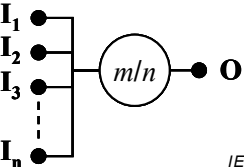
| Symbole                                                                   | Signification                                                                                                                           |
|---------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $A_X^{\text{avg}}(t_1, t_2), A_X^{\text{avg}}(0, T), A_X^{\text{avg}}(T)$ | Disponibilité moyenne du bloc X sur l'intervalle de temps $[t_1, t_2]$ ou $[0, T]$ .                                                    |
| $A_X^{\text{avg}}, A_X^{\text{st}}, A_X^{\text{as}}$                      | Disponibilité moyenne du bloc X sur l'intervalle de temps $[0, \infty]$ , disponibilité en régime établi et disponibilité asymptotique. |
| $U_S(t) = P(\text{S indisponible au temps } t)$                           | Indisponibilité du système global S à l'instant $t$ .                                                                                   |
| $U_S^{\text{avg}}(t_1, t_2), U_S^{\text{avg}}(0, T), U_S^{\text{avg}}(T)$ | Indisponibilité moyenne du système S sur l'intervalle de temps $[t_1, t_2]$ ou $[0, T]$ .                                               |
| $U_S^{\text{avg}}, U_S^{\text{st}}, U_S^{\text{as}}$                      | Indisponibilité moyenne du système S sur $[0, \infty]$ , disponibilité en régime établi et indisponibilité asymptotique.                |
| $U_X(t) = P(\text{X indisponible au temps } t)$                           | Indisponibilité du bloc X à l'instant $t$ .                                                                                             |
| $U_i(t) = U_{X_i}(t) = P(X_i \text{ indisponible au temps } t)$           | Indisponibilité du bloc $X_i$ à l'instant $t$ .                                                                                         |
| $U_X^{\text{avg}}(t_1, t_2), U_X^{\text{avg}}(0, T), U_X^{\text{avg}}(T)$ | Indisponibilité moyenne du bloc X sur l'intervalle de temps $[t_1, t_2]$ ou $[0, T]$ .                                                  |
| $U_X^{\text{avg}}, U_X^{\text{st}}, U_X^{\text{as}}$                      | Indisponibilité moyenne du bloc X sur $[0, \infty]$ , indisponibilité en régime établi et indisponibilité asymptotique.                 |
| $R_S(t) = P(\text{S disponible sans interruption sur } [0, t])$           | Fiabilité du système S sur $[0, t]$ .                                                                                                   |
| $F_S(t) = 1 - R_S(t)$                                                     | Défiabilité du système global S sur $[0, t]$ (distribution de défaillance du système S).                                                |
| $f_S(t)$                                                                  | Fonctions de densité du temps avant défaillance du système S.                                                                           |
| $R_X(t) = P(\text{X disponible sans interruption sur } [0, t])$           | Fiabilité du bloc X sur $[0, t]$ .                                                                                                      |
| $F_X(t) = 1 - R_X(t)$                                                     | Défiabilité du bloc X sur $[0, t]$ (distribution de défaillance du bloc X).                                                             |
| $f_X(t)$                                                                  | Fonctions de densité du temps avant défaillance du bloc X.                                                                              |
| $\Lambda_S, \Lambda_S(t)$                                                 | Taux de défaillance constant et taux de défaillance dépendant du temps du système S.                                                    |
| $\Lambda_{VS}, \Lambda_{VS}(t)$                                           | Intensité de défaillance conditionnelle (taux de défaillance de Vesely) du système global.                                              |
| $w_S(t)$                                                                  | Intensité de défaillance inconditionnelle (fréquences de défaillance) du système S, à l'instant $t$ .                                   |
| $W_S(0, T), W_S(T)$                                                       | Nombre estimé de défaillances du système S sur $[0, T]$ .                                                                               |
| $w_S^{\text{avg}}(0, T), w_S^{\text{avg}}(T)$                             | Intensité de défaillance inconditionnelle moyenne (fréquence de défaillance moyenne) du système S sur $[0, T]$ .                        |
| $\lambda_X, \lambda_X(t)$                                                 | Taux de défaillance constant et taux de défaillance dépendant du temps du bloc X.                                                       |
| $w_X(t)$                                                                  | Intensité de défaillance inconditionnelle (fréquences de défaillance) du bloc X, à l'instant $t$ .                                      |
| $W_X(0, T), W_X(T)$                                                       | Nombre estimé de défaillances du bloc X sur $[0, T]$ .                                                                                  |
| $w_X^{\text{avg}}(0, T), w_X^{\text{avg}}(T)$                             | Intensité de défaillance inconditionnelle moyenne (fréquence de défaillance moyenne) du bloc X sur $[0, T]$ .                           |
| $\lambda_{Xd}$                                                            | Taux de défaillance latent du bloc X.                                                                                                   |
| $\mu_X, \mu_X(t)$                                                         | Taux de réparation constant ou taux de réparation dépendant du temps du bloc X.                                                         |
| $\binom{n}{r}$                                                            | Nombre de manières de sélectionner $r$ blocs dans $n$ blocs sans ordre: $\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$ .                          |

| Symbole         | Signification                                                                                                                                                                                                                                           |
|-----------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| "0", "1"        | Symboles utilisés dans les tables de vérité, le tableau de Karnaugh, la décomposition de Shannon et les diagrammes de décision binaires pour indiquer les états d'indisponibilité (défaillance) et de disponibilité (succès) des blocs ou des systèmes. |
| $\cap, \bullet$ | Opérateurs booléens indiquant la logique ET, par exemple $a \cap b, a \bullet b$ (intersection).                                                                                                                                                        |
| $\cup, +$       | Opérateurs booléens indiquant la logique OU, par exemple $a \cup b, a + b$ (union).                                                                                                                                                                     |
| $\Phi, \Omega$  | Événement "impossible" et événement "certain".                                                                                                                                                                                                          |

L'utilisation des symboles présentés au Tableau 3 est recommandée lors de l'élaboration d'un diagramme de fiabilité (BDF).

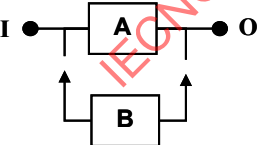
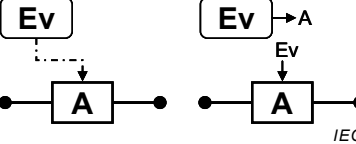
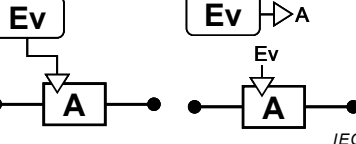
**Tableau 3 – Représentation graphique des diagrammes de fiabilité: structures booléennes**

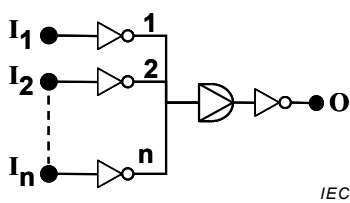
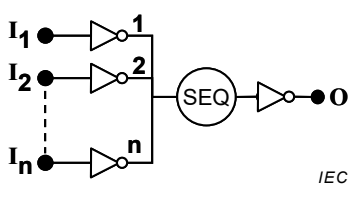
| Représentation graphique                | Signification                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |
|-----------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p><b>I</b></p> <p><b>O</b><br/>IEC</p> | <p>Indique une entrée.</p> <p>Indique une sortie.</p> <p>Ces indications sont utilisées pour des raisons pratiques. Elles ne sont pas obligatoires, mais peuvent être utiles lorsque les connexions ont une signification directionnelle.</p>                                                                                                   |
|                                         | <p>Un BDF est un graphe orienté. Chaque lien est orienté de l'entrée vers la sortie (c'est-à-dire de gauche à droite). Le cas échéant, des flèches peuvent être ajoutées pour éviter toute confusion.</p>                                                                                                                                       |
|                                         | <p>Bloc (élémentaire): groupe d'équipements, de composants, d'unités ou d'autres éléments du système.</p>                                                                                                                                                                                                                                       |
|                                         | <p>Structure série: le système est disponible si A et B sont disponibles.</p> <p>Cela représente les fonctions logiques <math>s = a \cap b</math>. Du point de vue de la défaillance, cela équivaut à <math>\bar{s} = \bar{a} \cup \bar{b}</math></p>                                                                                           |
|                                         | <p>Structure parallèle (redondance active complète): le système est disponible si A ou B sont disponibles.</p> <p>Cela représente les fonctions logiques <math>s = a \cup b</math>. Du point de vue de la défaillance, cela équivaut à <math>\bar{s} = \bar{a} \cap \bar{b}</math></p>                                                          |
|                                         | <p>Porte logique NON: la sortie de la porte logique est égale à 0 lorsque son entrée est égale à 1, et inversement.</p>                                                                                                                                                                                                                         |
|                                         | <p>Portes de transfert: la sortie <math>i</math> est liée à/aux entrée(s) portant le même nom. Cela est utile pour:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>diviser les diagrammes de fiabilité volumineux en plusieurs parties plus petites (sous-BDF);</li> <li>transférer la sortie d'un endroit vers un autre endroit du BDF.</li> </ul> |
|                                         | <p>Bloc composite: groupe de blocs élémentaires. Cela peut être utile pour simplifier le schéma du BDF, pour indiquer les parties nécessitant un développement approfondi ou pour rassembler des blocs individuels non indépendants dans une structure indépendante du reste du BDF.</p>                                                        |

| Représentation graphique                                                                                                                                                                                                               | Signification                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|  <b>Direct state</b><br> <b>Inverted state</b><br><small>IEC</small> | <p>Blocs répétés: le même bloc représentant une entité donnée apparaît en plusieurs endroits du BDF, soit à l'état direct soit à l'état inversé, c'est-à-dire que lorsque le bloc A à l'état direct est "disponible", le bloc à l'état inversé est "indisponible", et inversement.</p> <p>Ces symboles sont utilisés pour les diagrammes de fiabilité non cohérents.</p>                                                                                                                                                                                                                                                              |
|  <small>IEC</small>                                                                                                                                   | <p>Élément externe interagissant avec au moins un bloc du BDF.</p> <p>Ce symbole est utilisé pour les diagrammes de fiabilité dynamiques.</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |
| <br> <small>IEC</small>                                              | <p>Logique de vote majoritaire de succès (symbole <math>m/n</math>): au moins <math>m</math> blocs sur <math>n</math> sont nécessaires pour que le système soit disponible dans une configuration redondante active.</p> <p>NOTE Il est important de distinguer les logiques de vote majoritaire "de succès" mises en œuvre dans les BDF des logiques de vote majoritaire "de défaillance" mises en œuvre dans les arbres de panne. En règle générale, le contexte (BDF ou arbre de panne) est suffisant pour faire la distinction. La relation est la suivante: <math>(m/n)_{\text{Suc}} \equiv ([n-m+1]/n)_{\text{Déf}}</math>.</p> |

| Anglais               | Français                   |
|-----------------------|----------------------------|
| Arrow direction       | Direction de la flèche     |
| From input            | De l'entrée                |
| Toward output         | Vers la sortie             |
| Transfer: output gate | Transfert: porte de sortie |
| Transfer: input gate  | Transfert: porte d'entrée  |
| Direct state          | Etat direct                |
| Inverted state        | Etat inversé               |

**Tableau 4 – Représentation graphique des diagrammes de fiabilité: structures non booléennes/BDFD**

| Représentation graphique                                                                               | Signification                                                                                                                                                                                                                                                                                   |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|  <small>IEC</small> | <p>Redondance en attente: B prend en charge la fonction de A en cas de défaillance de A.</p>                                                                                                                                                                                                    |
|  <small>IEC</small> | <p>Dépendances fonctionnelles: l'état de A dépend de l'événement Ev. Il peut s'agir d'un événement externe ou interne au BDF. Ce symbole rappelle qu'il existe une dépendance, mais que le type de dépendance peut être divers et doit être décrit ailleurs.</p>                                |
|  <small>IEC</small> | <p>Dépendance fonctionnelle complète: lorsque l'événement Ev se produit, le bloc A devient indisponible. Il peut s'agir d'un événement externe ou interne au BDF. Il joue le rôle de déclencheur utilisé dans des structures similaires mises en œuvre dans des arbres de panne dynamiques.</p> |

| Représentation graphique                                                          | Signification                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |
|-----------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|  | <p>Porte logique PAND: la sortie devient indisponible lorsque les entrées deviennent indisponibles dans l'ordre <math>I_1</math>, puis <math>I_2</math>, puis <math>I_3</math>, ... puis <math>I_n</math>. Les entrées <math>I_1, I_2, I_3, \dots, I_n</math> se comportent indépendamment les unes des autres.</p> <p>Cette porte logique a été introduite pour être utilisée dans les arbres de panne dynamiques. C'est la raison pour laquelle des portes logiques NON sont utilisées pour inverser les entrées et la sortie de manière à assurer la cohérence avec la logique du BDF.</p>                                                                                                                                                                                                                                                                              |
|  | <p>Porte logique SEQ: la sortie devient indisponible lorsque les entrées deviennent indisponibles dans l'ordre <math>I_1</math>, puis <math>I_2</math>, puis <math>I_3</math>, ... puis <math>I_n</math>. Les entrées ne se comportent pas indépendamment puisque <math>I_n</math> ne peut pas devenir indisponible si <math>I_{n-1}</math> n'est pas déjà indisponible, <math>I_{n-1}</math> ne peut pas devenir indisponible si <math>I_{n-2}</math> n'est pas déjà indisponible, etc., <math>I_2</math> ne peut pas devenir indisponible si <math>I_1</math> n'est pas déjà indisponible.</p> <p>Cette porte logique a été introduite pour être utilisée dans les arbres de panne dynamiques. C'est la raison pour laquelle des portes logiques NON sont utilisées pour inverser les entrées et la sortie de manière à assurer la cohérence avec la logique du BDF.</p> |

## 5 Considérations préalables, hypothèses principales et limitations

### 5.1 Considérations générales

Un BDF modélise un système grâce à des liens logiques qui existent entre l'état de bon fonctionnement (disponible) du système (c'est-à-dire le BDF global) et les états de bon fonctionnement (disponible) de ses composants (c'est-à-dire les blocs du BDF). Par conséquent, un BDF recouvre une formule logique et il n'est pas nécessairement similaire à l'architecture physique du système (deux vannes d'isolation redondantes en série sur le même tuyau sont représentées par deux blocs en parallèle dans le BDF correspondant, par exemple).

Un BDF peut être en premier lieu utilisé à des fins d'analyse qualitative en identifiant les combinaisons de blocs disponibles permettant au système de l'être également (chemins de succès ou ensembles de fermeture) ou les combinaisons de blocs indisponibles donnant lieu à l'indisponibilité du système (chemins de défaillance ou coupes).

D'autre part, un BDF peut être utilisé pour des calculs de probabilité et, étant donné qu'il s'agit d'une représentation statique (c'est-à-dire indépendante du temps), les règles probabilistes sont essentiellement liées aux blocs présentant des probabilités constantes de succès ou de défaillance.

Cela peut être étendu aux calculs de probabilité en fonction du temps. Cela peut être difficile pour les calculs de fiabilité, mais, pour les calculs de disponibilité et de fréquence, et à condition que les blocs se comportent indépendamment les uns des autres, la distribution qui peut être utilisée pour décrire les temps avant défaillance ou réparation d'un bloc ne fait l'objet d'aucune restriction (autre que la difficulté de résolution mathématique). Cela permet, par exemple, de modéliser les (in)disponibilités de chacun des blocs par des formules analytiques individuelles dont les résultats sont combinés par l'intermédiaire de la logique du BDF afin d'obtenir la disponibilité/l'indisponibilité du système. Si ces formules analytiques sont obtenues par des processus markoviens individuels, le BDF est équivalent à un processus markovien global modélisant l'ensemble du système. Ce type de modèle est appelé "processus markovien piloté par BDF". Il s'agit de la base de la plupart des calculs de probabilité réalisés avec les diagrammes de fiabilité.

### 5.2 Prérequis/hypothèses principales

Un BDF est un graphe orienté acyclique (c'est-à-dire qu'aucune boucle ou rétroaction n'est modélisée dans un BDF) qui peut être tracé à l'aide des structures logiques de base

présentées au Tableau 3. Il est utilisé pour modéliser le comportement d'un système sur la base des hypothèses fondamentales suivantes:

- a) le système comporte uniquement deux états: en fonctionnement (état "de succès", état "de disponibilité") ou défaillant (état "d'indisponibilité");
- b) les blocs d'un BDF modélisent les composants d'un système ou les parties (des groupes de composants, par exemple) d'un système. Chacun d'entre eux comporte uniquement deux états: en fonctionnement (état "de succès", état "de disponibilité") ou défaillant (état "d'indisponibilité");
- c) le BDF représente la logique associant l'état de succès (disponibilité) du système aux états de succès (disponibilité) de ses composants (blocs);
- d) chaque bloc se comporte indépendamment des autres à tout moment.

Les hypothèses ci-dessus doivent généralement être satisfaites pour appliquer les calculs analytiques (c'est-à-dire des calculs avec des formules) développés dans la présente norme. Si elles ne sont pas satisfaites, les calculs analytiques peuvent être remplacés par la simulation de Monte Carlo ou d'autres techniques (l'analyse markovienne [2], les réseaux de Petri [3] ou les diagrammes de fiabilité dynamiques, par exemple) décrites en 12.2 et en Annexe E.

### 5.3 Limitations

Les hypothèses présentées en 5.2 constituent certaines limitations, mais il existe d'autres limitations moins évidentes lors du traitement des probabilités en fonction du temps. En particulier, il convient que les utilisateurs de la présente norme soient conscients des problèmes introduits par les exigences d'indépendance qui doivent être satisfaites à tout moment. Par exemple:

- a) les événements séquentiels sont hors du domaine d'application des modèles booléens. Par conséquent, en principe, ils ne peuvent pas être traités par les diagrammes de fiabilité. Néanmoins, dans des cas simples tels que la redondance en attente, le problème peut être résolu en prenant en considération des blocs composites (voir Tableau 3 et 7.5.3) indépendamment des autres blocs;
- b) les calculs de disponibilité et de fréquence des systèmes réparés supposent que les réparations des blocs réparés soient indépendantes les unes des autres à tout moment (chaque bloc disposant de sa propre équipe de réparation);
- c) les calculs de fiabilité des systèmes réparés impliquent qu'un bloc défaillant puisse être réparé uniquement si le système est toujours en fonctionnement lorsque la défaillance du bloc se produit. Cela introduit des dépendances systémiques entre les états des blocs et entre les états des blocs et l'état du système (voir 10.3.1.4). Cela va à l'encontre de l'hypothèse décrite en 5.2 d) et ainsi, sauf dans les cas particuliers et avec des approximations, les calculs de fiabilité analytique ne sont en général pas possibles.

Pour résumer, à condition que les hypothèses de 5.2 soient satisfaites, la technique du BDF peut être utilisée de manière simple et directe pour l'analyse qualitative et les calculs de disponibilité/fréquence, mais elle ne peut être utilisée pour le calcul de fiabilité que dans des cas particuliers.

Il convient de noter que, lors du traitement des calculs de probabilité, de bonnes approximations sont disponibles avec de faibles probabilités (par exemple défaillance des composants/blocs) qui ne peuvent pas être utilisées avec de fortes probabilités (par exemple probabilités de succès des composants/blocs). Par conséquent, afin de contourner cette limite, il est souvent plus judicieux de travailler avec les probabilités de défaillance (indisponibilité ou défiabilité) plutôt que les probabilités de succès (disponibilité ou fiabilité).

## 6 Établissement des états de succès/défaillance

### 6.1 Considérations générales

Une condition préalable à la construction des modèles de fiabilité d'un système est une bonne compréhension des manières dont le système et ses composants peuvent fonctionner. Les systèmes exigent souvent plus d'une définition de leur succès/défaillance (disponibilité/indisponibilité). Il convient de les définir et de les lister. Un BDF peut être réalisé à différents niveaux: au niveau du système, du sous-système (module) ou de l'assemblage élémentaire. Lorsqu'un BDF est réalisé pour d'autres analyses (par exemple des analyses AMDE), un niveau approprié à de telles analyses doit être choisi.

De plus, il convient d'indiquer clairement

- les fonctions à exécuter,
- les paramètres de performance et les limites admissibles dont font l'objet ces paramètres,
- les conditions d'environnement et de fonctionnement.

Après avoir établi la définition de succès/défaillance du système, l'étape suivante consiste à identifier les blocs logiques afin de diviser le système pour les besoins de l'analyse de fiabilité. Des blocs particuliers peuvent représenter des sous-structures du système, qui à leur tour peuvent être représentées par d'autres BDF (réduction du système – voir 11.2).

Pour l'évaluation quantitative d'un BDF, différentes méthodes sont disponibles. Selon le type de structure, des techniques booléennes simples (voir 7) et/ou des analyses de chemin de succès ou de défaillance (voir 8) peuvent être utilisées. Les calculs peuvent être réalisés à l'aide de méthodes analytiques (méthodes basées sur la disponibilité des composants, par exemple) ou de la simulation de Monte Carlo. La simulation de Monte Carlo présente l'avantage qu'il n'est pas nécessaire de combiner les probabilités des événements dans le BDF de manière analytique, la simulation déterminant elle-même si un bloc est défaillant ou en état de fonctionnement (voir 12.2 et Article F.5).

Étant donné que le BDF décrit les relations logiques nécessaires au fonctionnement du système, il ne représente pas nécessairement la manière dont le matériel est physiquement connecté, même s'il convient, en règle générale, qu'un BDF respecte les connexions physiques du système dans la mesure du possible.

### 6.2 Considérations détaillées

#### 6.2.1 Fonctionnement du système

Un système peut être utilisé selon plusieurs modes de fonctionnement. Si des systèmes séparés étaient utilisés pour chacun des modes de fonctionnement, il conviendrait de traiter chaque mode indépendamment des autres, et d'utiliser, en conséquence, des modèles fiabilistes séparés. Par conséquent, quand le même système est utilisé pour réaliser toutes ces fonctions, il convient d'utiliser des diagrammes séparés pour chaque type d'opération. Une formulation claire de ce qu'est l'état succès/défaillant pour chaque aspect du fonctionnement du système constitue une condition préalable.

#### 6.2.2 Conditions environnementales

Il convient de joindre aux spécifications de performance du système une description des conditions environnementales dans lesquelles le système est conçu pour fonctionner. Il convient d'inclure également une description de toutes les conditions auxquelles le système est soumis durant le transport, le stockage et l'utilisation.

Un élément d'équipement est souvent utilisé dans plus d'un environnement, par exemple à bord d'un bateau, dans un avion ou au sol. Le cas échéant, les évaluations fiabilistes peuvent

être menées en utilisant le même BDF à chaque fois, mais en utilisant les taux de défaillance composant/bloc appropriés à chaque environnement.

### 6.2.3 Cycles de fonctionnement

Il convient d'établir la relation entre le temps calendaire, la durée de fonctionnement et le nombre de cycles marche/arrêt. S'il peut être supposé que le processus de commutation marche/arrêt n'est pas lui-même cause de défaillances, et que le taux de défaillance de l'équipement en périodes de non-utilisation est négligeable, alors seule la durée réelle de fonctionnement de l'équipement doit être prise en considération.

Cependant, dans certains cas, le processus de commutation marche/arrêt est la cause principale de défaillance de l'équipement, ou l'équipement peut avoir un taux de défaillance plus élevé en période de non-utilisation qu'en service (par exemple, en raison de l'humidité et de la corrosion). Dans les cas complexes où seulement certaines parties du système sont démarrées/arrêtées, les techniques de modélisation autres que les BDF (analyse markovienne ou réseaux de Petri, par exemple) peuvent être plus adaptées.

## 7 Modèles élémentaires

### 7.1 Développement du modèle

La première étape est la sélection d'une définition de l'état succès/défaillant du système. Si plus d'une définition est impliquée, un BDF distinct peut être nécessaire pour chacune. L'étape suivante est la division du système en blocs pour refléter le comportement logique de façon que chaque bloc soit statistiquement indépendant des autres. Il convient d'essayer de faire des blocs les plus grands possible tout en veillant à ce que chacun ne contienne (de préférence) aucune redondance.

L'étape suivante consiste à se référer à la définition de succès/défaillance du système et à construire un diagramme qui connecte les blocs pour former un "chemin de succès" (voir 3.15). Comme indiqué dans les diagrammes qui suivent, les divers chemins de succès, entre l'entrée et la sortie du diagramme, traversent ces combinaisons de blocs qui doivent fonctionner pour que le système fonctionne.

NOTE En pratique, selon la configuration du système, il peut être nécessaire de réitérer les tentatives de construction du BDF (en gardant toujours à l'esprit les étapes ci-dessus) avant qu'un diagramme adapté soit au point.

### 7.2 Structures série

Si tous les blocs doivent fonctionner pour que le système fonctionne, alors le BDF correspondant est celui dans lequel tous les blocs sont reliés en série, comme représenté à la Figure 2.

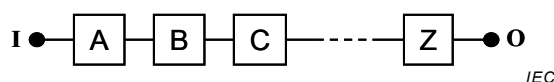


Figure 2 – Diagramme de fiabilité série

Dans ce diagramme, "I" est le point d'entrée, "O" le point de sortie et A, B, C, ... Z sont les blocs qui, ensemble, constituent le système. Les BDF de ce type sont appelés diagrammes de fiabilité "série" ou "modèles série".

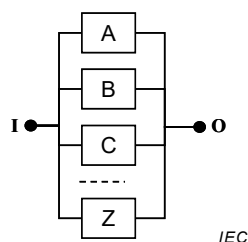
Cette structure modélise la fonction logique suivante:  $s = a \bullet b \bullet c \bullet \dots \bullet z$  (1)

où  $a$ ,  $b$ ,  $c$  et  $z$  représentent les états de succès des blocs A, B, C et Z (voir Tableau 2) et  $s$  l'état de succès du système correspondant.

### 7.3 Structures parallèles

Un type différent de BDF est nécessaire lorsqu'un seul composant du système (c'est-à-dire un bloc) est exigé pour que le système fonctionne. C'est le cas lorsque des composants redondants sont mis en œuvre.

Cela est modélisé par des structures parallèles telles que celle présentée à la Figure 3 et qui représentent plusieurs blocs redondants. Dans cette structure, le système est indisponible si, et seulement si, tous les blocs le sont.



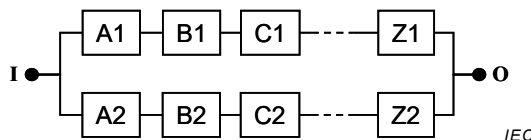
**Figure 3 – Diagramme de fiabilité parallèle**

Cette structure modélise la fonction logique suivante:  $s = a + b + c + \dots + z$  (2)

### 7.4 Mélange de structures séries et de structures parallèles

Les structures de base présentées à la Figure 2 et à la Figure 3 peuvent être utilisées pour modéliser des BDF plus complexes. Par exemple, si le BDF complet présenté à la Figure 2 est dupliqué (c'est-à-dire rendu redondant), le BDF obtenu est représenté à la Figure 4. Alternativement, si chaque bloc du BDF présenté à la Figure 2 est dupliqué, le BDF obtenu est représenté à la Figure 5. Les diagrammes de ce type sont appelés BDF "séries/parallèles" ou "modèles séries/parallèles". Noter que le sens des termes "dupliqué", "redondant" et "parallèle" est très proche, mais il convient de ne pas les utiliser de manière indifférenciée.

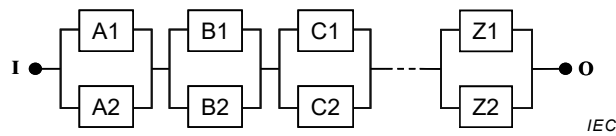
- 1) Le terme "dupliqué" se rapporte à la manière dont le BDF est conçu en répétant des structures similaires. Par exemple, la Figure 4 est la duplication de la structure présentée à la Figure 2, la Figure 5 n'étant que la duplication des composants. En effet, les structures parallèles (B1, B2), (C1, C2) etc. sont la duplication en série de la structure parallèle (A1, A2).
- 2) Le terme "redondant" se rapporte au fait que, si un composant tombe en panne, un autre peut exécuter sa fonction. Par exemple, A1 et A2 de la Figure 5 sont redondants.
- 3) Le terme "parallèle" se rapporte à la logique de l'architecture du système et à la représentation graphique. Par exemple, A1 et A2 sont placés en parallèle dans la Figure 5, car ils sont redondants.



**Figure 4 – Structure parallèle composée de sous-BDF en série dupliqués**

Cette structure modélise la fonction logique suivante:

$$s = (a_1 \cdot b_1 \cdot \dots \cdot z_1) + (a_2 \cdot b_2 \cdot \dots \cdot z_2) \quad (3)$$

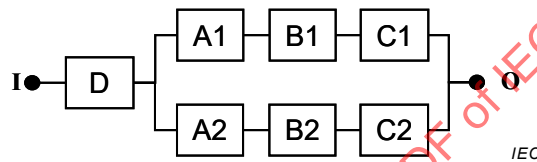


**Figure 5 – Structure série composée de diagrammes de fiabilité parallèles**

Cette structure modélise la fonction logique suivante:

$$s = (a_1 + a_2) \cdot (b_1 + b_2) \cdot \dots \cdot (z_1 + z_2) \quad (4)$$

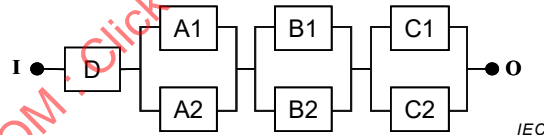
Les BDF utilisés pour la modélisation fiabiliste d'un système sont souvent une combinaison plus complexe de structures en série et parallèles. À titre d'exemple, une liaison de communication dupliquée composée de trois répéteurs (A1, B1, C1 et A2, B2, C2) et d'un bloc de puissance commun (D) peut prendre la forme de la Figure 6 ou de la Figure 7, par exemple.



**Figure 6 – Diagramme de fiabilité série-parallèle général**

Cette structure modélise la fonction logique suivante:

$$s = d \cdot [(a_1 \cdot b_1 \cdot c_1) + (a_2 \cdot b_2 \cdot c_2)] \quad (5)$$



**Figure 7 – Autre type de diagramme de fiabilité série-parallèle général**

Cette structure modélise la fonction logique suivante:

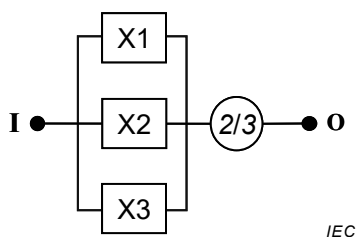
$$s = d \cdot (a_1 + a_2) \cdot (b_1 + b_2) \cdot (c_1 + c_2) \quad (6)$$

Du fait de l'hypothèse d'indépendance statistique indiquée ci-dessus, la défaillance d'un bloc ne conduit pas à une modification de la probabilité de défaillance d'un autre bloc du système. En particulier, la défaillance d'un bloc redondant n'affecte pas les alimentations en puissance du système ou les sources de signaux.

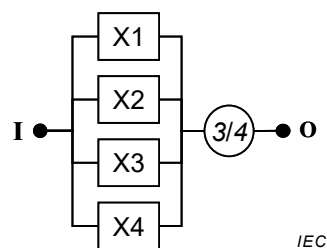
## 7.5 Autres structures

### 7.5.1 Structures $m$ sur $n$

Il est fréquemment nécessaire de modéliser des systèmes pour lesquels la définition de l'état de fonctionnement implique qu'au moins  $m$  entités parmi  $n$  entités connectées en parallèle sont nécessaires pour que le système fonctionne. Ces structures logiques sont souvent appelées structures "de vote majoritaire". Voir les BDF de la Figure 8 ou de la Figure 9 pour des exemples.



**Figure 8 – Redondance 2 sur 3**



**Figure 9 – Redondance 3 sur 4**

Par conséquent, à la Figure 8, au moins 2 blocs sont exigés pour le succès du système, 3 blocs étant exigés à la Figure 9. Dans les deux cas, la défaillance d'une entité est tolérée, mais pas la défaillance de deux entités ou plus.

Ces structures modélisent les fonctions logiques suivantes:

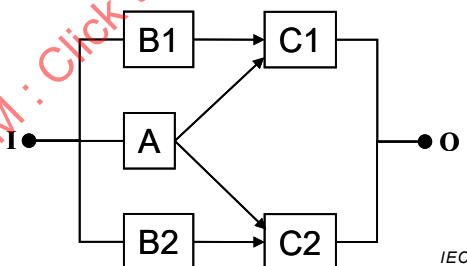
– Redondance 2/3:  $s = x_1 \bullet x_2 + x_1 \bullet x_3 + x_2 \bullet x_3$ ; (7)

– Redondance 3/4:  $s = x_1 \bullet x_2 \bullet x_3 + x_1 \bullet x_2 \bullet x_4 + x_1 \bullet x_3 \bullet x_4 + x_2 \bullet x_3 \bullet x_4$ ; (8)

Ces fonctions logiques ne peuvent pas être représentées par une simple combinaison de structures séries et parallèles élémentaires sans la mise en œuvre de blocs répétés.

### 7.5.2 Structures avec blocs communs

La plupart des BDF sont facilement compréhensibles, et les conditions pour l'état de bon fonctionnement du système sont évidentes. Toutefois, tous les BDF ne peuvent pas être simplifiés à des combinaisons de structures séries et parallèles avec des blocs n'apparaissant qu'une seule fois. Le BDF de la Figure 10 est un exemple dans lequel un bloc A est commun à deux chemins.



**Figure 10 – Diagramme non représenté facilement par une disposition en série/parallèle de blocs**

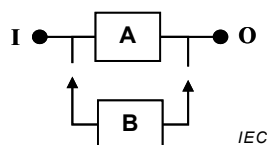
Cette structure modélise la fonction logique suivante:

$$s = (b_1 \bullet c_1) + a \bullet (c_1 + c_2) + (b_2 \bullet c_2) \quad (9)$$

Là encore, le diagramme est explicite. Le système est en bon état de fonctionnement si les blocs B1 et C1 sont tous les deux disponibles, ou les blocs A et C1, ou A et C2, ou enfin B2 et C2. La Figure 10 pourrait représenter l'alimentation en carburant des moteurs d'un avion léger. B1 représente l'alimentation du moteur bâbord (C1), B2 l'alimentation du moteur tribord (C2) et A l'alimentation de secours commune aux deux moteurs. La définition du succès du système implique qu'au moins un moteur doit fonctionner pour le bon fonctionnement de l'avion, ou alternativement, que les deux moteurs doivent tomber en panne pour que l'avion soit défaillant.

Il convient de noter que dans tous les diagrammes ci-dessus (Figure 2 à Figure 10), aucun bloc n'apparaît plus d'une fois dans un diagramme donné. Les procédures de développement de l'expression de fiabilité pour les diagrammes de ce type sont présentées en 8.2. La Figure 18 et la Figure 19 donnent des BDF séries-parallèles équivalents à la Figure 10 où des blocs répétés sont mis en œuvre.

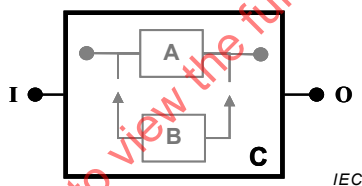
### 7.5.3 Blocs composites



**Figure 11 – Exemple de BDF mettant en œuvre des blocs dépendants**

La Figure 11 modélise un système avec redondance en attente à froid, où l'entité B démarre une fois survenue la défaillance de l'entité A et avec une commutation parfaite de A à B. Il en résulte que dans le BDF correspondant, les blocs A et B ne sont pas indépendants, et que cette structure va à l'encontre de l'hypothèse de départ d'indépendance entre les blocs, sur laquelle repose la présente norme.

Le bloc A et le bloc B ne pouvant pas être pris en considération indépendamment l'un de l'autre, ils doivent l'être dans leur ensemble et ceci peut être effectué en utilisant un bloc composite tel que le bloc C présenté à la Figure 12.

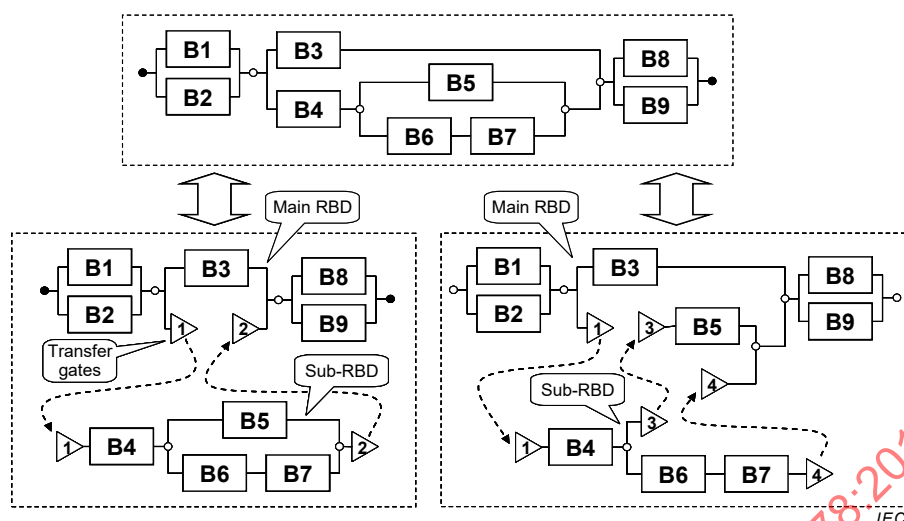


**Figure 12 – Exemple de bloc composite**

Le bloc composite C présente deux états: succès/défaillant. Ensuite, s'il est indépendant des autres blocs du BDF, il peut être traité comme un bloc individuel. Bien entendu, sa probabilité de défaillance/succès doit être calculée en tenant compte du bloc A et du bloc B, ainsi que de leur dépendance.

### 7.6 BDF volumineux et utilisation de portes de transfert

Les BDF liés à des systèmes industriels peuvent être trop volumineux pour être tracés en totalité sur une seule feuille de papier. Dans ce cas, ils peuvent être divisés en parties plus petites (sous-BDF) liées ensemble par des portes de transfert.



| Anglais        | Français            |
|----------------|---------------------|
| Main RBD       | BDF principal       |
| Transfer gates | Portes de transfert |
| Sub-RBD        | Sous-BDF            |

**Figure 13 – Utilisation de portes de transfert et de sous-BDF**

La Figure 13 propose deux exemples d'utilisation de portes de transfert: chacun des deux BDF en bas de la figure est équivalent au BDF du haut. Ils sont divisés en deux parties: BDF principal et sous-BDF. Il convient de noter qu'un sous-BDF ne doit pas nécessairement être doté d'une seule entrée ni d'une seule sortie.

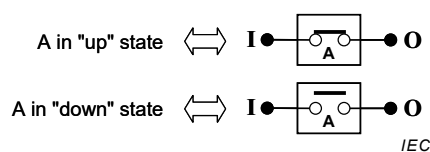
La fonction logique sous-jacente globale n'est pas affectée par cette division, mais cela permet de tracer un BDF volumineux sur plusieurs pages séparées. Il revient à l'analyste de choisir une subdivision tout en conservant une bonne compréhension de l'ensemble du BDF et de ses sous-BDF.

## 8 Analyse qualitative: ensembles de fermeture minimaux et coupes minimales

### 8.1 Analogie électrique

Le BDF peut être utilisé en premier lieu pour des analyses qualitatives visant à identifier

- les combinaisons de blocs disponibles menant à l'état de disponibilité du système (chemins "de succès" ou ensembles "de fermeture"),
- les combinaisons de blocs indisponibles menant à l'état d'indisponibilité du système (chemins "de défaillance" ou "coupes").

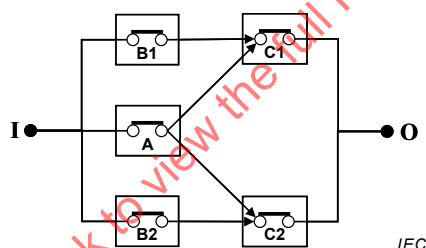


| Anglais           | Français                     |
|-------------------|------------------------------|
| A in "up" state   | A dans l'état "disponible"   |
| A in "down" state | A dans l'état "indisponible" |

**Figure 14 – Analogie entre un bloc et un interrupteur électrique**

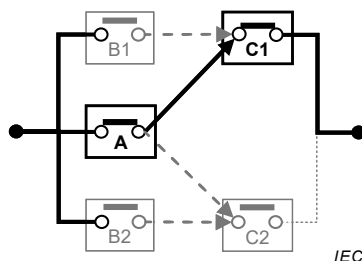
NOTE Lors de la génération d'un BDF associé à un circuit électrique physique, la position d'un interrupteur physique peut être différente de sa représentation à l'aide de l'analogie décrite à la Figure 14. Par exemple, un interrupteur physique bloqué en position fermée est représenté par un interrupteur virtuel ouvert comme en état d'indisponibilité.

Pour ce faire, l'analogie avec un circuit électrique, présentée à la Figure 14, est très utile. Il s'agit de considérer que chaque bloc équivaut à un interrupteur électrique qui est fermé lorsque le bloc est disponible, et qui est ouvert lorsque le bloc est indisponible. Cela a été réalisé sur la Figure 10 équivalente à la Figure 15 et dans laquelle chaque bloc a été modélisé par un interrupteur électrique.



**Figure 15 – Analogie avec un circuit électrique**

Lorsque ce circuit électrique est "fermé", un signal électrique envoyé à partir de l'entrée circule dans tout le BDF jusqu'à la sortie. Par conséquent, une combinaison (un "ensemble") d'interrupteurs fermés permettant à un signal de circuler entre l'entrée et la sortie du BDF modélise un état de disponibilité du système. Il s'agit d'un chemin "de succès" eu égard à l'état du système ou d'un ensemble "de fermeture" eu égard à la fermeture du circuit électrique.



**Figure 16 – Exemple de chemin de succès (ensemble de fermeture) minimal**

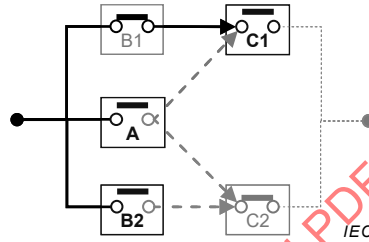
La Figure 16 représente l'un des chemins de succès, (a•c1), du BDF présenté à la Figure 15. Ce chemin de succès est minimal, car la défaillance de A ou de C1 entraîne celle du système global, c'est-à-dire que les succès (disponibilités) de A et de C1 sont nécessaires et suffisants pour obtenir l'état de succès (disponibilité) du système.

B.3.1 donne d'autres exemples d'ensembles de fermeture minimaux et non minimaux.

Les propriétés de l'algèbre de Boole fournissent une représentation générale de l'état de disponibilité du système,  $s$ , en tant qu'union des ensembles de fermeture minimaux ( $\Pi_i$ ) du BDF. Cela donne la formule suivante:

$$s = \bigcup_i \Pi_i \quad (10)$$

Lorsque ce circuit électrique est interrompu ("coupé"), un signal électrique envoyé de l'entrée ne peut pas circuler à travers le BDF et n'atteint pas la sortie. Par conséquent, une combinaison ("ensemble") d'interrupteurs ouverts empêchant un signal de circuler entre l'entrée et la sortie du BDF modélise un état d'indisponibilité du système. Il s'agit d'un chemin "de défaillance" eu égard à l'état du système ou d'une "coupe" eu égard à la fermeture du circuit électrique.



**Figure 17 – Exemple de chemin de défaillance (coupe) minimal**

La Figure 17 représente l'un des chemins de défaillance,  $(\bar{a} \cdot \bar{b}_2 \cdot \bar{c}_1)$ , du BDF présenté à la Figure 15. Ce chemin de défaillance (coupe) est minimal, car la réparation de A, B2 ou C1 (fermeture des interrupteurs) entraîne celle du système, c'est-à-dire que les défaillances de A, B2 et C1 sont nécessaires et suffisantes à l'état de défaillance du système.

B.3.1 donne d'autres exemples de coupes minimales et non minimales.

Les propriétés de l'algèbre de Boole fournissent une représentation générale de l'état d'indisponibilité,  $\bar{s}$ , en tant qu'union des coupes minimales ( $C_j$ ) du BDF:

$$\bar{s} = \bigcup_j C_j \quad (11)$$

par conséquent, à partir des Formules (10) et (11), l'identité:  $s = \bigcup_i \Pi_i \equiv \overline{\bigcup_j C_j}$  est obtenue. (12)

Les coupes minimales et les ensembles de fermeture minimaux peuvent être obtenus par expansion des formules logiques correspondant au BDF. Sauf dans les cas simples, cela n'est pas aisément réalisable à la main, mais de puissants algorithmes sont disponibles et mis en œuvre dans des logiciels de traitement des BDF.

## 8.2 Représentation série-parallèle avec chemin de succès minimal et coupes minimales

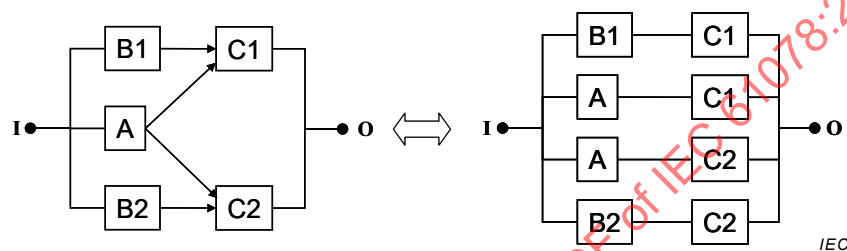
L'identité (12) offre deux moyens équivalents de représenter un BDF à partir de ses ensembles de fermeture minimaux ou de ses coupes minimales.

Appliqués au BDF présenté à la Figure 10, cela donne deux formules logiques équivalentes (voir les explications détaillées en B.3.2):

$$s = \bigcup_i \Pi_i = b_1 \cdot c_1 + a \cdot c_1 + a \cdot c_2 + b_2 \cdot c_2 \quad (13)$$

$$s = \overline{\bigcup_j C_j} = (b_1 + a + b_2) \cdot (c_1 + c_2) \cdot (b_1 + a + c_2) \cdot (b_2 + a + c_1) \quad (14)$$

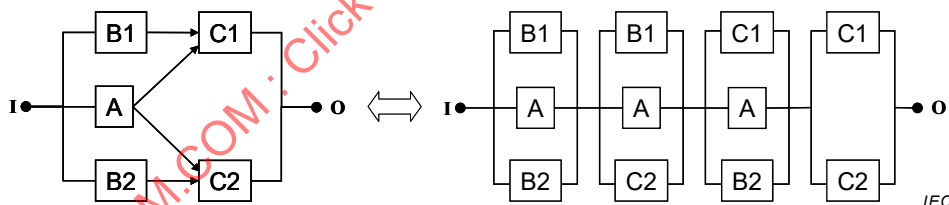
Donc, ce BDF peut être remplacé par les représentations équivalentes présentées à la Figure 18 (composée d'ensembles de fermeture) et à la Figure 19 (composée de coupes minimales) où il peut être noté que certains blocs sont répétés plusieurs fois.



**Figure 18 – BDF équivalents avec chemins de succès minimaux**

La Figure 18 est composée de quatre ensembles de fermeture d'ordre deux (voir 3.16, Note 2 à l'article):

$$(b_1 \cdot c_1), (a \cdot c_1), (a \cdot c_2) \text{ et } (b_2 \cdot c_2).$$



**Figure 19 – BDF équivalents avec coupes minimales**

La Figure 19 est composée d'une coupe d'ordre deux  $(\bar{c}_1 \cdot \bar{c}_2)$  et de trois coupes d'ordre trois:  $(\bar{a} \cdot \bar{b}_1 \cdot \bar{b}_2)$ ,  $(\bar{a} \cdot \bar{b}_1 \cdot \bar{c}_2)$  et  $(\bar{a} \cdot \bar{b}_2 \cdot \bar{c}_1)$ .

### 8.3 Analyse qualitative à partir des coupes minimales

Pour procéder à une analyse qualitative, il est plus utile de prendre en considération les coupes minimales plutôt que les ensembles de fermeture minimaux. Cela peut être illustré par l'exemple ci-dessus: la coupe d'ordre deux  $(\bar{c}_1 \cdot \bar{c}_2)$  est vraisemblablement plus probable que les coupes d'ordre trois  $(\bar{a} \cdot \bar{b}_1 \cdot \bar{b}_2)$ ,  $(\bar{a} \cdot \bar{b}_1 \cdot \bar{c}_2)$  ou  $(\bar{a} \cdot \bar{b}_2 \cdot \bar{c}_1)$ . Par conséquent, d'un point de vue qualitatif, la coupe minimale  $(\bar{c}_1 \cdot \bar{c}_2)$  est le point faible du système et il convient de l'améliorer en premier.

L'analyse qualitative peut donc être réalisée selon la procédure suivante:

- identifier les coupes minimales à partir de l'équation logique de la défaillance du système;

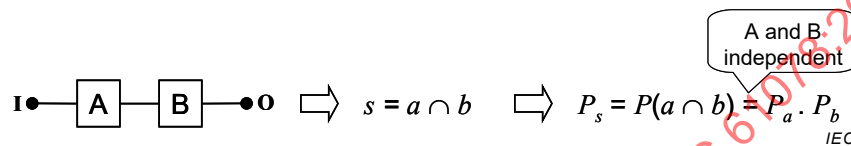
- b) trier les coupes minimales par ordres croissants;
- c) se concentrer sur les coupes minimales d'ordre inférieur afin d'améliorer le système.

Si des probabilités de défaillance sont disponibles pour les blocs, les coupes minimales peuvent être triées plus précisément à l'étape b) en calculant la probabilité d'occurrence de chacune d'elles.

## 9 Analyse quantitative: blocs avec probabilité constante de défaillance/succès

### 9.1 Structures série

La Figure 20 présente le lien entre les formules booléennes d'une structure série de base et les calculs de probabilité.



| Anglais             | Français            |
|---------------------|---------------------|
| A and B independent | A et B indépendants |

**Figure 20 – Lien entre une structure série de base et les calculs de probabilité**

Cette formule de probabilité est fondamentalement établie pour les blocs indépendants avec probabilités constantes. Elle exprime la probabilité de succès du système  $P_s$  en fonction des probabilités individuelles de succès du bloc A,  $P_A$ , et du bloc B,  $P_B$ . Par conséquent, les modèles de BDF peuvent tout d'abord être utilisés pour des systèmes composés de blocs indépendants avec probabilité constante d'être en bon état de fonctionnement.

À ce stade, il serait peu judicieux de parler de fiabilité, de disponibilité ou de fréquence de défaillance du système, ces mesures probabilistes étant uniquement définies pour des systèmes dont le comportement évolue en fonction du temps.

La formule établie à la Figure 20 peut être aisément étendue à des systèmes tels que ceux représentés par la Figure 2 (voir B.4.1). Si les blocs A, B, ..., Z sont indépendants, la probabilité de succès du système est donnée par la simple équation suivante:

$$P_s = P_a \cdot P_b \cdot P_c \dots P_z \quad (15)$$

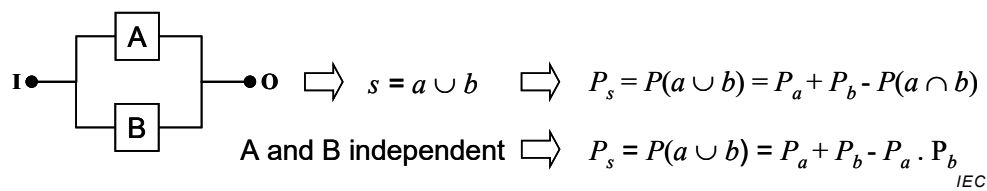
c'est-à-dire en multipliant les probabilités de succès de tous les blocs qui composent le BDF.

En règle générale, avec  $n$  blocs  $B_i$  en série, on obtient:

$$P_s = \prod_{i=1}^n P_{b_i} \quad (16)$$

### 9.2 Structures parallèles

La Figure 21 présente le lien entre les formules booléennes d'une structure parallèle de base et les calculs de probabilité.



| Anglais             | Français            |
|---------------------|---------------------|
| A and B independent | A et B indépendants |

**Figure 21 – Lien entre une structure parallèle et les calculs de probabilité**

Comme pour la structure série de base, la formule de la structure parallèle de base est établie pour des probabilités constantes et des blocs indépendants afin d'exprimer  $P_s$  en fonction de  $P_a$  et de  $P_b$ .

En l'état, la formule présentée à la Figure 21 n'est pas facile à étendre à plus de deux composants (voir la formule de Sylvester-Poincaré en 11.7 et B.4.2). Heureusement, il peut être observé que  $P_s = (1 - P_s) = 1 - (P_a + P_b - P_a \cdot P_b) = (1 - P_a) \cdot (1 - P_b)$ . Cela exprime simplement que le système est défaillant lorsque A et B sont défaillants.

De ce fait, la probabilité de succès du système ( $P_s$ ) est donnée par:

$$P_s = P_a + P_b - P_a \cdot P_b = 1 - (1 - P_a)(1 - P_b) \quad (17)$$

La formule (17) peut être aisément étendue à  $n$  blocs  $B_i$  en parallèle (voir B.4.2), c'est-à-dire:

– Probabilité de défaillance: 
$$P_s = \prod_{i=1}^n (1 - P_{b_i}) \quad (18)$$

– Probabilité de succès: 
$$P_s = (1 - P_s) = 1 - \prod_{i=1}^n (1 - P_{b_i}) \quad (19)$$

### 9.3 Mélange de structures séries et de structures parallèles

Les Formules (15) et (17) peuvent être combinées et cela peut être fait à la main dans les cas simples, mais les calculs ci-dessus ne sont en général pas faciles à résoudre à la main. Heureusement, de puissants algorithmes sont disponibles et mis en œuvre dans les logiciels de traitement des BDF. Ils reposent sur les techniques décrites aux Articles B.5, B.6 ou B.7.

### 9.4 Architectures $m/n$ (entités identiques)

Les architectures  $m/n$  sont analysées en B.4.4. Lorsque les blocs sont identiques (c'est-à-dire que chacun a la même probabilité de succès  $p$ ), la probabilité de succès du système  $P_s$  est donnée par:

$$P_s = \sum_{r=0}^{n-m} \binom{n}{r} p^{n-r} \cdot (1-p)^r \quad (20)$$

et la probabilité de défaillance est donnée par:

$$P_s = \sum_{r=0}^{m-1} \binom{n}{r} \cdot (1-p)^{n-r} \cdot p^r \quad (21)$$

Lorsque  $n = 2m-1$  (par exemple 1/1, 2/3, 3/5, etc.), le système est disponible si  $m$  blocs sont "disponibles" et le système est indisponible si  $m$  blocs sont "indisponibles". Ces structures sont symétriques eu égard aux événements de succès ou de défaillance. Certaines d'entre elles (la structure 2/3, par exemple) sont largement utilisées pour les systèmes de sécurité.

Si les  $n$  entités ne sont pas identiques, l'utilisation d'une procédure plus générale est recommandée (voir 11.8.2).

## 10 Analyse quantitative: blocs avec probabilité de défaillance/succès dépendant du temps

### 10.1 Généralités

Les calculs développés pour les probabilités constantes à l'Article 9 peuvent être aisément étendus à la probabilité en fonction du temps du système  $P_s(t)$ , à condition que les probabilités  $P_{x_i}(t)$  des blocs se comportent indépendamment les uns des autres. Cela signifie que la défaillance (ou la réparation) d'un bloc ne doit avoir d'impact sur la probabilité de défaillance ou de réparation d'aucun autre bloc à l'intérieur du système en cours de modélisation. Cela implique de disposer de suffisamment de ressources de réparation pour assurer l'entretien des blocs qui nécessitent une réparation et que, lorsqu'au moins deux personnes réparent un bloc particulier en même temps, elles ne se gênent pas. Ainsi, les défaillances et réparations des blocs individuels sont considérées comme des événements statistiquement indépendants. Les calculs de probabilité en fonction du temps du succès du système sont détaillés à l'Annexe C.

La probabilité qu'une entité soit en état de bon fonctionnement à un instant donné étant sa disponibilité instantanée, nous avons  $A_S(t) = P_s(t)$  et  $A_{X_i}(t) = P_{x_i}(t)$ . Ce résultat vaut pour les structures complexes et les BDF volumineux (voir Article 11 et Annexe B): à condition que les blocs se comportent indépendamment les uns des autres à tout moment, les formules développées pour le cas de probabilité constante sont toujours valides pour les calculs de disponibilité/d'indisponibilité.

– Structures série:  $A_S(t) = \prod_{i=1}^n A_i(t)$  et  $U_S(t) = 1 - \prod_{i=1}^n [1 - U_i(t)]$  (22)

– Structures parallèles:  $A_S(t) = 1 - \prod_{i=1}^n (1 - A_i(t))$  et  $U_S(t) = \prod_{i=1}^n (U_i(t))$  (23)

– Structure  $m/n$ :  $A_S(t) = \sum_{r=0}^{n-m} \binom{n}{r} \cdot A(t)^{n-r} \cdot [1 - A(t)]^r$  et  $U_S(t) = \sum_{r=0}^{m-1} \binom{n}{r} \cdot U(t)^{n-r} \cdot [1 - U(t)]^r$  (24)

Les calculs de disponibilité/indisponibilité décrits ci-dessus ne sont pas très simples, mais les calculs de fiabilité/défiabilité sont encore plus complexes. Cela est dû à la définition de la fiabilité elle-même:  $R_S(t) = P(\text{S disponible sans interruption sur } [0, t])$  qui implique que le système reste disponible sur tout l'intervalle de temps  $[0, t]$ . Ceci signifie que seules les séquences d'événements relatives au système ne passant pas en état d'indisponibilité dudit système sont pertinentes pour calculer  $R_S(t)$ . Par conséquent, les séquences d'événements relatives au système comprenant une succession "état disponible" → "état indisponible" → "état disponible" doivent être exclues des calculs. Ceci implique qu'une partie de système tombant en panne est réparable uniquement si le système reste disponible pendant la réparation de cette partie. Ainsi, eu égard au calcul de  $R_S(t)$ , les parties du système (par exemple les composants) sont réparables ou non selon l'état du système (c'est-à-dire selon l'état des autres parties). Ceci

constitue une dépendance systémique entre les parties du système et par conséquent entre les blocs modélisant ces parties dans le BDF modélisant le système. Ceci se produit en cas de redondance d'entités réparables. Il s'agit de la principale difficulté de compréhension de la présente norme: à l'exception des BDF composés de blocs en série, la fiabilité du système  $R_S(t)$  ne peut pas être calculée en combinant les fiabilités  $R_{B_i}(t)$  de ses blocs individuels. Les formules établies ci-dessus en partant d'une hypothèse d'indépendance ne sont donc plus valides. Cela est présenté plus en détail en 10.3.1.4.

## 10.2 Blocs non réparés

### 10.2.1 Généralités

Si un bloc X n'est pas réparé, sa probabilité d'être disponible à l'instant  $t$  est égale à sa probabilité de n'avoir fait l'objet d'aucune défaillance sur  $[0, t]$ . Par conséquent, sa fiabilité  $R_X(t)$  est égale à sa disponibilité  $A_X(t)$ .

Si aucun des blocs qui composent un système n'est réparé, le système en question n'est pas non plus réparé. Sa disponibilité et sa fiabilité sont alors identiques et  $R_S(t) = A_S(t)$ .

### 10.2.2 Bloc non réparé simple

La fiabilité d'une entité X est liée à son taux de défaillance  $\lambda_X(t)$ , avec la relation suivante:

$$A_X(t) = R_X(t) = \exp\left(-\int_0^t \lambda_X(u) du\right) \quad (25)$$

où  $\lambda_X(u)$  indique le taux de défaillance du bloc X à  $t = u$ ,  $u$  étant une variable muette.

Si  $\lambda_X$  est constant, la Figure 25 est simplifiée à la formule classique:

$$A_X(t) = R_X(t) = \exp(-\lambda_X \cdot t) \quad (26)$$

$$\text{En conséquence} \quad U_X(t) = F_X(t) = 1 - \exp(-\lambda_X \cdot t) \quad (27)$$

### 10.2.3 Blocs composites non réparés

Un bloc composite non réparé C peut être traité dans son ensemble et comme bloc non réparé simple à condition que sa disponibilité  $A_C(t)$  soit établie. Noter que dans ce cas  $A_C(t) = R_C(t)$ .

Cela peut être illustré par le bloc composite présenté à la Figure 12. Il correspond à un système d'attente à froid avec les paramètres suivants:

- $\lambda_A$  désigne le taux de défaillance constant du bloc A et  $f_A(\tau)$  désigne la fonction de densité de probabilité de son temps de fonctionnement avant défaillance;
- $\lambda_{Bd}$  est le taux de défaillance constant du bloc B à l'état passif (latent), à froid ou sous faible tension;
- $\lambda_B$  est le taux de défaillance constant du bloc B à l'état actif, après son démarrage suite à la défaillance du bloc A.

NOTE Dans les calculs suivants, la commutation est considérée comme étant parfaite, mais des exemples de modélisation de commutation imparfaite sont donnés en 10.3.1.2 (Figure 23) et en C.3.3.

Ce système est analysé en C.3.3 et donne les résultats suivants:

- en partant de l'hypothèse selon laquelle le taux de défaillance latent de l'entité B est égal à zéro, la disponibilité d'un système redondant en attente est:

$$A_C(t) \equiv R_C(t) = e^{-\lambda_A \cdot t} + \frac{\lambda_A}{\lambda_A - \lambda_B} \cdot [e^{-\lambda_B \cdot t} - e^{-\lambda_A \cdot t}] \quad (28)$$

- si les taux de défaillance sont égaux à ( $\lambda_A = \lambda$  et  $\lambda_B = \lambda$ ), l'équation pour la fiabilité du système peut être donnée par:

$$A_C(t) \equiv R_C(t) = e^{-\lambda \cdot t} \cdot (1 + \lambda \cdot t) \quad (29)$$

Si, dans les conditions idéales présentées ci-dessus,  $n$  entités (au lieu d'une) sont en attente, cette dernière expression devient:

$$A_C(t) \equiv R_C(t) = e^{-\lambda \cdot t} \left( 1 + \lambda \cdot t + \frac{(\lambda \cdot t)^2}{2!} + \frac{(\lambda \cdot t)^3}{3!} + \dots + \frac{(\lambda \cdot t)^n}{n!} \right) \quad (30)$$

Les Formules (28), (29) ou (30) peuvent être utilisées exactement de la même manière pour le bloc composite C que la Formule (26) utilisée pour les blocs ordinaires. Néanmoins, ces formules sont difficiles à établir, et il convient d'utiliser d'autres procédures (l'analyse markovienne, par exemple) pour analyser les systèmes en attente (voir 10.3.1.2).

#### 10.2.4 BDF avec blocs non réparés

- **Disponibilité/fiabilité:** à condition que les blocs se comportent indépendamment les uns des autres, la disponibilité/fiabilité du BDF peut être calculée en combinant les disponibilités/fiabilités des blocs (voir 10.2.2 et 10.2.3) selon la logique du BDF et à l'aide des formules présentées en 10.1.
- **Fréquence:** un système comportant des composants non réparés ne peut faire l'objet que d'une seule défaillance. La probabilité d'observer cette défaillance sur  $[0, T]$  est  $F_S(T)$  et la fréquence moyenne de défaillance  $w_S^{\text{avg}}(T)$  est égale à  $\frac{F_S(T)}{T}$ . Elle diminue et tend vers zéro au fil du temps.

### 10.3 Blocs réparés

#### 10.3.1 Calculs de disponibilité

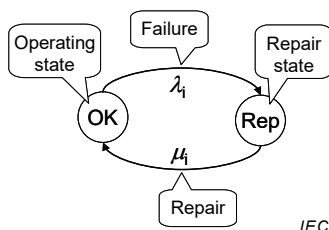
##### 10.3.1.1 Bloc simple

Lorsqu'un bloc  $i$  est réparé, sa disponibilité dépend à la fois de son taux de défaillance et des ressources de réparation. Ces ressources sont en général allouées au niveau du système et, si elles sont limitées, cela constitue une dépendance systémique entre les blocs. Par conséquent, les blocs sont indépendants uniquement si les ressources de réparation sont illimitées. De cette manière, un bloc peut être réparé à tout moment, même lorsqu'un ou plusieurs blocs sont déjà en cours de réparation. Cette hypothèse implique, en particulier, la présence d'autant d'équipes de réparation que de blocs.

Les disponibilités des blocs  $[A_i(t)]$  peuvent être exprimées par une formule (simple ou complexe). Dans le cas le plus simple, les blocs réparés se caractérisent par un taux de défaillance constant  $\lambda_i$  et un taux de réparation constant  $\mu_i$ , ce qui donne la formule classique:

$$A_i(t) = \frac{\mu_i}{\lambda_i + \mu_i} + \frac{\lambda_i}{\lambda_i + \mu_i} \exp[-(\lambda_i + \mu_i)t] \quad (31)$$

Cette formule analytique peut être remplacée par le graphe de Markov équivalent présenté à la Figure 22 où  $A_i(t) = P(\text{OK}, t)$  où  $P(\text{OK}, t)$  est la probabilité de l'état OK à l'instant  $t$ .



| Anglais         | Français               |
|-----------------|------------------------|
| Operating state | État de fonctionnement |
| Failure         | Défaillance            |
| Repair          | Réparation             |
| Repair state    | État de réparation     |

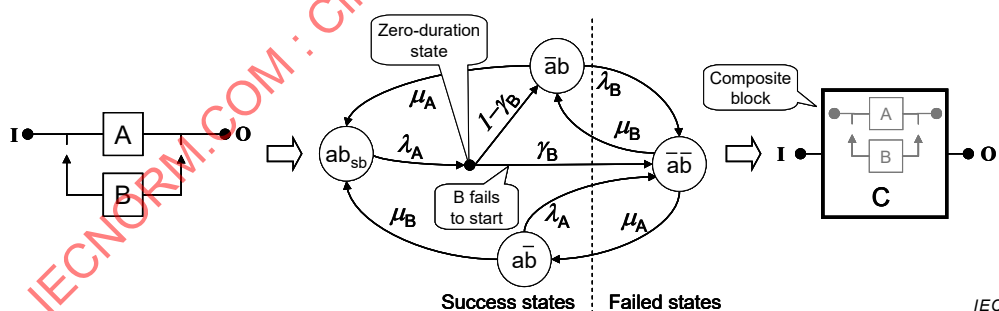
**Figure 22 – Graphe de Markov de disponibilité pour un bloc réparé simple**

NOTE Un graphe de Markov dédié aux calculs de disponibilité est appelé graphe de Markov "de disponibilité".

### 10.3.1.2 Blocs composites réparés

Un bloc composite réparé, C, peut être traité dans son ensemble et comme un bloc réparé simple à condition que sa disponibilité  $A_C(t)$  soit établie. Noter que dans ce cas  $A_C(t) \neq R_C(t)$ .

Cela peut être illustré par le bloc composite présenté à la Figure 12 et a déjà été analysé en 10.2.3 dans le cas "non réparé". Si les composants A et B sont considérés comme étant réparables, la formule de disponibilité  $A_C(t)$  du bloc composite C peut désormais être établie à l'aide du graphe de Markov de la Figure 23.



| Anglais             | Français                     |
|---------------------|------------------------------|
| Zero-duration state | État de durée nulle          |
| Composite block     | Bloc composite               |
| Success states      | États de succès              |
| Failed states       | États de défaillance         |
| B fails to start    | Échec du démarrage du bloc B |

**Figure 23 – Redondance en attente**

Dans ce graphe, C est réparé après avoir fait l'objet d'une défaillance (voir les transitions de l'état de défaillance aux états de disponibilité): il s'agit donc d'un graphe de Markov "de disponibilité" (voir 10.3.3 pour observer la différence avec un graphe de Markov "de fiabilité").

Ce graphe de Markov peut être utilisé pour établir la disponibilité  $A_C(t)$  du bloc composite C, voire comme entrée d'un BDF (voir C.3).

Dans ce graphe de Markov, la défaillance du mécanisme de commutation et de détection est modélisée par la probabilité  $\gamma_B$  que le bloc B ne démarre pas en cas de défaillance de A. Cela se produisant dès la défaillance du composant A, un état de durée nulle a été introduit dans le graphe de Markov. À partir de cet état, B démarre immédiatement (probabilité  $1-\gamma_B$ ) ou non (probabilité  $\gamma_B$ ).

Le graphe de Markov présenté à la Figure 23 modélise les dépendances existant entre les blocs A et B:

- B démarre uniquement après la défaillance de A;
- B peut faire l'objet d'une défaillance lorsque son démarrage est demandé par la défaillance de A;
- B revient en position d'attente dès que A et B sont disponibles.

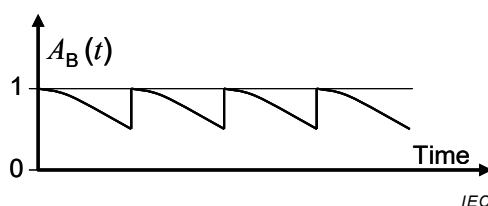
Ces dépendances entre A et B ne peuvent pas être prises en considération en combinant les disponibilités individuelles de A et de B. C'est la raison pour laquelle C doit être pris en considération dans son ensemble. Si les blocs A et B étaient pris en considération séparément, une structure séquentielle classique hors du domaine d'application des BDF serait obtenue. La réunion de A et de B dans un bloc composite C permet de gérer ce dernier comme un bloc individuel dans le cadre des BDF.

Il s'agit d'un principe général, qui peut être mis en œuvre lorsque quelques blocs ne sont pas indépendants. Si le nombre de blocs dépendants augmente, il convient d'utiliser d'autres techniques comme les BDF dynamiques (voir 12.2), les processus markoviens [2] ou les réseaux de Petri [3].

### 10.3.1.3 Blocs soumis à tests périodiques

Vis-à-vis des fonctions de sécurité qu'ils doivent réaliser, les systèmes de sécurité sont uniquement disponibles ou indisponibles. Par conséquent, il s'agit de systèmes typiques avec uniquement deux états. Leur principale caractéristique est que, malgré le fait qu'ils restent la plupart du temps en position d'attente, ils doivent réagir avec une haute disponibilité en cas de demande de sécurité.

Les composants de ce type de systèmes de sécurité sont alors périodiquement testés afin de détecter les défaillances qui peuvent s'être produites lorsque le système est en position d'attente. Par conséquent, la disponibilité d'un composant périodiquement testé est maximale juste après un test où les défaillances possibles ont été détectées et réparées, puis diminue jusqu'au prochain test. La courbe typique en dents de scie de la disponibilité  $A_B(t)$  de ce type de blocs est présentée à la Figure 24. Elle peut être modélisée par un processus markovien multiphasés (voir la Figure C.4). Un BDF complet mettant en œuvre des blocs périodiquement testés est également présenté à la Figure C.5.



| Anglais | Français |
|---------|----------|
| Time    | Temps    |

Figure 24 – Disponibilité typique d'un bloc périodiquement testé

La forme des disponibilités des blocs ne change pas le principe de calcul, et elles peuvent être combinées comme indiqué ci-dessus afin de calculer la disponibilité  $A_S(t)$  ou l'indisponibilité  $U_S(t)$  globale du système. Cela est très utile pour mettre en œuvre les calculs d'indisponibilité moyenne (c'est-à-dire  $PFD_{avg}$ ) exigés par les normes de sécurité fonctionnelle (IEC 61508 [5] ou IEC 61511 [6] par exemple) comme expliqué à la fin de 10.3.2.

#### 10.3.1.4 Blocs réparés complexes (processus markoviens pilotés par BDF)

À condition que les exigences d'indépendance soient satisfaites, l'idée développée à la Figure 22 et à la Figure 23 pour utiliser de petits graphes de Markov avec quelques états afin de modéliser les disponibilités des blocs peut être aisément étendue à tous les blocs d'un BDF.

Cela permet de construire de grands modèles de Markov (contenant des millions d'états) composés de petits sous-modèles de Markov individuels (contenant quelques états chacun) et combinés selon la logique d'un BDF. En conséquence

- les graphes de Markov fournissent les disponibilités des blocs,
- le BDF fournit la logique utilisée pour combiner les disponibilités des blocs.

Ces modèles sont appelés "processus markoviens pilotés par BDF".

Voir l'Article C.4 pour plus de détails.

#### 10.3.2 Calculs de disponibilité moyenne

Un autre paramètre utile calculable par un BDF est la disponibilité moyenne  $A_S^{avg}(0, T)$  du système sur une période donnée  $[0, T]$ . Ce calcul peut être réalisé par l'intégration de la disponibilité instantanée du système  $A_S(t)$ :

$$A_S^{avg}(0, T) = \frac{1}{T} \int_0^T A_S(t) dt \quad (32)$$

Dans le cas général, ces calculs ne sont pas réellement possibles à la main, mais de nos jours, des logiciels de traitement des BDF sont disponibles pour procéder aux calculs numériques nécessaires.

Néanmoins, dans certaines conditions, les blocs  $B_i$  atteignent un régime établi lorsque la probabilité de quitter l'état de disponibilité suite à une défaillance est égale à la probabilité de  $B_i$  de l'atteindre suite à une réparation. S'il existe un tel régime établi, la disponibilité  $A_{B_i}(t)$  atteint une valeur asymptotique  $A_{B_i}^{as}$ .

Cela se produit lorsque

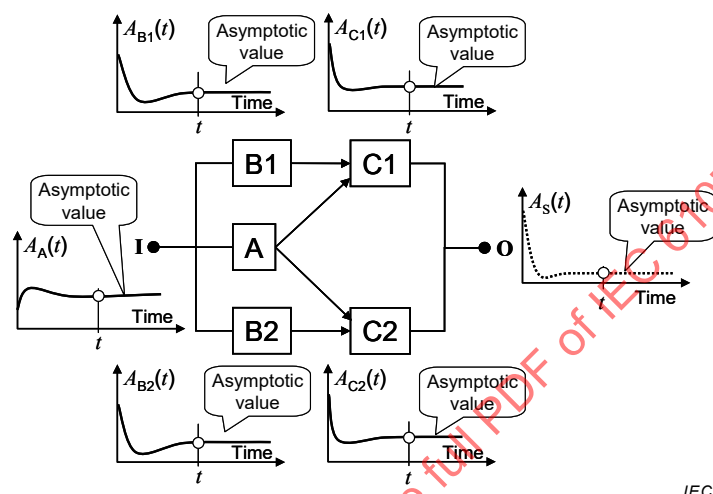
- les défaillances sont rapidement détectées et réparées (c'est-à-dire  $1/\mu_i \ll 1/\lambda_i$ ),
- les taux de défaillance et de réparation ( $\lambda_i, \mu_i$ ) sont constants.

Par exemple, dans le cas décrit à la Figure 22, la disponibilité en régime établi du bloc est égale à  $A_{B_i}^{as} = \mu_i / (\lambda_i + \mu_i)$ .

Lorsque tous les blocs atteignent un régime établi, le système en atteint un également (voir la Figure 25 et la Figure C.3) où  $A_S(t) \rightarrow A_S^{as}$ . Hors de la période transitoire, l'Equation (32)

donne donc la disponibilité moyenne à long terme du système:  $A_S^{avg} = A_S^{as}$ .

Par conséquent, lorsqu'un BDF atteint un régime établi, les disponibilités en régime établi des blocs deviennent constantes et les formules établies à l'Article 9 peuvent être utilisées pour réaliser les prévisions de disponibilité en régime établi du système. Pour ce faire, il suffit de remplacer les probabilités constantes  $P_{b_i}$  par les valeurs constantes  $A_{B_i}^{as}$ .

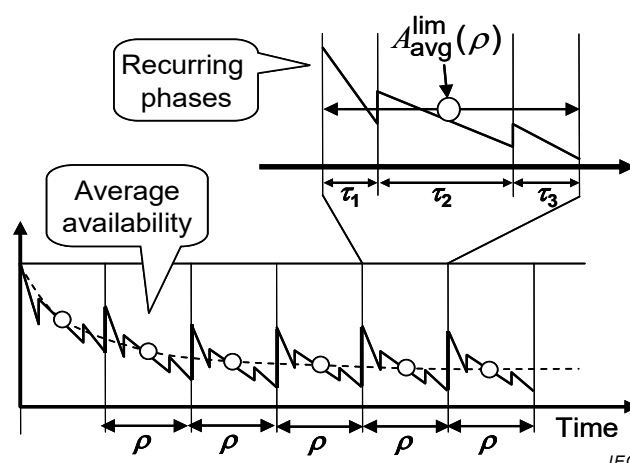


| Anglais          | Français            |
|------------------|---------------------|
| Asymptotic value | Valeur asymptotique |
| Time             | Temps               |

**Figure 25 – Exemple de BDF atteignant un régime établi**

Mise en garde: les calculs donnés ci-dessus sont valides uniquement avec des disponibilités asymptotiques des blocs. Ils ne sont pas valides avec des disponibilités moyennes ordinaires.

Si le BDF n'atteint pas de régime établi, la disponibilité moyenne doit être calculée à l'aide de la formule générale (32).



| Anglais              | Français              |
|----------------------|-----------------------|
| Recurring phases     | Phases récurrentes    |
| Average availability | Disponibilité moyenne |
| Time                 | Temps                 |

**Figure 26 – Exemple de BDF avec phases récurrentes**

Un cas particulier se présente lorsque le BDF est utilisé dans le cadre de phases récurrentes, comme:

- succession de saisons: hiver, printemps, été et automne;
- des intervalles entre tests pour les entités périodiquement testées.

La Figure 26 représente un système doté de trois phases récurrentes, de sorte que la même configuration de trois phases soit répétée à intervalle de temps égal à  $\rho = \tau_1 + \tau_2 + \tau_3$ . La disponibilité d'un système de ce type ne présente aucune valeur asymptotique, mais la disponibilité moyenne  $A_{\text{avg}}[n\rho, (n+1)\rho]$  atteint en général une valeur limite lorsque  $n$  est suffisamment important:

$$A_{\text{avg}}^{\text{Lim}}(\rho) = \lim_{n \rightarrow \infty} A_{\text{avg}}[n\rho, (n+1)\rho] \quad (33)$$

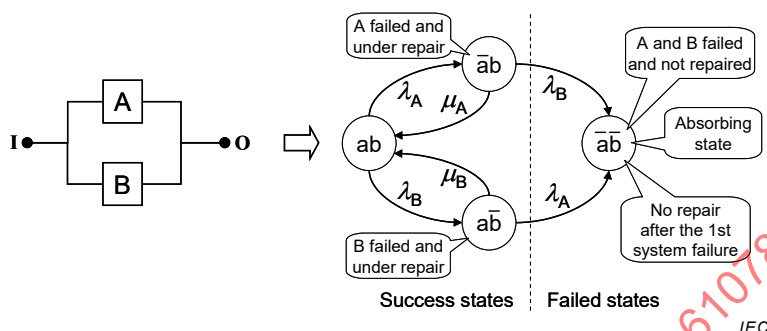
Étant donné que  $A_{\text{avg}}[n\rho, (n+1)\rho]$  diminue lorsque  $n$  augmente,  $A_{\text{avg}}^{\text{Lim}}(\rho)$  donne une bonne approximation conservative de la disponibilité moyenne sur un intervalle de temps  $[0, T]$  englobant plusieurs ensembles de phases récurrentes.

Par conséquent, les techniques décrites dans la présente norme peuvent être utilisées pour calculer l'indisponibilité moyenne des systèmes de sécurité et cela fait le lien avec les normes de sécurité fonctionnelle (IEC 61508 ou IEC 61511) qui exigent ce type de calculs pour les systèmes instrumentés de sécurité et où l'indisponibilité moyenne est appelée  $\text{PFD}_{\text{avg}}$  (moyenne de la probabilité de défaillance à la demande). Cela est décrit aux Articles C.4 et C.5.

### 10.3.3 Calculs de fiabilité

Lorsque des blocs réparés sont pris en considération, le calcul de la fiabilité  $R_S(t)$  implique que les réparations des blocs du système (BDF) doivent seulement être prises en considération tant que le système reste disponible (voir en 10.1).

Ceci peut être représenté par le système redondant simple modélisé par le BDF à gauche de la Figure 27. Concernant le calcul de  $R_S(t)$ , lorsque le bloc B est défaillant, il peut être réparé uniquement si S est disponible (c'est-à-dire si A est disponible). De la même manière, lorsque le bloc A est défaillant, il peut être réparé uniquement si S est disponible (c'est-à-dire si B est disponible). Par conséquent, lorsqu'un bloc est défaillant, sa réparation dépend de l'état du système S qui, à son tour, dépend des états de tous les blocs. Cette dépendance systémique entre les blocs est modélisée dans le graphe de Markov présenté à droite de la Figure 27. Il est équivalent au BDF présenté à gauche.



| Anglais                                            | Français                                                           |
|----------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------|
| A failed and under repair                          | A défaillant et en cours de réparation                             |
| A and B failed and not repaired                    | A et B défaillants et non réparés                                  |
| Absorbing state                                    | État absorbant                                                     |
| No repair after the 1 <sup>st</sup> system failure | Pas de réparation après la 1 <sup>ère</sup> défaillance du système |
| B failed and under repair                          | B défaillant et en cours de réparation                             |
| Success states                                     | États de succès                                                    |
| Failed states                                      | États de défaillance                                               |

**Figure 27 – BDF et graphe de Markov équivalent pour les calculs de fiabilité**

Le système redondant simple est composé de deux blocs redondants A et B et présente 4 états. Les états de succès sont  $ab$ ,  $\bar{a}b$  et  $a\bar{b}$  et l'état de défaillance est  $\bar{a}\bar{b}$ . Le système est fiable sur une période donnée  $[0, t]$  uniquement s'il reste tout le temps dans les états de "succès". Par conséquent, les états  $ab$ ,  $\bar{a}b$  et  $a\bar{b}$  sont "fiables" uniquement s'ils proviennent d'un passage de l'un à l'autre. Cela signifie que, pour les calculs de fiabilité à l'instant  $t$ , un saut hors de  $\bar{a}\bar{b}$  est interdit pendant  $[0, t]$ . L'état  $\bar{a}\bar{b}$  est donc un état absorbant, et sa présence caractérise un graphe de Markov de fiabilité.

Dans ce graphe, le bloc A peut être réparé dans l'état,  $\bar{a}b$  mais pas dans l'état  $\bar{a}\bar{b}$  et le bloc B peut être réparé dans l'état,  $a\bar{b}$  mais pas dans l'état  $\bar{a}\bar{b}$ . Par conséquent, la réparation de la défaillance d'un bloc dépend de l'état du système global lorsqu'elle se produit: c'est la raison pour laquelle il s'agit d'une dépendance "systémique".

La fiabilité du système ne peut donc plus être calculée en combinant les probabilités individuelles de succès des blocs.

- Les disponibilités des blocs,  $[A_i(t)]$ , ne peuvent pas être utilisées, car elles donneraient la disponibilité du système et non sa fiabilité.
- Les fiabilités des blocs,  $[R_i(t)]$ , ne peuvent pas être utilisées, car elles donneraient la fiabilité d'un système avec des blocs non réparés (la fiabilité d'un composant réparé étant la même que la fiabilité d'un composant non réparé avec le même taux de défaillance).

Par conséquent, excepté dans le cas particulier développé ci-après, il convient d'utiliser plutôt d'autres techniques comme la simulation de Monte Carlo (BDFD, voir 12.2 et Annexe E, par exemple), les graphes de Markov [2] ou les réseaux de Petri [3].

Le seul cas dans lequel les calculs de fiabilité sont gérables se produit pour les systèmes réparés rapidement (c'est-à-dire  $MTTR_i \ll MTTF_i$ ) et complètement (c'est-à-dire que toutes les défaillances sont réparées). Cela signifie qu'en cas de défaillance d'un bloc, la réparation démarre immédiatement et dure peu de temps. Dans ce cas, le système passe en régime établi assez rapidement et sa disponibilité  $A_S(t)$  en valeur asymptotique  $A_S^{as}$ . En régime établi, l'intensité de défaillance conditionnelle,  $\lambda_{VS}$  (également appelée taux de défaillance de Vesely) est constante et offre une bonne approximation du taux de défaillance du système,  $\lambda_S$ . La fiabilité du système est alors obtenue à l'aide de la formule classique  $R_S(t) = e^{-\lambda_S t} \approx e^{-\lambda_{VS} t}$  et la défiabilité du système est donnée par  $F_S(t) = 1 - e^{-\lambda_S t} \approx 1 - e^{-\lambda_{VS} t}$ .

Par exemple à la Figure 27, lorsque le régime établi est atteint, les propriétés des processus markoviens permettent d'obtenir une bonne approximation de  $\lambda_{VS}$  et de  $\lambda_S$  directement à partir du processus markovien:

$$\lambda_S \approx \lambda_{VS} \approx \lambda_A \frac{\lambda_B}{\lambda_B + \mu_A} + \lambda_B \frac{\lambda_A}{\lambda_A + \mu_B} \quad (34)$$

Il ne s'agit pas d'une formule simple, même si le système est très simple. Pour des BDF plus volumineux, le taux de défaillance de Vesely,  $\lambda_{VS}$ , peut être obtenu à partir de probabilités conditionnelles qui peuvent être calculées par les algorithmes actuellement utilisés dans les logiciels de traitement des BDF. La manière d'obtenir les intensités de défaillance conditionnelles et inconditionnelles à partir d'un BDF est décrite à l'Article C.6, et les calculs de fiabilité font l'objet d'une présentation plus détaillée à l'Article C.7.

#### 10.3.4 Calculs de fréquence

Lorsque les blocs sont réparés, une autre mesure probabiliste utile est la fréquence moyenne de défaillance du système sur un intervalle de temps donné  $[0, T]$ . Elle est égale à  $n/T$  si  $n$  défaillances se produisent sur  $T$ . Cette fréquence moyenne de défaillance est obtenue en calculant l'intensité de défaillance inconditionnelle moyenne du système  $w_S^{avg}(0, T) = n/T$ .

La fréquence de défaillance peut être calculée dans tous les cas, mais difficilement à la main. Des algorithmes ont été développés à cet effet, et le principe est expliqué à l'Article C.6.

## 11 Techniques booléennes d'analyse quantitative de grands modèles

### 11.1 Généralités

La disponibilité  $A_S(t)$  de tous les systèmes pris en considération jusqu'ici peut être évaluée par l'application d'une formule de disponibilité adaptée choisie parmi les Formules (15) à (24). Toutefois, si le nombre de blocs augmente, les BDF correspondants peuvent ne pas être facilement évalués par l'une des formules ci-dessus. Les calculs sont plus difficiles et d'autres approches mathématiques doivent être utilisées.

Ces approches offrent plusieurs moyens de manipuler les équations booléennes afin de rendre les calculs possibles. En règle générale, elles peuvent être utilisées manuellement sur de petits BDF, mais la plupart d'entre elles peuvent être utilisées par l'intermédiaire d'un logiciel lorsque le nombre de blocs est important. Elles s'appuient sur les techniques suivantes:

- réduction du BDF à des structures plus simples;

- utilisation du théorème des probabilités totales;
- utilisation des tables de vérité booléennes;
- utilisation des tableaux de Karnaugh;
- utilisation de la décomposition de Shannon et des diagrammes de décision binaires;
- utilisation des formules générales de Sylvester-Poincaré.

Pour les procédures qui suivent, la condition d'indépendance, telle qu'indiquée en 5.2 d), s'applique et les formules fournies ci-après pour les calculs de probabilité constante peuvent être de manière simple et directe transformées pour les calculs de disponibilité en appliquant 10.1 et l'Annexe C.

Il convient de noter que la simulation de Monte Carlo peut également être utilisée pour des BDF complexes. L'utilisation de ces procédures n'est pas abordée dans la présente norme, mais les BDF dynamiques sont décrits en 12.2 et à l'Annexe E.

## 11.2 Méthode de réduction de BDF

Les BDF modélisant un système industriel peuvent paraître très compliqués. Cependant, après examen attentif, les blocs du diagramme peuvent souvent être regroupés de façon à ce que ces groupes soient statistiquement indépendants. En particulier, cela signifie que deux groupes (ou plus) ne peuvent pas contenir le même bloc.

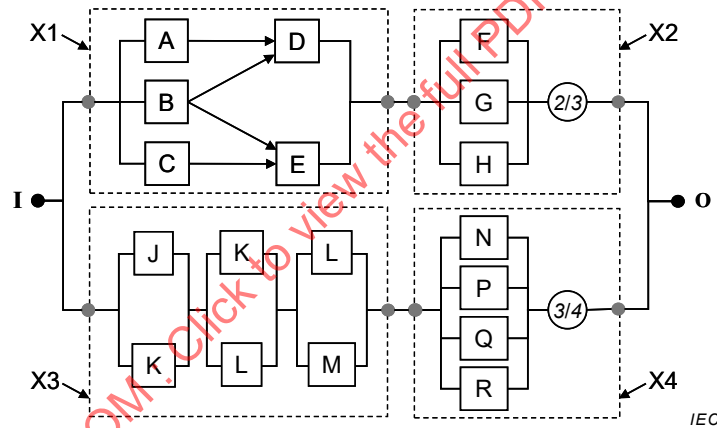


Figure 28 – Présentation du groupement de blocs avant réduction

Cela peut être illustré en considérant le BDF présenté à la Figure 28.

La Figure 28 peut être réduite au diagramme présenté à la Figure 29 qui est composé des quatre groupes de blocs en pointillés X1, X2, X3 et X4 (comme représenté à la Figure 10, la Figure 8, la Figure 37 et la Figure 9 respectivement).

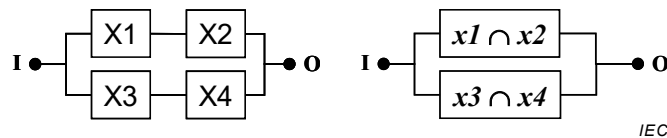


Figure 29 – Diagrammes de fiabilité réduits

Ainsi, la disponibilité finale du système est donnée par

$$A_S(t) = A_{X1} \cdot A_{X2} + A_{X3} \cdot A_{X4} - A_{X1} \cdot A_{X2} \cdot A_{X3} \cdot A_{X4} \quad (35)$$

comme expliqué en 9.2.

Cette technique de réduction est difficile à automatiser, mais elle est très utile pour les calculs à la main.

### 11.3 Utilisation du théorème des probabilités totales

Lorsque sont traités les BDF du type représenté à la Figure 10, qui mettent en œuvre un bloc commun A, une approche peut être mise en œuvre en s'appuyant sur le théorème des probabilités totales.

Deux événements mutuellement exclusifs  $x$  et  $\bar{x}$  forment un ensemble complet d'événements (c'est-à-dire  $x + \bar{x} = \Omega$ ) et le théorème des probabilités totales peut être résumé de la manière suivante:

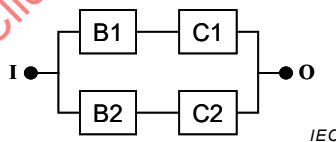
$$P_s = P_{s|x} \cdot P_x + P_{s|\bar{x}} \cdot P_{\bar{x}} = P_{s|x} \cdot P_x + P_{s|\bar{x}} \cdot (1 - P_x) \quad (36)$$

Dans l'Equation (36),  $P_s$  indique la probabilité de succès d'un système,  $P_{s|x}$  la probabilité de succès du système sachant qu'une entité particulière X fonctionne, et  $P_{s|\bar{x}}$  la probabilité de succès du système sachant que l'entité particulière X est défaillante.

La Formule (36) peut être appliquée au bloc A de la Figure 10, ce qui donne:

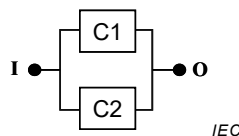
$$P_s = P_{s|a} \cdot P_a + P_{s|\bar{a}} \cdot P_{\bar{a}} \quad (37)$$

Par exemple, en cas de défaillance de l'entité A, le BDF de la Figure 10 devient le BDF présenté à la Figure 30, de sorte que  $P_{s|\bar{a}} = P_{b1} \cdot P_{c1} + P_{b2} \cdot P_{c2} - P_{b1} \cdot P_{c1} \cdot P_{b2} \cdot P_{c2}$



**Figure 30 – Représentation de la Figure 10 lorsque l'entité A est défaillante**

De la même manière, si A fonctionne, le BDF de la Figure 10 devient celui de la Figure 31, de sorte que  $P_{s|a} = P_{c1} + P_{c2} - P_{c1} \cdot P_{c2}$ .



**Figure 31 – Représentation de la Figure 10 lorsque l'entité A fonctionne**

$$P_s = (P_{c1} + P_{c2} - P_{c1} \cdot P_{c2}) \cdot P_a + (P_{b1} \cdot P_{c1} + P_{b2} \cdot P_{c2} - P_{b1} \cdot P_{c1} \cdot P_{b2} \cdot P_{c2}) \cdot (1 - P_a) \quad (38)$$

Si  $P_{c1} = P_{c2} = P_c$  et  $P_{b1} = P_{b2} = P_b$ , la Formule (38) ci-dessus se simplifie en:

$$P_s = (2P_c - P_c^2) \cdot P_a + (2P_b \cdot P_c - P_b^2 \cdot P_c^2) \cdot (1 - P_a) \quad (39)$$

Cette procédure peut être étendue à  $n$  événements mutuellement exclusifs  $a_1, \dots, a_n$ , dont la somme de probabilité est égale à l'unité (c'est-à-dire  $a_1 + a_2 + \dots + a_n = \Omega$ ) et alors  $P_s = P_s | a_1 \cdot P_{a_1} + \dots + P_s | a_n \cdot P_{a_n}$ . Elle peut être utilisée pour traiter un BDF contenant des blocs répétés (voir 11.8.1.2). En présence de  $n$  blocs répétés, cela mène à développer  $2^n$  termes pour la formule de  $P_s$ . Par conséquent, cette technique est utile pour traiter les BDF avec un nombre limité de blocs répétés, par exemple les structures  $m/n$ .

#### 11.4 Utilisation des tables de vérité booléennes

Les chemins de succès du système décrits par les BDF sont la description graphique d'une expression booléenne sous-jacente. Par exemple, trois entités redondantes A, B et C (une sur trois étant exigée pour le succès du système) peuvent être représentées par la configuration de BDF parallèle illustrée à la Figure 32 ou par l'expression booléenne suivante:

$$s = a + b + c \quad (40)$$

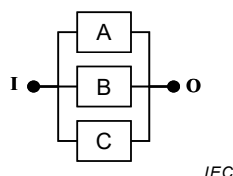


Figure 32 – BDF représentant trois entités redondantes

La formule de Sylvester-Poincaré (voir 11.7 et B.5) appliquée aux trois événements indépendants donne le résultat suivant:

$$P_s = P_a + P_b + P_c - (P_a \cdot P_b + P_a \cdot P_c + P_b \cdot P_c) + P_a \cdot P_b \cdot P_c \quad (41)$$

La formule (41) est composée de sept termes en présence de trois blocs (c'est-à-dire trois événements  $a$ ,  $b$  et  $c$ ) seulement. Ce nombre de termes augmente de manière exponentielle lorsque le nombre d'événements impliqués augmente.

Pour éviter l'augmentation du nombre de termes, l'idée consiste à remplacer les événements  $a$ ,  $b$  et  $c$  par des combinaisons équivalentes d'événements disjoints (voir 11.7). Pour ce faire, la table de vérité du système en fonction des états des blocs A, B et C peut être utilisée.

**Tableau 5 – Application de la table de vérité à l'exemple de la Figure 32**

| Numéro d'état                               | Bloc |   |   | Système | Termes disjoints                          | Consensus                           |                                     |
|---------------------------------------------|------|---|---|---------|-------------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|
|                                             | A    | B | C |         |                                           |                                     |                                     |
| 1                                           | 0    | 0 | 0 | 0       | $\bar{a} \bullet \bar{b} \bullet \bar{c}$ |                                     |                                     |
| 2                                           | 0    | 0 | 1 | 1       | $\bar{a} \bullet \bar{b} \bullet c$       | $\bar{a} \bullet \bar{b} \bullet c$ | $\bar{a} \bullet \bar{b} \bullet c$ |
| 3                                           | 0    | 1 | 0 | 1       | $\bar{a} \bullet b \bullet \bar{c}$       | $\bar{a} \bullet b$                 | $\bar{a} \bullet b$                 |
| 4                                           | 0    | 1 | 1 | 1       | $\bar{a} \bullet b \bullet c$             |                                     |                                     |
| 5                                           | 1    | 0 | 0 | 1       | $a \bullet \bar{b} \bullet \bar{c}$       | $a \bullet \bar{b}$                 | a                                   |
| 6                                           | 1    | 0 | 1 | 1       | $a \bullet \bar{b} \bullet c$             |                                     |                                     |
| 7                                           | 1    | 1 | 0 | 1       | $a \bullet b \bullet \bar{c}$             | $a \bullet b$                       |                                     |
| 8                                           | 1    | 1 | 1 | 1       | $a \bullet b \bullet c$                   |                                     |                                     |
| NOTE 1 = en fonctionnement. 0 = défaillant. |      |   |   |         |                                           |                                     |                                     |

Cette table de vérité identifie 8 termes disjoints représentant les 8 états possibles du système: l'état numéro 1 correspond à la défaillance du système et les états 2 à 8 aux états de succès du système.

Là encore, sept termes sont à traiter. Par conséquent, cette décomposition en lignes de termes disjoints n'est pas très efficace pour calculer  $P_s$ . Noter qu'il n'existe en général aucun lien entre le nombre de termes de la formule de Sylvestre-Poincaré et le nombre de termes disjoints issus de la table de vérité.

Heureusement, certains termes disjoints peuvent être combinés par "consensus", comme cela a été fait du côté droit de la table. Dans un premier temps, les termes 7 et 8, 5 et 6, et 3 et 4 ont été combinés de manière à obtenir 4 termes disjoints. Dans un deuxième temps, les termes 5 à 7 ont été fusionnés en un seul terme, ce qui a permis d'obtenir trois termes disjoints:

$$s = (a + b + c) \equiv a + (\bar{a} \cdot b) + (\bar{a} \cdot \bar{b} \cdot c) \quad (42)$$

Finalement, la probabilité de défaillance du système peut être calculée comme suit:

$$P_s = P_a + (1 - P_a) \cdot P_b + (1 - P_a) \cdot (1 - P_b) P_c \quad (43)$$

La formule (43) peut être directement utilisée pour évaluer la disponibilité du système:

$$A_S(t) = A_A(t) + [1 - A_A(t)] \cdot A_B(t) + [1 - A_A(t)] \cdot [1 - A_B(t)] \cdot A_C(t) \quad (44)$$

Il doit être noté que le Tableau 5 identifie un seul terme menant à l'état d'indisponibilité du système  $\bar{a} \cdot \bar{b} \cdot \bar{c}$ . Par conséquent, le calcul de la probabilité de défaillance est plus simple que celui de la probabilité de succès, et donc:

$$P_s = 1 - P_{\bar{s}} = 1 - P_{\bar{a}} \cdot P_{\bar{b}} \cdot P_{\bar{c}} \quad (45)$$

et enfin

$$A_S(t) = 1 - U_S(t) = 1 - U_A(t) \cdot U_B(t) \cdot U_C(t) \quad (46)$$

La formule (44) et la formule (46) sont équivalentes.

S'agissant d'un système contenant  $n$  blocs, la table de vérité booléenne contient  $2^n$  lignes, donc cette approche peut vite devenir lourde, même si le principe est plutôt simple. Dans une certaine mesure, le problème est résolu à l'aide des tableaux de Karnaugh (voir 11.5), mais il l'est réellement à l'aide de la décomposition de Shannon et des diagrammes de décision binaires expliqués ci-après (voir 11.6). Pour une description détaillée d'une application générale des méthodes booléennes, voir l'Annexe B.

### 11.5 Utilisation des tableaux de Karnaugh

La technique des tableaux de Karnaugh [8][9][10][11] a été développée pour simplifier l'équation logique correspondant à une table de vérité. Elle peut donc être utilisée également pour les BDF.

Le principe d'utilisation de ce type de tableaux est illustré ci-après avec les tableaux liés au BDF à la Figure 10. Ce BDF est composé de 5 blocs. Les tableaux de Karnaugh étant plus faciles à manipuler avec 4 variables, tout le tableau a été divisé en deux cas disjoints:

- A est disponible (Tableau 6);
- A est indisponible (Tableau 7).

**Tableau 6 – Tableau de Karnaugh lié à la Figure 10 lorsque A est disponible**

| B1 B2 \ C1 C2 | 00 | 01 | 11 | 10 |
|---------------|----|----|----|----|
| 00            | 0  | 0  | 0  | 0  |
| 01            | 1  | 1  | 1  | 1  |
| 11            | 1  | 1  | 1  | 1  |
| 10            | 1  | 1  | 1  | 1  |

**Tableau 7 – Tableau de Karnaugh lié à la Figure 10 lorsque A est indisponible**

| B1 B2 \ C1 C2 | 00 | 01 | 11 | 10 |
|---------------|----|----|----|----|
| 00            | 0  | 0  | 0  | 0  |
| 01            | 0  | 1  | 1  | 0  |
| 11            | 0  | 1  | 1  | 1  |
| 10            | 0  | 0  | 1  | 1  |

Dans les Tableau 6 et Tableau 7, les blocs ont été divisés en deux groupes (B1 B2 et C1 C2), et les états des composants ont été organisés de telle sorte qu'un seul état change d'une colonne à la suivante et d'une ligne à la suivante. Par conséquent, les combinaisons qui peuvent être simplifiées sont proches l'une de l'autre. Par exemple, dans le Tableau 6, les combinaisons encadrées par une ligne continue représentent uniquement C2, les états de C1, B1 et B2 n'ayant aucune importance. De la même manière, les combinaisons encadrées par une ligne en pointillés représentent uniquement C1, les états de C2, B1 et B2 n'ayant aucune importance. Cela donne

$$s|a = c_1 + c_2 \quad (47)$$

où  $s|a$  représente le système S disponible sachant que le bloc A est disponible et où  $c_1$  et  $c_2$  représentent les variables d'état liées aux blocs C1 et C2.

Avec le tableau de Karnaugh présenté au Tableau 7, la formule suivante est obtenue

$$s|\bar{a} = b_1 \bullet c_1 + b_2 \bullet c_2 \quad (48)$$

où  $s|\bar{a}$  représente le système S disponible sachant que A est indisponible et où  $b_1$ ,  $b_2$ ,  $c_1$  et  $c_2$  représentent les variables d'état liées aux blocs B1, B2, C1 et C2.

Le rassemblement des résultats donne:

$$s = a \bullet (c_1 + c_2) + \bar{a} \bullet (b_1 \bullet c_1 + b_2 \bullet c_2) \quad (49)$$

Finalement, la disponibilité du système peut être calculée avec la formule suivante:

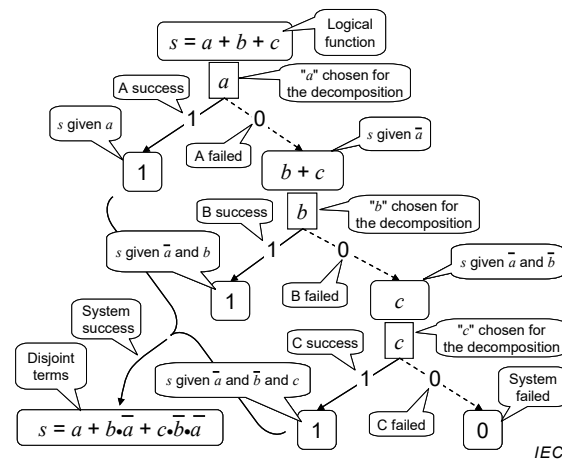
$$\begin{aligned} A_S(t) &= A_A(t) \cdot \{1 - [1 - A_{C1}(t)] \cdot (1 - A_{C2})\} + [1 - A_A(t)] \cdot \{1 - [1 - A_{B1}(t)] \cdot A_{C1}(t)] \cdot [1 - A_{B2}(t)] \cdot A_{C2}(t)\} \\ A_S(t) &= A_A(t) \cdot \{1 - [1 - A_{C1}(t)] \cdot (1 - A_{C2})\} + [1 - A_A(t)] \cdot \{1 - [1 - A_{B1}(t)] \cdot A_{C1}(t)] \cdot [1 - A_{B2}(t)] \cdot A_{C2}(t)\} \end{aligned} \quad (50)$$

Les tableaux de Karnaugh contiennent le même nombre de termes ( $2^n$ ) que les tables de vérité d'origine, mais ils sont plus compacts, et les combinaisons sont mieux organisées afin d'identifier celles qui peuvent être fusionnées. Cela est très utile pour identifier les ensembles de fermeture minimaux ou les coupes minimales.

### 11.6 Utilisation de la décomposition de Shannon et des diagrammes de décision binaires

À l'instar des tables de vérité ou des tableaux de Karnaugh, la décomposition de Shannon permet d'identifier les termes disjoints d'une équation booléenne.

La Figure 33 illustre le principe de la décomposition de Shannon sur la fonction booléenne (1 sur 3) liée au BDF présenté à la Figure 32.



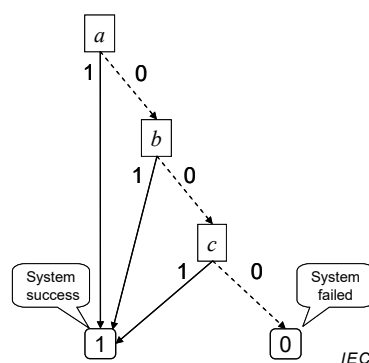
| Anglais                          | Français                         |
|----------------------------------|----------------------------------|
| Logical function                 | Fonction logique                 |
| A success                        | Succès de A                      |
| "a" chosen for the decomposition | "a" choisi pour la décomposition |
| s given ...                      | s sachant ...                    |
| A failed                         | A défaillant                     |
| S given ...                      | S sachant ...                    |
| B success                        | Succès de B                      |
| "b" chosen for the decomposition | "b" choisi pour la décomposition |
| System success                   | Succès du système                |
| Disjoint terms                   | Termes disjoints                 |
| System failed                    | Système défaillant               |
| C failed                         | C défaillant                     |

**Figure 33 – Décomposition de Shannon équivalente au Tableau 5**

Cette décomposition est réalisée en plusieurs étapes:

- 1) choisir l'ordre des variables apparaissant dans la fonction logique (ici, ordre  $a, b, c$ );
- 2) pour chaque variable, tracer deux branches (succès et défaillance);
- 3) si un état du système (succès ou défaillance) est atteint, arrêter la décomposition; sinon, passer à la variable suivante;
- 4) identifier les chemins menant à l'état de succès (ou de défaillance) du système.

La Figure 33 donne 3 chemins de succès disjoints:  $a, (\bar{a} \bullet b), (\bar{a} \bullet \bar{b} \bullet c)$ . Le résultat est le même que celui de la table de vérité, mais il a été obtenu plus simplement. Cette décomposition n'est pas unique et dépend de l'ordre qui a été choisi pour les variables.



| Anglais        | Français           |
|----------------|--------------------|
| System success | Succès du système  |
| System failed  | Système défaillant |

**Figure 34 – Diagramme de décision binaire équivalent au Tableau 5**

Lorsque les états de disponibilité et d'indisponibilité sont rassemblés, la décomposition de Shannon fournit le diagramme de décision binaire (BDD) présenté à la Figure 34. Les BDD offrent des représentations très compactes des équations booléennes sous la forme de termes disjoints. Ils sont très efficaces pour les calculs et constituent l'état de l'art actuel (voir les références [31], [32] et [33]) pour les calculs de probabilité sur les modèles booléens (BDF et arbres de panne, par exemple).

### 11.7 Utilisation de la formule de Sylvester-Poincaré

Lorsque le nombre de composants augmente, les formules simples et l'application manuelle des techniques ci-dessus deviennent ingérables en raison de l'explosion combinatoire du nombre de termes utilisés dans le calcul.

Comme cela a été expliqué à l'Article 8, un BDF peut être représenté par l'union de ses chemins de succès (ensembles de fermeture minimaux).

Donc, les calculs de probabilité peuvent être réalisés à partir des unions d'ensembles de fermeture en utilisant la formule de Sylvester-Poincaré (voir B.4.2 et B.5.2) qui est la généralisation de la formule de base  $P(a + b) = P_a + P_b - P_a \cdot P_b$

$$P_s = P\left(\bigcup_{i=1}^n \Pi_i\right) = \sum_i P(\Pi_i) - \sum_{i < j} P(\Pi_i \cdot \Pi_j) + \sum_{i < j < k} P(\Pi_i \cdot \Pi_j \cdot \Pi_k) - \dots \quad (51)$$

Un calcul analogue (voir B.5.3) peut être réalisé à l'aide des chemins de défaillance (coupes minimales):

$$P_s = 1 - P_f = 1 - P\left(\bigcup_{i=1}^m C_i\right) = 1 - \sum_i P(C_i) + \sum_{i < j} P(C_i \cdot C_j) - \sum_{i < j < k} P(C_i \cdot C_j \cdot C_k) + \dots \quad (52)$$

La formule de Sylvester-Poincaré est une somme alternée dont le résultat converge vers la valeur exacte lorsque le nombre de termes considérés augmente. La différence est que la Formule (51) qui traite les probabilités  $P(\Pi_i)$  proches de 1 converge très lentement, alors que la Formule (52) qui traite les probabilités  $P(C_i) \ll 1$  converge plutôt rapidement. Dans ce cas,

le premier terme de la Formule (52) offre une estimation conservative de la probabilité de défaillance:

$$P_s = P(\bigcup_{i=1}^n C_i) \approx \sum_i P_{C_i} \quad (53)$$

Cette approximation est largement utilisée et fonctionne bien lorsque les probabilités de défaillances des blocs sont faibles, ce qui est généralement le cas pour les composants des systèmes de sécurité. Ceci est la base des calculs réalisés par de nombreux logiciels existants pour les calculs de disponibilité/fiabilité sur les BDF ou les arbres de panne.

Néanmoins, la difficulté d'utilisation de la Formule (51) peut être surmontée en transformant les ensembles de fermeture en ensembles équivalents de termes disjoints  $\bigcup_{i=1}^q \Pi_i^d = \bigcup_{i=1}^n \Pi_i$  tels que  $\Pi_i^d \bullet \Pi_j^d = \Phi, \forall i, j$ .

Dans ce cas, la formule de Sylvester-Poincaré (51) est réduite à son premier terme:

$$P_s = P(\bigcup_{i=1}^q \Pi_i^d) = \sum_i P(\Pi_i^d) \quad (54)$$

La même opération peut être réalisée avec la Formule (52) en remplaçant les coupes minimales ( $C_i$ ) par un ensemble équivalent de termes disjoints ( $C_i^d$ ). La formule de Sylvester-Poincaré (52) est alors réduite à son premier terme:

$$P_s = P(\bigcup_{i=1}^m C_i^d) = \sum_i P(C_i^d) \quad (55)$$

Les ensembles disjoints peuvent être déterminés en utilisant les tables de vérité (11.4), les tableaux de Karnaugh (11.5) ou la décomposition de Shannon et les diagrammes de décision binaires (11.6). À l'heure actuelle, l'état de l'art permettant d'identifier les termes disjoints d'une équation booléenne s'appuie sur les diagrammes de décision binaires (BDD) décrits en 11.6. Cela fournit de puissants algorithmes capables de traiter des BDF de très grande taille composés d'un grand nombre de blocs répétés ou non répétés.

## 11.8 Exemples d'application de BDF

### 11.8.1 Modèles avec blocs répétés

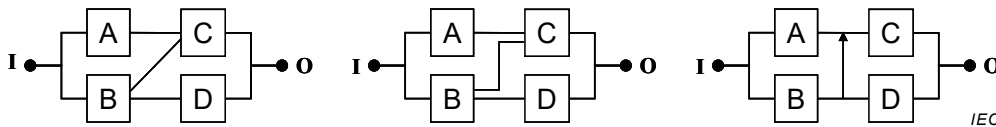
#### 11.8.1.1 Représentation par coupes et ensembles de fermeture

À l'Article 7, aucun bloc du BDF n'apparaît plus d'une fois. Il peut être parfois avantageux d'utiliser les diagrammes du type représenté à la Figure 35.

Le côté gauche de la Figure 35 présente un BDF conventionnel comportant 4 blocs: les blocs C et D peuvent être deux entités similaires d'un point de vue fonctionnel, faisant office de redondance l'un pour l'autre, mais l'entité A peut uniquement alimenter l'entité C, alors que l'entité B est capable d'alimenter à la fois l'entité C et l'entité D.

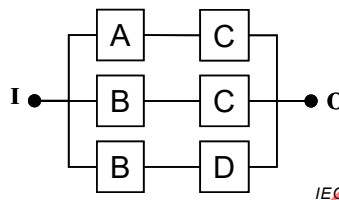
Le milieu et le côté droit de la Figure 35 fournissent 2 BDF équivalents pour modéliser non seulement les dispositions physiques des entités, mais également le BDF. Il est important que

le BDF de droite intègre des flèches afin d'éviter toute incertitude inhérente à ce type de diagramme.



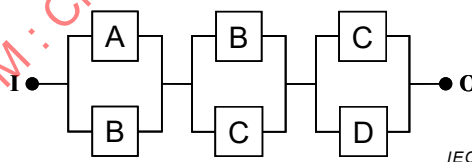
**Figure 35 – BDF utilisant une flèche pour aider à définir le succès du système**

Les chemins de succès  $a \bullet c$ ,  $b \bullet c$ ,  $b \bullet d$  du système modélisé à la Figure 35 peuvent être utilisés pour générer un BDF équivalent dans lequel certains blocs apparaissent plusieurs fois. La défaillance de tous les chemins de succès provoque celle du système. Par conséquent, le BDF peut être représenté par une combinaison parallèle de ces chemins de succès. Cela est présenté à la Figure 36.



**Figure 36 – Autre représentation de la Figure 35 utilisant des blocs répétés et des chemins de succès**

D'autre part, les chemins de défaillance (coupes minimales du système, par exemple)  $\bar{a} \bullet \bar{b}$ ,  $\bar{b} \bullet \bar{c}$ ,  $\bar{c} \bullet \bar{d}$  peuvent aussi être utilisés pour générer un BDF équivalent. C'est l'objet de la Figure 37. La défaillance de tous les composants de l'une des coupes minimales provoque celle du système et donc la Figure 37 est une combinaison en série de ces coupes minimales.



**Figure 37 – Autre représentation de la Figure 35 utilisant les blocs répétés et les coupes minimales**

Les représentations de la Figure 36 et de la Figure 37 illustrent les concepts abordés en 8.2: un BDF peut être représenté par la combinaison parallèle de ses chemins de succès ou par la combinaison série de ses coupes minimales.

Le bloc B et le bloc C sont répétés dans les deux BDF présentés à la Figure 36 et à la Figure 37. Il serait incorrect de traiter les blocs comme s'ils étaient indépendants les uns des autres. À la place, les méthodes données en 11.3, en 11.5 et en 11.6 peuvent être appliquées.

#### 11.8.1.2 Mise en œuvre du théorème des probabilités totales

La méthode de décomposition des probabilités totales décrite en 11.3 appliquée à la Figure 36 et étendue pour deux composants répétés donne:

$$\begin{aligned}
 P_s &= P_{s|b,c} \cdot P_b \cdot P_c + P_{s|b,\bar{c}} \cdot P_b \cdot P_{\bar{c}} + P_{s|\bar{b},c} \cdot P_{\bar{b}} \cdot P_c + P_{s|\bar{b},\bar{c}} \cdot P_{\bar{b}} \cdot P_{\bar{c}} \\
 &= P_{s|b,c} \cdot P_b \cdot P_c + P_{s|b,\bar{c}} \cdot P_b \cdot (1 - P_c) + P_{s|\bar{b},c} \cdot (1 - P_b) \cdot P_c + P_{s|\bar{b},\bar{c}} \cdot (1 - P_b) \cdot (1 - P_c)
 \end{aligned}
 \quad (56)$$

Dans la Formule (56),  $P_{s|x,y}$  signifie que le système S est disponible sachant que les événements  $x$  et  $y$  sont vrais.

Il doit être noté que le nombre de termes est  $2^n$  si  $n$  blocs sont répétés. Cela implique que cette méthode est gérable uniquement pour un petit nombre de blocs répétés.

La Figure 36 donne:  $P_{s|b,c} = 1$ ,  $P_{s|b,\bar{c}} = P_d$ ,  $P_{s|\bar{b},c} = P_a$ ,  $P_{s|\bar{b},\bar{c}} = 0$

$$\text{Alors: } P_s = P_b \cdot P_c + P_d \cdot P_b \cdot (1 - P_c) + P_a(1 - P_b) \cdot P_c = P_a \cdot P_c + P_b \cdot P_c + P_b \cdot P_d - P_a \cdot P_b \cdot P_c \quad (57)$$

### 11.8.1.3 Mise en œuvre du tableau de Karnaugh

Un autre moyen de traiter le BDF présenté à la Figure 35 consiste à développer des tables de vérité ou, mieux encore, le tableau de Karnaugh (voir 11.5) présenté au Tableau 8.

Grâce à ce tableau de Karnaugh, les chemins de succès minimaux du système peuvent être directement déterminés. Ils sont identifiés par les 3 rectangles tracés au Tableau 8.

$$s = a \bullet b + a \bullet c + b \bullet d \quad (58)$$

Tableau 8 – Tableau de Karnaugh lié à la Figure 35

| AB \ CD | 00 | 01 | 11 | 10 |
|---------|----|----|----|----|
| 00      | 0  | 0  | 0  | 0  |
| 01      | 0  | 1  | 1  | 0  |
| 11      | 0  | 1  | 1  | 1  |
| 10      | 0  | 1  | 1  | 1  |

Diagram illustrating the Karnaugh map with three success paths identified by dashed rectangles:

- $b \bullet d$  (covering cells (01,01), (11,01), (10,01))
- $b \bullet c$  (covering cells (01,11), (11,11), (10,11))
- $a \bullet c$  (covering cells (11,01), (11,11), (10,11))

Par conséquent, le tableau de Karnaugh est un bon moyen d'identifier les chemins de succès qui ont déjà été représentés à la Figure 36. Cela est utile du point de vue de l'analyse qualitative, mais ces chemins de succès ne sont pas disjoints et cela implique que la formule de Sylvestre-Poincaré ne peut pas être simplifiée pour les calculs de probabilité.

### 11.8.1.4 Mise en œuvre de la décomposition de Shannon

La décomposition de Shannon a été réalisée à la Figure 38 et 3 chemins de succès disjoints ont été identifiés:

$$s = b \bullet c + b \bullet \bar{c} \bullet d + a \bullet c \bullet \bar{b} \quad (59)$$

Bien entendu, du point de vue de l'algèbre de Boole, les Formules (59) et (58) sont équivalentes, mais la Formule (59) composée de termes disjoints mène directement à la disponibilité du système:

$$A_S(t) = A_B(t) \cdot A_C(t) + A_B(t) \cdot [1 - A_C(t)] \cdot A_D(t) + A_A(t) \cdot A_C(t) \cdot [1 - A_B(t)] \tag{60}$$

Le résultat de la décomposition de Shannon dépend de l'ordre des variables utilisées pour la développer et, par conséquent, d'autres expressions équivalentes peuvent être déterminées lorsque l'ordre des variables change (voir B.7 où le même BDF a été analysé).

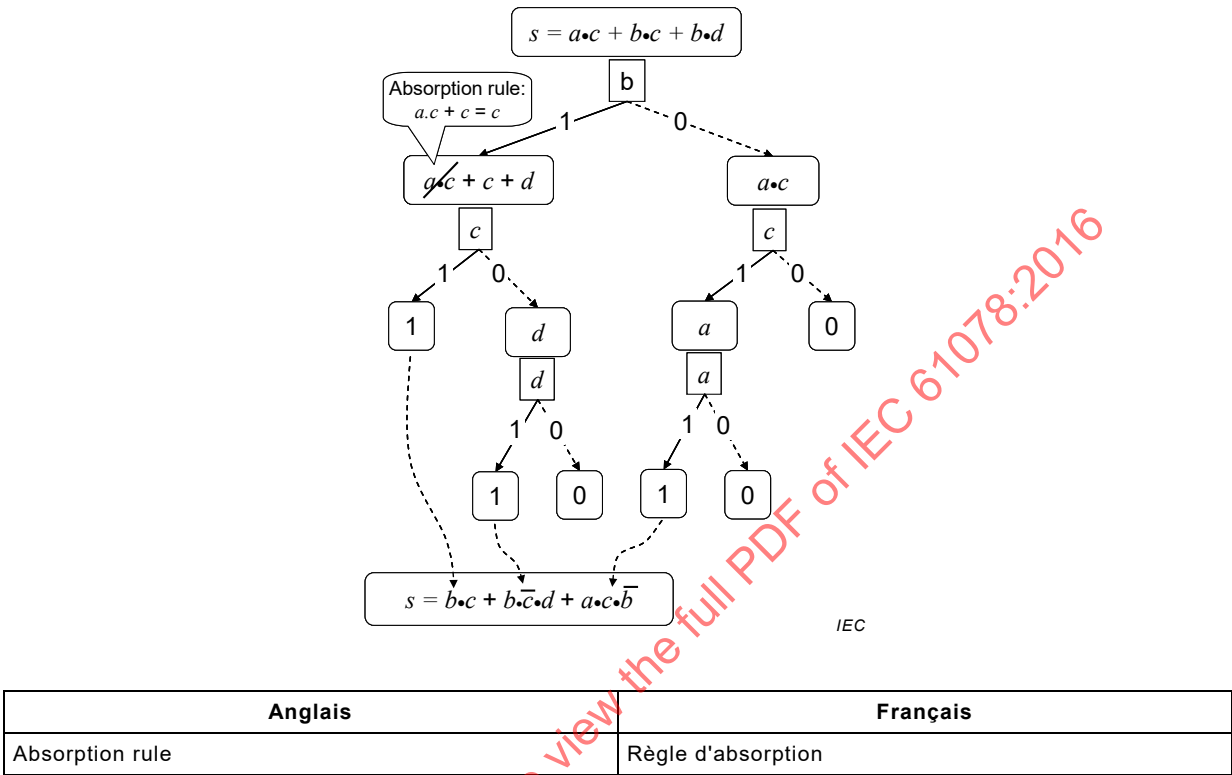


Figure 38 – Décomposition de Shannon liée à la Figure 35

11.8.2 Modèles *m* sur *n* (entités pas identiques)

La procédure décrite en 9.4 n'est pas applicable ici, car les blocs ne sont pas identiques. À titre d'exemple, le système 2/5 représenté par le BDF de la Figure 39 est considéré.

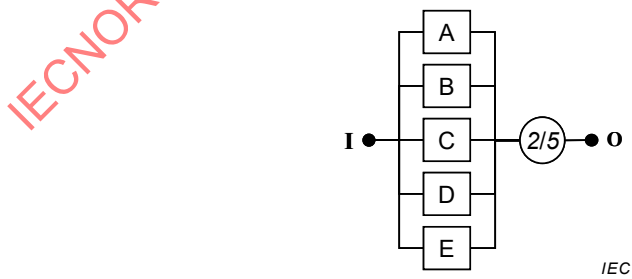


Figure 39 – 2 sur 5 entités non identiques

La disponibilité d'un système de ce type peut être évaluée par l'une des techniques décrites en 11.3, 11.4, 11.5 ou 11.6. Parmi elles, la table de vérité décrite en 11.4 exige 32 entrées, dont 6 mènent à la défaillance du système:

$$(\bar{a} \cdot \bar{b} \cdot \bar{c} \cdot \bar{d} \cdot \bar{e}), (\bar{a} \cdot \bar{b} \cdot \bar{c} \cdot \bar{d} \cdot e), (\bar{a} \cdot \bar{b} \cdot \bar{c} \cdot d \cdot \bar{e})$$

$$(\bar{a} \cdot \bar{b} \cdot c \cdot \bar{d} \cdot \bar{e}), (\bar{a} \cdot b \cdot \bar{c} \cdot \bar{d} \cdot \bar{e}), (a \cdot \bar{b} \cdot \bar{c} \cdot \bar{d} \cdot \bar{e})$$

Donc, l'indisponibilité  $U_S$  peut en être déduite sous la forme

$$\begin{aligned} U_S = & (1 - A_A) \cdot (1 - A_B) \cdot (1 - A_C) \cdot (1 - A_D) \cdot (1 - A_E) + (1 - A_A) \cdot (1 - A_B) \cdot (1 - A_C) \cdot (1 - A_D) \cdot A_E + \\ & (1 - A_A) \cdot (1 - A_B) \cdot (1 - A_C) \cdot A_D \cdot (1 - A_E) + (1 - A_A) \cdot (1 - A_B) \cdot A_C \cdot (1 - A_D) \cdot (1 - A_E) + \\ & (1 - A_A) \cdot A_B \cdot (1 - A_C) \cdot (1 - A_D) \cdot (1 - A_E) + A_A \cdot (1 - A_B) \cdot (1 - A_C) \cdot (1 - A_D) \cdot (1 - A_E) \end{aligned} \quad (61)$$

et donc  $A_S = 1 - U_S$  peut être déterminée.

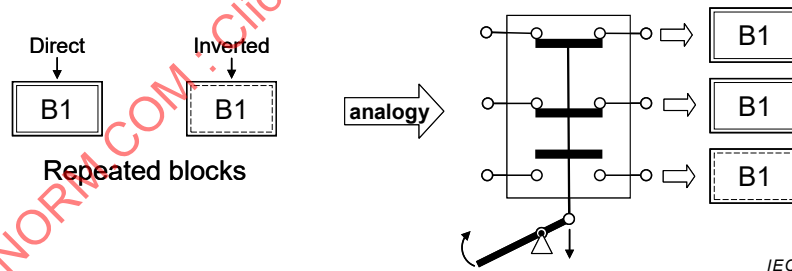
Dans la Formule (61),  $A_S, U_S$  and  $A_A, A_B, \dots$  peuvent être remplacés par  $A_S(t), U_S(t)$  and  $A_A(t), A_B(t), \dots$  pour les calculs en fonction du temps.

## 12 Extension des techniques de diagramme de fiabilité

### 12.1 Diagrammes de fiabilité non cohérents

Les diagrammes de fiabilité non cohérents sont une extension des BDF représentant des fonctions logiques monotones vers des BDF représentant des fonctions logiques non monotones. Cela peut correspondre, par exemple, à des systèmes défaillants "réparés" suite à une défaillance supplémentaire ou à des systèmes en état de fonctionnement mis en panne suite à une réparation. Cela est généralement peu réaliste pour les systèmes "physiques", mais se produit souvent avec les systèmes "logiques" ou avec les modèles générés automatiquement par des outils de génération de modèle.

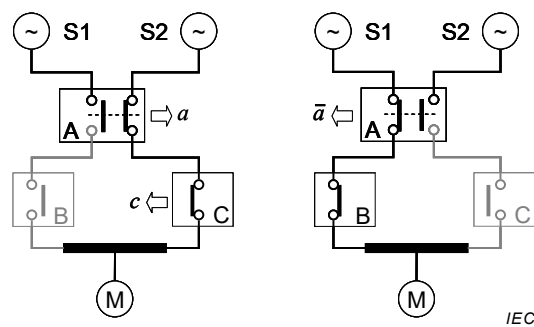
La principale différence par rapport à un BDF ordinaire est qu'un bloc donné peut apparaître dans ses deux états (disponible/indisponible). Comme le montre la Figure 40, un nouveau symbole a été introduit à cet effet.



| Anglais         | Français      |
|-----------------|---------------|
| Direct          | Direct        |
| Inverted        | Inversé       |
| Analogy         | Analogie      |
| Repeated blocks | Blocs répétés |

Figure 40 – Bloc direct et inversé

Le fonctionnement des blocs "inversés" peut être illustré par analogie électrique: à la Figure 40, lorsque B1 est disponible (contacts fermés), le bloc inversé B1 est indisponible (contacts ouverts) et inversement. Cela est également illustré par le circuit électrique présenté à la Figure 41.



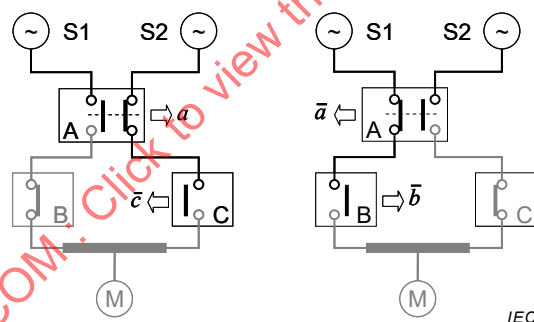
**Figure 41 – Exemple de circuit électrique avec un interrupteur A**

La configuration nominale du système est présentée sur le côté gauche de la Figure 41. Vis-à-vis de l'alimentation du moteur M par S2, A est disponible lorsque le contact vers S2 est fermé. Il est indisponible lorsque ce même contact est ouvert.

Le moteur M peut être alimenté par la source électrique S2 ou, si elle n'est pas disponible, par la source électrique S1. Grâce à l'interrupteur A, il ne peut pas être alimenté simultanément par S1 et S2 afin d'éviter les courts-circuits entre les sources.

La Figure 41 met en évidence les deux chemins de succès permettant d'alimenter le moteur M:

- A est commuté vers S2 et l'interrupteur C est fermé:  $a \bullet c$ ;
- A est commuté vers S1 et l'interrupteur B est fermé:  $\bar{a} \bullet b$ .

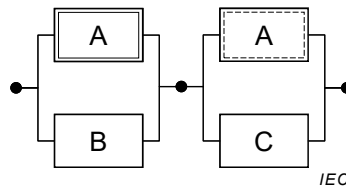


**Figure 42 – Circuit électrique: chemins de défaillance**

De la même manière, la Figure 42 présente les chemins de défaillance du même réseau électrique:

- A est commuté vers S2 et l'interrupteur C est ouvert:  $a \bullet \bar{c}$ ;
- A est commuté vers S1 et l'interrupteur B est ouvert:  $\bar{a} \bullet \bar{b}$ .

A, B et C étant des composants à deux états, ce système électrique peut être modélisé par le BDF présenté à la Figure 43 (par souci de simplicité, S1, S2 et M sont considérés comme étant parfaits). Ce BDF, qui repose sur des chemins de défaillance, met en œuvre des blocs répétés dans les états directs et inversés afin de modéliser les deux positions de l'interrupteur A.



**Figure 43 – Exemple de BDF avec des blocs aux états inversés**

La structure logique de la Figure 43 est plutôt générale et peut se présenter dans d'autres situations. Par exemple, l'état du bloc A peut impacter la valeur d'un paramètre physique  $\theta$ :

- lorsque le bloc A est disponible (fonctionnement nominal),  $\theta$  est inférieur à un seuil donné  $\theta_0$ , B est inhibé et rend C apte à fonctionner;
- lorsque le bloc A est défaillant,  $\theta$  devient supérieur à  $\theta_0$  et cela empêche le fonctionnement de C et rend B apte à fonctionner.

Ce BDF correspond à l'équation logique suivante:  $s = (a + b) \bullet (\bar{a} + c)$ .

Cette équation donne les trois chemins de succès suivants:  $(a \bullet c), (\bar{a} \bullet b), (b \bullet c)$ .

Cela montre que, outre les deux chemins de succès identifiés ci-dessus à la Figure 41, il en existe un troisième:  $b \bullet c$ . Dans ce cas, l'état de A n'a aucune importance.

À l'inverse du cas ordinaire, les chemins de succès ne sont pas uniquement composés de blocs disponibles. Cela produit les effets secondaires suivants:

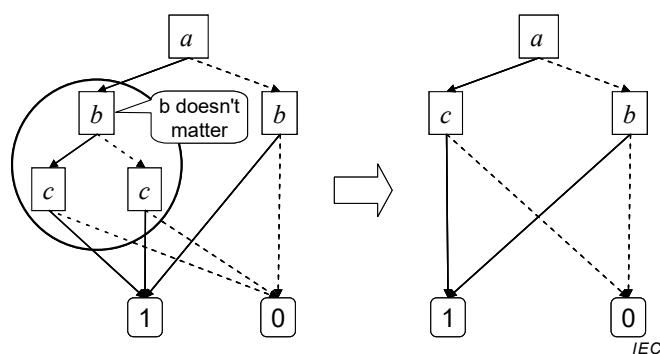
- lorsque ce système est, par exemple, à l'état de disponibilité,  $\bar{a} \bullet b \bullet \bar{c}$ , il passe à l'état d'indisponibilité  $a \bullet b \bullet \bar{c}$  lorsque A passe à l'état de disponibilité. En d'autres termes, l'état de succès  $\bar{a} \bullet b \bullet \bar{c}$  devient défaillant lorsque A est réparé;
- lorsque ce système est, par exemple, à l'état d'indisponibilité,  $a \bullet b \bullet \bar{c}$ , il passe à l'état de disponibilité  $\bar{a} \bullet b \bullet \bar{c}$  lorsque A passe à l'état d'indisponibilité. En d'autres termes, l'état de défaillance  $a \bullet b \bullet \bar{c}$  est réparé lorsque A tombe en panne.

Ce comportement contre-intuitif est une propriété classique des BDF non cohérents modélisant les fonctions logiques non monotones. Cela donne lieu à des difficultés lorsque les chemins de succès minimaux ou les chemins de défaillance minimaux sont nécessaires pour l'analyse quantitative. Par exemple, les deux chemins de défaillance,  $(\bar{a} \bullet \bar{b})$  et  $(a \bullet \bar{c})$ , sont aisément identifiés à partir de la Figure 43, mais pas le troisième  $(\bar{b} \bullet \bar{c})$ . Ce dernier n'est pas réellement évident et ne peut pas être déterminé par les algorithmes classiques relatifs aux coupes minimales.

Pour les BDF non cohérents, les concepts de coupes minimales ou d'ensembles de fermeture minimaux ne tiennent plus. Il convient de les remplacer par le concept d'implicants premiers et

- les trois chemins de succès  $(a \bullet c), (\bar{a} \bullet b), (b \bullet c)$  sont trois implicants premiers liés au succès du système,
- les trois chemins de défaillance  $(\bar{a} \bullet \bar{b}), (a \bullet \bar{c}), (\bar{b} \bullet \bar{c})$  sont trois implicants premiers liés à la défaillance du système.

Cela implique que les algorithmes populaires reposant sur l'utilisation des coupes minimales ou sur les ensembles de fermeture minimaux ne sont plus valides pour les calculs de probabilité des BDF non cohérents.



| Anglais                 | Français                      |
|-------------------------|-------------------------------|
| <i>b doesn't matter</i> | <i>b n'a pas d'importance</i> |

**Figure 44 – BDD équivalent à la Figure 43**

Heureusement, et comme le montre la Figure 44, l'approche BDD peut être aisément mise en œuvre pour les BDF non cohérents. Il n'existe aucune différence avec un BDD généré pour un BDF cohérent, et le BDD de la Figure 44 peut être utilisé pour le calcul de probabilité du BDF présenté à la Figure 43 exactement comme s'il était cohérent. Par conséquent, l'utilisation de BDD permet de surmonter les difficultés rencontrées lors de l'utilisation des ensembles de fermeture minimaux ou des coupes minimales. Néanmoins, les logiciels de traitement des BDF peuvent rarement traiter des implicants premiers.

## 12.2 Diagrammes de fiabilité dynamiques

### 12.2.1 Généralités

Le diagramme de fiabilité dynamique (BDFD) est une extension des BDF communs vers des BDF mettant en œuvre des blocs qui interagissent entre eux ou avec des éléments externes. L'objectif est similaire à celui des arbres de panne dynamiques (voir les références [16] et [17]), mais du point de vue du succès.

Les BDF développés dans les précédents chapitres pour modéliser les systèmes réparés (les processus markoviens pilotés par BDF décrits en C.4, par exemple) sont évidemment des modèles dynamiques, mais le terme BDFD est en général utilisé pour dénommer des BDF satisfaisant à toutes les hypothèses de base de l'Article 5, sauf la dernière concernant l'indépendance des blocs (voir 5.2 d).

Certaines interactions dynamiques ont déjà été rencontrées dans la présente norme lors du traitement des redondances en attente, des structures *m/n* ou des calculs de fiabilité des systèmes réparés.

Les arbres de panne dynamiques ont fait l'objet d'un travail plus approfondi que les BDF dynamiques, mais les problèmes sont similaires. Par conséquent, la présente norme propose d'adapter et d'utiliser les symboles graphiques habituellement utilisés pour les arbres de panne dynamiques.

Certains types d'interactions dynamiques sont analysés dans les ouvrages de référence [15], mais ils sont virtuellement infinis. Les effets de ces interactions peuvent être

- locaux: l'état des blocs est impacté, mais les règles logiques des BDF ordinaires sont toujours valides pour établir l'état du système global,
- systémiques: les règles logiques des BDF ordinaires ne sont plus valides pour établir l'état du système global.

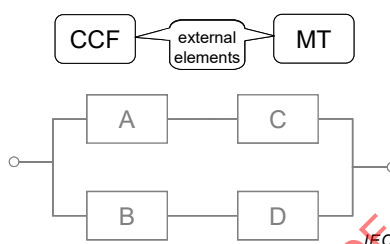
### 12.2.2 Interactions locales

Les interactions qui impactent uniquement l'état des blocs peuvent être réparties dans les catégories suivantes:

- interactions entre les blocs du BDFD;
- interactions entre des éléments externes au BDFD et les blocs du BDFD.

Un événement se produisant sur un bloc ou un élément externe (parfois appelé événement déclencheur) interagit avec le comportement d'un ou de plusieurs des autres blocs du BDFD.

Un nouveau symbole est nécessaire pour faire la différence entre les éléments externes qui n'appartiennent pas à la structure du BDF et les blocs appartenant au BDF lui-même. Il est présenté à la Figure 45, dans laquelle une défaillance de cause commune (DCC) et une équipe de maintenance (EM) ont été présentées.



| Anglais           | Français          |
|-------------------|-------------------|
| External elements | Éléments externes |

**Figure 45 – Symbole pour les éléments externes**

Des exemples d'interactions locales sont présentés ci-dessous:

- Dépendance fonctionnelle:
  - défaillance de cause commune: lorsqu'une DCC se produit, tous les blocs associés sont immédiatement défaillants. Cela constitue une importante dépendance fonctionnelle qui peut être modélisée comme représenté à la Figure 46;
  - perte d'énergie: en cas de perte d'énergie, tous les blocs associés s'arrêtent immédiatement (état d'indisponibilité). Cela constitue également une importante dépendance fonctionnelle;
  - dépendance liée à l'équipe de réparation: si plusieurs blocs sont réparés par la même équipe de réparation, un bloc défaillant doit attendre avant d'être réparé lorsque l'équipe de réparation est occupée avec un autre bloc défaillant. Cela constitue une dépendance fonctionnelle qui peut être modélisée comme représenté à la Figure 48;
  - réparation collective: plusieurs blocs sont réparés dans le cadre de la même opération de réparation;
  - redondance en attente: la défaillance du bloc actif provoque le démarrage du bloc en attente (voir Figure 11);
  - pièces de rechange: en cas de défaillance du bloc actif, une pièce de rechange peut être nécessaire pour la réparation. Par conséquent, la réparation est possible uniquement si une pièce de rechange est disponible. De plus, la pièce de rechange utilisée pour réparer un bloc devient indisponible pour réparer un autre bloc;
  - blocs en série: en cas de défaillance ou de réparation de l'un des blocs en série, les autres peuvent être arrêtés (la sortie du bloc défaillant étant nécessaire pour les blocs suivants de la série, par exemple).
  - etc.

- Événements pouvant se produire uniquement dans un ordre donné (un événement ne peut pas se produire avant un autre):
  - la réparation d'un bloc ne peut pas commencer avant la défaillance de ce bloc. Cette dépendance fonctionnelle a déjà été traitée avec les BDF ordinaires pour les calculs de disponibilité, de fiabilité et de fréquence;
  - pour un ensemble donné de blocs ( $B_1, B_2, \dots, B_n$ ), la réparation commence uniquement lorsque tous les blocs sont défaillants;
  - les blocs deviennent non réparables après la défaillance du système global. C'est ce qu'il se produit lorsque les calculs de fiabilité sont réalisés;
  - plus généralement, pour un ensemble d'événements ( $e_1, e_2, \dots, e_n$ ), cela implique que  $e_2$  ne peut pas se produire tant que  $e_1$  ne s'est pas produit, que  $e_3$  ne peut pas se produire tant que  $e_2$  ne s'est pas produit, ..., que  $e_n$  ne peut pas se produire tant que  $e_{n-1}$  ne s'est pas produit. En d'autres termes,  $e_1$  est inhibé par  $\bar{e}_2$ ,  $e_2$  est inhibé par  $\bar{e}_3$ , ...,  $e_n$  est inhibé par  $\bar{e}_{n-1}$ . Par conséquent, les événements peuvent uniquement se produire dans la séquence  $e_1, e_2, \dots, e_n$ . Cela peut être le cas lorsqu'un dispositif électrique ne peut pas être démarré avant que l'alimentation électrique ne soit établie ou lorsqu'un dispositif en attente à froid ne peut pas être activé avant la défaillance du dispositif actif. Cette interaction s'apparente aux portes logiques séquentielles (souvent notées SEQ) introduites dans l'analyse par arbre de panne dynamique (voir la porte logique SEQ au Tableau 4);
  - etc.

### 12.2.3 Interactions dynamiques systémiques

Ces interactions n'impliquent pas nécessairement des dépendances fonctionnelles entre les blocs qui peuvent se comporter indépendamment les uns des autres. Elles se produisent lorsque les règles logiques ordinaires ne peuvent pas être utilisées.

Quelques exemples sont les suivants:

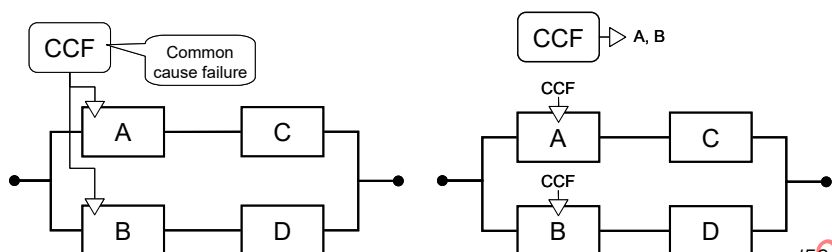
- Vote majoritaire  $m/n$ : cette fonction logique a déjà été analysée (voir 7.5.1 et 9.4) et une porte logique spéciale a été introduite pour la modéliser.
- Événements qui doivent se produire dans un ordre donné:
  - demande qui déclenche une action réalisée par un bloc B donné: si la demande survient avant la défaillance de B, l'action est réalisée et le système reste disponible. Si la demande est formulée après la défaillance de B, l'action n'est pas réalisée et le système tombe en panne;
  - vanne d'isolement protégeant un système contre les surpressions: un événement dangereux se produit uniquement si la vanne est ouverte avant que la pression ne soit tombée en amont de la vanne d'isolement;
  - plus généralement, pour un ensemble d'événements  $e_1, e_2, \dots, e_n$ , la sortie est générée uniquement si les événements se produisent dans cet ordre donné, sinon, aucune sortie n'est générée. Cette interaction s'apparente aux portes logiques ET "prioritaires" (souvent notées PAND) présentes dans l'analyse par arbre de panne dynamique et qui peuvent également être utilisées pour les BDFD. Cela peut être représenté sous la forme d'une porte logique combinant l'entrée de plusieurs blocs.

Des portes logiques particulières sont nécessaires pour représenter les dépendances dynamiques systémiques, comme la porte logique  $m/n$  et les portes logiques PAND ou SEQ présentées au Tableau 4 et qui sont des extensions populaires des arbres de panne dynamiques.

La porte logique  $m/n$  a déjà été analysée, les portes logiques PAND et SEQ étant analysées ci-après (voir Figure 49 à Figure 52). Les symboles mis en œuvre habituellement dans les arbres de panne dynamiques ont été utilisés ici, mais des portes logiques NON ont été insérées dans les entrées et les sorties afin d'assurer la cohérence avec la logique du BDF.

#### 12.2.4 Représentations graphiques des interactions dynamiques

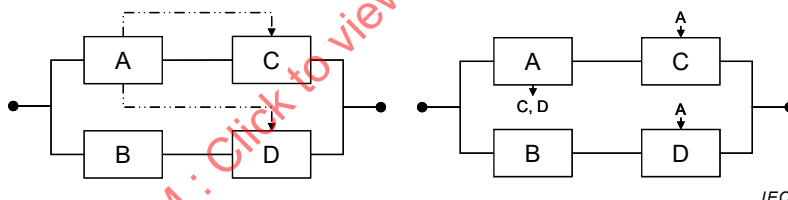
Comme indiqué en 12.2.2 et 12.2.3, les types d'interactions dynamiques possibles sont virtuellement illimités. Par conséquent, même si certaines tentatives ont été réalisées (voir les références [15], [16] et [17]) pour proposer des symboles graphiques correspondant à des cas particuliers, elles ne couvrent pas tous les cas, et seuls certains éléments graphiques de base peuvent être proposés dans la présente norme.



| Anglais              | Français                     |
|----------------------|------------------------------|
| Common cause failure | Défaillance de cause commune |
| CCF                  | DCC                          |

**Figure 46 – Interaction dynamique entre une DCC et les blocs de BDF**

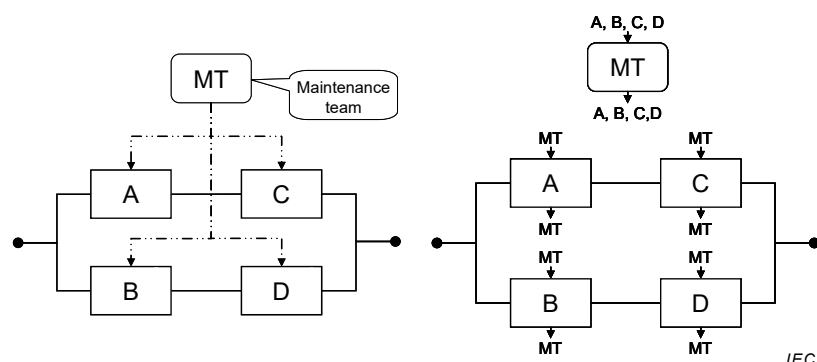
La Figure 46 présente les interactions fortes (c'est-à-dire les dépendances fonctionnelles fortes) entre un élément externe et certains blocs: le bloc A et le bloc B tombent en panne lorsque la défaillance de cause commune représentée par le bloc externe DCC se produit.



**Figure 47 – Manières différentes d'indiquer les interactions dynamiques entre les blocs**

La Figure 47 montre deux manières de représenter des interactions (c'est-à-dire des dépendances fonctionnelles) entre des blocs: l'état du bloc C et du bloc D dépendent de l'état du bloc A.

Les mêmes mécanismes ont été mis en œuvre à la Figure 48 pour représenter l'interaction entre l'équipe de réparation unique et les blocs réparés.

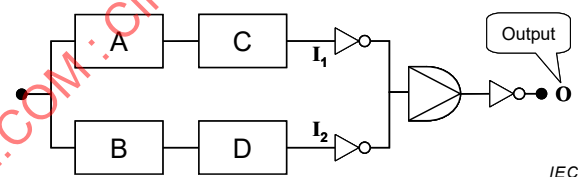


| Anglais          | Français              |
|------------------|-----------------------|
| Maintenance team | Équipe de maintenance |

**Figure 48 – Interaction dynamique entre une équipe de réparation unique et les blocs de BDF**

Ces représentations graphiques simples ont pour objet d'indiquer la présence de certaines interactions dynamiques entre les blocs et les éléments externes. Les lignes en pointillés sur le côté gauche de la Figure 47 et de la Figure 48 peuvent être utilisées lorsque seulement quelques interactions doivent être représentées dans un BDF. Si de nombreuses interactions sont à représenter, la proposition sur le côté droit de la Figure 47, de la Figure 46 et de la Figure 48 est plus claire. Il convient de spécifier par ailleurs la véritable nature des interactions elles-mêmes. La principale utilisation de ces représentations est de fournir des moyens graphiques pour s'assurer que les éléments externes sont bien identifiés sur le BDF.

La Figure 49 montre comment une porte logique PAND peut être utilisée dans un BDFD: la sortie O passe à indisponible uniquement si  $I_1$  y passe avant  $I_2$ .



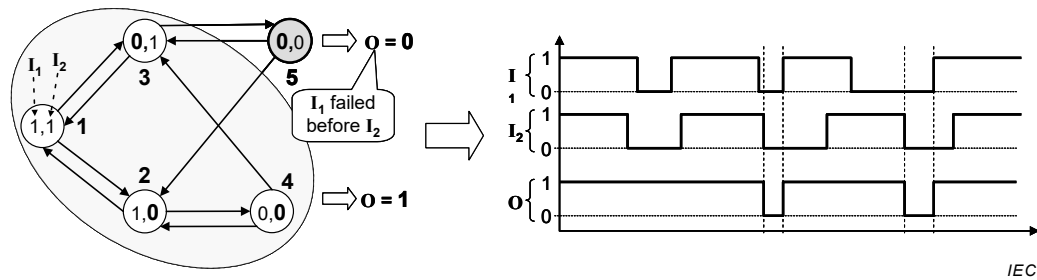
| Anglais | Français |
|---------|----------|
| Output  | Sortie   |

**Figure 49 – Mise en œuvre d'une porte logique PAND**

Le fonctionnement de la porte logique PAND est représenté à la Figure 50. La porte logique PAND équivaut aux 5 états de l'automate à états finis présenté sur le côté gauche de la figure.

- État 1:  $I_1$  et  $I_2$  sont disponibles. La sortie O est alors disponible.
- État 2:  $I_2$  est passé en premier à l'état d'indisponibilité, et  $I_1$  est toujours disponible. La sortie O est alors disponible.
- État 3:  $I_1$  est passé en premier à l'état d'indisponibilité, et  $I_2$  est toujours disponible. La sortie O est alors disponible.
- État 4:  $I_1$  et  $I_2$  sont passés à l'état d'indisponibilité, mais  $I_2$  y est passé en premier. La sortie O est alors disponible.

- État 5:  $I_1$  et  $I_2$  sont passés à l'état d'indisponibilité, mais  $I_1$  y est passé en premier. La sortie  $O$  est passée à l'état d'indisponibilité.

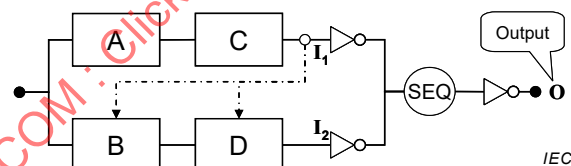


| Anglais             | Français               |
|---------------------|------------------------|
| .. failed before .. | .. défaillant avant .. |

**Figure 50 – Automate à états finis équivalent et exemple de chronogramme pour une porte logique PAND**

Donc, lorsque les entrées  $I_1$  et  $I_2$  varient entre 1 et 0, la sortie de la porte logique PAND (Figure 49) change selon les règles présentées par cet automate à états finis. Cela donne, par exemple, le chronogramme présenté sur le côté droit de la Figure 50. Un réseau de Petri modélisant le même automate à états finis est analysé à l'Annexe E et à la Figure E.6.

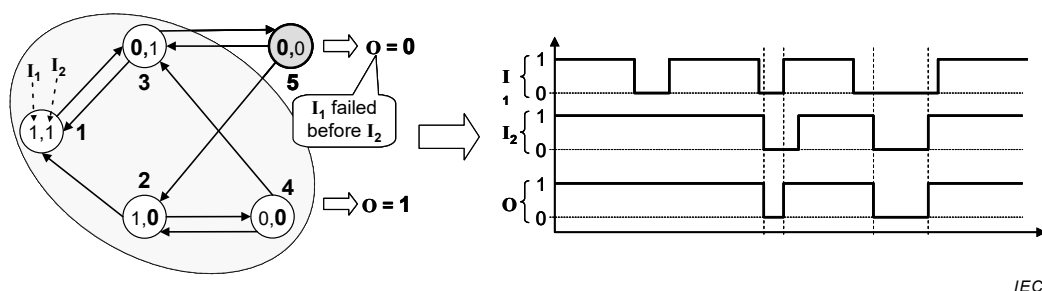
La Figure 51 montre comment une porte logique SEQ peut être utilisée dans un BDFD: comme pour la porte logique PAND, la sortie  $O$  passe à indisponible uniquement si  $I_1$  y passe avant qu' $I_2$  passe à disponible. La différence est que  $I_2$  ne peut pas passer à l'état d'indisponibilité avant que  $I_1$  n'y soit préalablement passé. Par conséquent, la défaillance de B et de D est inhibée tant que  $I_1$  est disponible, cela étant indiqué grâce aux interactions dynamiques tracées en pointillés.



| Anglais | Français |
|---------|----------|
| Output  | Sortie   |

**Figure 51 – Mise en œuvre d'une porte logique SEQ**

Le fonctionnement est représenté à la Figure 52. La porte logique SEQ équivaut aux 5 états de l'automate à états finis présenté sur le côté gauche de la figure. Les états sont les mêmes que pour la porte logique PAND, sauf qu'il n'existe aucune transition de l'état 1 à l'état 2 afin de forcer l'ordre des défaillances:  $I_1$  d'abord, puis  $I_2$ .



IEC

| Anglais             | Français               |
|---------------------|------------------------|
| .. failed before .. | .. défaillant avant .. |

**Figure 52 – Automate d'états finis équivalent et exemple de chronogramme pour une porte logique SEQ**

Comme le montre le chronogramme,  $I_2$  ne peut pas être défaillant avant que  $I_1$  ne le soit.

Un réseau de Petri modélisant le même automate d'états finis est analysé à l'Annexe E, à la Figure E.6 et à la Figure E.7.

### 12.2.5 Calculs de probabilité

Les ouvrages de référence proposent de procéder au calcul de probabilité à l'aide de l'approche markovienne (voir les références [2], [29] et [30]). Néanmoins, la génération d'un processus markovien pour un BDFD global est rapidement limitée par l'explosion combinatoire du nombre d'états. Par conséquent, il convient de réserver cette approche à de petites parties indépendantes du BDFD: comme cela a été le cas pour les processus markoviens pilotés par BDF décrits à l'Article C.4.

Une autre approche proposée dans les ouvrages de référence consiste à faire le lien entre les BDFD et les automates à états finis (automate d'événements ou réseau de Petri). Cette méthode est plus efficace que l'approche markovienne, mais les calculs analytiques ne sont plus possibles, et une simulation de Monte Carlo doit être mise en œuvre.

Les réseaux de Petri pilotés par BDF décrits à l'Annexe E sont un moyen efficace de mélanger les approches BDF et RDP afin de traiter les problèmes et calculs liés aux BDF.

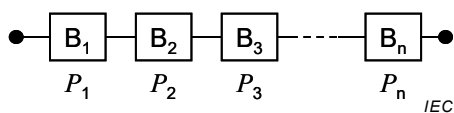
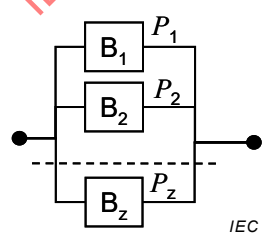
## Annexe A (informative)

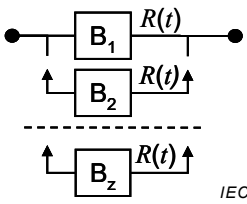
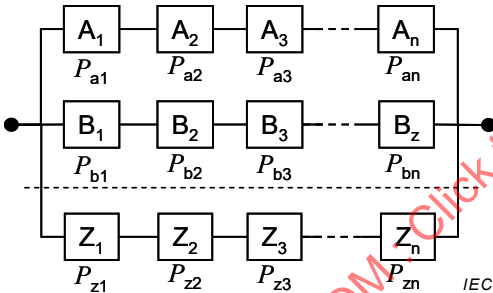
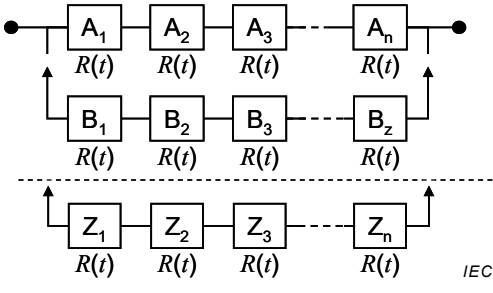
### Récapitulatif des formules

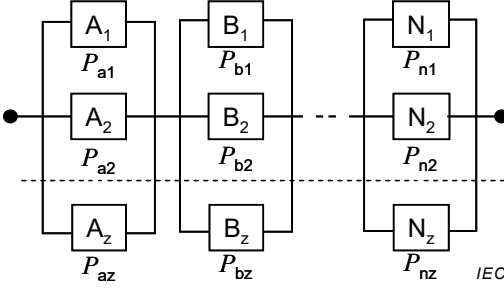
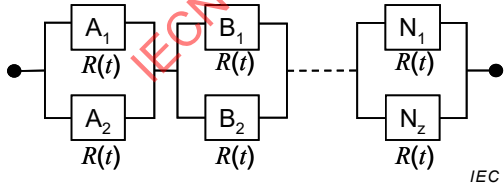
Mise en garde: Les formules présentées au Tableau A.1 sont destinées à être utilisées par des personnes ayant connaissance des hypothèses et principes mathématiques sous-jacents, et des limites lorsque des approximations sont mises en œuvre.

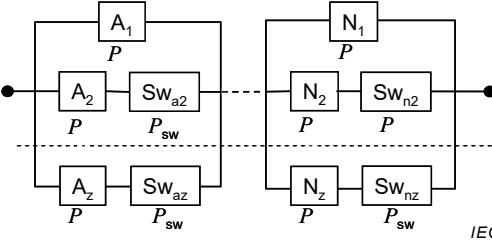
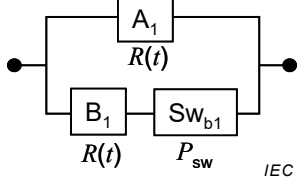
NOTE Dans le Tableau A.1, les termes "actif" et "en attente" sont souvent utilisés. Le premier terme est utilisé pour indiquer que les blocs concernés (chacun d'eux pouvant consister en un composant, un sous-système, un système, etc.) sont sous tension et sont ainsi la cause d'une défaillance. Le second terme est utilisé pour indiquer que le ou les blocs concernés sont hors tension et ne sont pas la cause d'une défaillance.

**Tableau A.1 – Exemple d'équations pour le calcul de la probabilité de succès des configurations de base**

| Configuration de base                                                                                                                 | Équation $P_S$ , $R_S(t)$ , $A_S(t)$ du système                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>1 Structures série</b><br>                        | <p><b>A Cas général</b><br/>           Probabilités constantes:<br/> <math display="block">P_S = P_1 \cdot P_2 \cdot \dots \cdot P_n</math>           Probabilités en fonction du temps:<br/> <math display="block">R_S(t) = R_1(t) \cdot R_2(t) \cdot \dots \cdot R_n(t)</math> <math display="block">A_S(t) = A_1(t) \cdot A_2(t) \cdot \dots \cdot A_n(t)</math></p> <p><b>B</b> Avec <math>P_1 = P_2 = \dots = P_n = P</math><br/> <math display="block">\Rightarrow P_S = P^n</math></p> <p><b>C</b> Avec <math>R_1(t) = R_2(t) = \dots = R_n(t) = R(t)</math><br/> <math display="block">\Rightarrow R_S(t) = R(t)^n</math></p> <p><b>D</b> Avec <math>A_1(t) = A_2(t) = \dots = A_n(t) = A(t)</math><br/> <math display="block">\Rightarrow A_S(t) = A(t)^n</math></p> |
| <b>2 Structures parallèles</b><br><b>Actif</b><br> | <p><b>A Cas général actif</b><br/>           Probabilités constantes:<br/> <math display="block">P_S = 1 - (1 - P_1) \cdot (1 - P_2) \cdot \dots \cdot (1 - P_z)</math>           Probabilités en fonction du temps:<br/> <math display="block">R_S(t) : \text{pas de formule générale simple (voir NOTE 1)}</math> <math display="block">A_S(t) = 1 - [1 - A_1(t)] \cdot [1 - A_2(t)] \cdot \dots \cdot [1 - A_z(t)]</math></p> <p><b>B</b> Avec <math>P_1 = P_2 = \dots = P</math> <math>\Rightarrow P_S = 1 - (1 - P)^z</math></p> <p><b>C</b> Avec <math>A_1(t) = A_2(t) = \dots = A_z(t) = A(t)</math><br/> <math display="block">\Rightarrow A_S(t) = [1 - A(t)]^z</math></p>                                                                                           |

| Configuration de base                                                                                                                                                                                               | Équation $P_S$ , $R_S(t)$ , $A_S(t)$ du système                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p><b>En attente</b></p>  <p style="text-align: right;">IEC</p>                                                                    | <p><b>D</b> En attente avec <math>R(t) = A(t) = e^{-\lambda \cdot t}</math> (c'est-à-dire, entités non réparées)</p> $R_S(t) = A_S(t) = e^{-\lambda \cdot t} + \lambda \cdot t \cdot e^{-\lambda \cdot t} + \dots + \frac{(\lambda \cdot t)^{z-1} e^{-\lambda \cdot t}}{(z-1)!}$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |
| <p><b>3 Structures série-parallèles</b><br/>(systèmes redondants)</p> <p><b>Actif</b></p>  <p style="text-align: right;">IEC</p> | <p><b>A Cas général actif</b><br/>Probabilités constantes</p> $P_S = 1 - \prod_{i=a}^z (1 - P_{i1} \cdot P_{i2} \dots P_{in}) = 1 - \prod_{i=a}^z [1 - \prod_{j=1}^n P_{ij}]$ <p>Probabilités en fonction du temps:</p> <p><math>R_S(t)</math> : pas de formule générale simple (voir NOTE 1)</p> $A_S(t) = 1 - \prod_{i=a}^z [1 - \prod_{j=1}^n A_{ij}(t)]$ <p><b>B Actif avec</b></p> $P_{i1} = P_{i2} = \dots = P_{in} = P_i \quad \forall i \Rightarrow P_S = 1 - \prod_{i=a}^z (1 - P_i^n)$ <p><b>C Actif avec</b></p> $A_{i1}(t) = A_{i2}(t) = \dots = A_{in}(t) = A_i(t) \quad \forall i \Rightarrow$ $A_S(t) = 1 - \prod_{i=a}^z [1 - A_i(t)^n]$ <p><b>D Actif avec</b></p> $P_{ij} = P \quad \forall i, j \Rightarrow P_S = 1 - \prod_{i=a}^z (1 - P^n)$ <p><b>E Actif avec</b></p> $A_{ij}(t) = A(t) \quad \forall i, j \Rightarrow A_S(t) = 1 - [1 - A(t)^n]^z$ |
| <p><b>En attente</b></p>  <p style="text-align: right;">IEC</p>                                                                  | <p><b>F</b> En attente avec <math>R(t) = A(t) = e^{-\lambda t}</math> (c'est-à-dire, entités non réparées)</p> $R_S(t) = A_S(t) = e^{-n\lambda t} + n\lambda t \cdot e^{-n\lambda t} + \dots + \frac{(n\lambda t)^{z-1} e^{-n\lambda t}}{(z-1)!}$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |

| Configuration de base                                                               | Équation $P_S$ , $R_S(t)$ , $A_S(t)$ du système                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |
|-------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>4 Structures parallèles-série</b><br>(éléments redondants)                       |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |
| <b>Actif</b>                                                                        | <b>A Cas général actif</b><br>Probabilités constantes $P_S = \prod_{i=a}^n \left\{ 1 - \prod_{j=1}^z (1 - P_{ij}) \right\}$ Probabilités en fonction du temps: $R_S(t) : \text{pas de formule générale simple (voir NOTE 1)}$ $A_S(t) = \prod_{i=a}^n \left\{ 1 - \prod_{j=1}^z [1 - A_{ij}(t)] \right\}$                                               |
|   | <b>B Actif avec</b> $P_{i1} = P_{i2} = \dots = P_i \quad \forall i \Rightarrow P_S = \prod_{i=a}^n [1 - (1 - P_i)^z]$ <b>E Actif avec</b> $A_{i1}(t) = A_{i2}(t) = \dots = A_i(t) \quad \forall i$ $\Rightarrow A_S(t) = \prod_{i=a}^n \{1 - [1 - A_i(t)]^z\}$                                                                                          |
|  | <b>F Actif avec</b> $P_{ij} = P \quad \forall i, j \Rightarrow P_S = [1 - (1 - P)^z]^n$ <b>G Actif avec</b> $A_{ij}(t) = A(t) \quad \forall i, j \Rightarrow A_S(t) = \{1 - [1 - A(t)]^z\}^n$ <b>H En supposant <math>R(t) = A(t) = e^{-\lambda \cdot t}</math></b> $R_S(t) = A_S(t) = (2 \cdot e^{-\lambda \cdot t} - e^{-2 \cdot \lambda \cdot t})^n$ |
| <b>En attente</b>                                                                   | <b>D En attente avec <math>R(t) = A(t) = e^{-\lambda \cdot t}</math></b> $R_S(t) = A_S(t) = (e^{-\lambda \cdot t} + \lambda \cdot t \cdot e^{-\lambda \cdot t})^n$                                                                                                                                                                                      |

| Configuration de base                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   | Équation $P_S$ , $R_S(t)$ , $A_S(t)$ du système                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p><b>5 Structures parallèles-séries</b><br/>(éléments redondants)</p>                                                                                                                                                                                                                | <p><b>A</b> Actif avec <math>P_{ij} = P \quad \forall i, j</math> sauf <math>P_{sw}</math></p> $\Rightarrow P_S = [1 - (1 - P) \cdot (1 - P \cdot P_{sw})^{z-1}]^n$ <p><b>B</b> Actif avec <math>A_{ij}(t) = A(t) \quad \forall i, j</math> sauf <math>A_{sw}(t)</math></p> $\Rightarrow A_S(t) = \left\{ 1 - [1 - A_S(t)] \cdot [1 - A_S(t) \cdot A_{sw}(t)]^{z-1} \right\}^n$ <p><b>C</b> Actif avec <math>z = 2, n = 1</math></p> <p>et <math>R_{ij}(t) = A_{ij}(t) = e^{-\lambda t} \quad \forall i, j</math> sauf <math>P_{sw}</math></p> $\Rightarrow R_S(t) = A_S(t) = e^{-\lambda t} + P_{sw} e^{-\lambda t} - P_{sw} e^{-2\lambda t}$ |
| <p>NOTE 1 Dans le cas des blocs non réparés <math>R_S(t) = A_S(t)</math>.</p> <p>NOTE 2 Pour les blocs non réparés avec taux de défaillance constants, <math>P</math> peut être remplacé par <math>R(t) = A(t) = e^{-\lambda t}</math>.</p> <p>NOTE 3 Les formules correspondant aux systèmes en attente reposent sur l'hypothèse selon laquelle la fiabilité des mécanismes de commutation et de détection est de 100 % (<math>P_{sw} = 1</math>).</p> |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |

## Annexe B (informative)

### Méthodes algébriques booléennes

#### B.1 Remarques préliminaires

Outre l'utilisation de tables de vérité booléennes (voir 11.4) et de diagrammes de décision binaires (voir 11.5), l'analyse des BDF décrite jusqu'ici utilise principalement les formules mathématiques algébriques conventionnelles. Cependant, en général, l'algèbre de Boole peut également servir pour de telles analyses, et dans de nombreux cas est beaucoup plus efficace et simple. En particulier, l'utilisation de l'algèbre de Boole peut bien être l'approche la plus simple dès lors

- a) que les BDF contiennent des blocs répétés (voir la Figure 37),
- b) que les BDF contiennent des flèches directionnelles (voir la Figure 10 et la Figure 35),
- c) que le système est particulièrement compliqué,
- d) qu'il est plus facile de construire une expression booléenne pour le succès (ou la défaillance) du système que de construire un BDF,
- e) que le système est composé d'un nombre trop important de blocs pour être géré avec de simples formules.

Le point d) dans la liste ci-dessus est intéressant à noter. Pour de nombreux systèmes et réseaux, la liste des combinaisons d'état de disponibilité (ou de défaillance) des équipements en termes booléens est souvent une tâche plus aisée que la construction du BDF correspondant. En utilisant dès le début l'approche booléenne pour analyser le système, le risque de faire des erreurs au cours de la construction du BDF est complètement éliminé.

Le point e) de la liste ci-dessus peut être lié aux BDF modélisant des systèmes industriels dotés d'une dizaine de composants et se traduisant par l'explosion combinatoire des termes à prendre en compte dans les formules. Cela est particulièrement essentiel lorsque de nombreux blocs répétés doivent également être gérés.

#### B.2 Notation

Les symboles conventionnels  $\cup$  et  $\cap$  indiquant les logiques "OU" et "ET" jouent, pour l'algèbre de Boole, le même rôle que l'addition (+) et la multiplication ( $\cdot$ ) pour l'algèbre ordinaire. C'est la raison pour laquelle, dans ce qui suit, il a été trouvé plus pratique d'utiliser un symbole "+" pour indiquer l'opérateur logique "OU" et un point " $\cdot$ " pour indiquer l'opérateur logique "ET"<sup>2</sup>. Comme d'habitude, une barre placée sur une variable booléenne indique l'inverse ou le complément de la variable concernée: par exemple  $\bar{a}$  est interprété comme "non  $a$ ". Par exemple,  $a \cdot b \cdot \bar{c} \cdot e + f \cdot g$  doit être interprété " $a$  ET  $b$  ET NON  $c$  ET  $e$  OU  $f$  ET  $g$ ". Il convient que le contexte dans lequel les symboles sont utilisés clarifie la signification.

<sup>2</sup> L'avantage d'une telle notation se révèle à l'Annexe B où des expressions du type  $S = a \cdot b + \bar{a} \cdot e \cdot b + \bar{a} \cdot e \cdot d + a \cdot b \cdot e \cdot d + \bar{a} \cdot c \cdot d + a \cdot b \cdot c \cdot d$  se trouvent fréquemment. En prenant cette dernière expression comme exemple et en l'écrivant en utilisant les symboles théoriques, il est obtenu:  $S = a \cap b \cup \bar{a} \cap e \cap b \cup \bar{a} \cap e \cap d \cup a \cap b \cap e \cap d \cup \bar{a} \cap c \cap d \cup a \cap b \cap c \cap d$  qui peut être difficile à interpréter ou à évaluer pour de nombreux lecteurs.

### B.3 Analyse des ensembles de fermeture (chemins de succès) et des coupes (chemins de défaillance)

#### B.3.1 Notion de coupes et d'ensembles de fermeture

Comme indiqué en 8.1, un BDF peut être considéré comme un circuit électrique (voir la Figure 14), et cette analogie est utile pour identifier:

- les ensembles de fermeture qui correspondent à un circuit électrique fermé et représentent des combinaisons de blocs disponibles conduisant à l'état de disponibilité du système. Les ensembles de fermeture sont également les chemins "de succès" du BDF;
- les coupes qui correspondent à un circuit électrique coupé et représentent des combinaisons de blocs indisponibles conduisant à l'état d'indisponibilité du système. Les coupes sont également les chemins "de défaillance" du BDF.

L'utilisation de cette analogie permet de transformer le BDF présenté à la Figure 10 en circuit électrique présenté à la Figure 15. En partant de cette représentation, il est facile d'identifier les différents ensembles de fermeture de ce BDF, et la Figure B.1 et la Figure B.2 présentent différents exemples de combinaisons d'interrupteurs fermés correspondant à l'état de disponibilité du système.

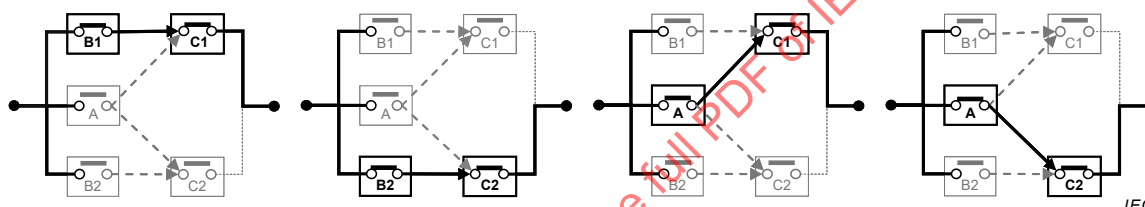


Figure B.1 – Exemples d'ensembles de fermeture minimaux (chemins de succès)

À la Figure B.1, une ouverture (c'est-à-dire une défaillance) des interrupteurs fermés coupe le circuit et mène à l'état d'indisponibilité du système. Tous ces interrupteurs fermés (c'est-à-dire les blocs disponibles) sont nécessaires et suffisants pour entraîner l'état de disponibilité du système. Ces combinaisons sont minimales et sont appelées "ensembles de fermeture minimaux".

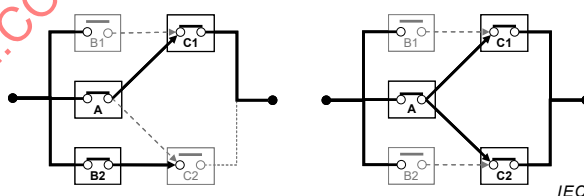


Figure B.2 – Exemples d'ensembles de fermeture non minimaux (chemins de succès non minimaux)

À la Figure B.2, une ouverture des interrupteurs fermés (B2 à gauche ou C1 à droite, par exemple) ne modifie pas l'état de disponibilité du système. Tous les interrupteurs fermés (c'est-à-dire les blocs disponibles) ne sont pas nécessaires pour entraîner l'état de disponibilité du système. Ces combinaisons ne sont pas minimales et sont appelées "ensembles de fermeture non minimaux" (ou ensembles de fermeture ordinaires).

En partant de la même Figure 15, il est également facile d'identifier les différentes coupes de ce BDF, et la Figure B.3 et la Figure B.4 présentent différents exemples de combinaisons d'interrupteurs ouverts correspondant à l'état d'indisponibilité du système.

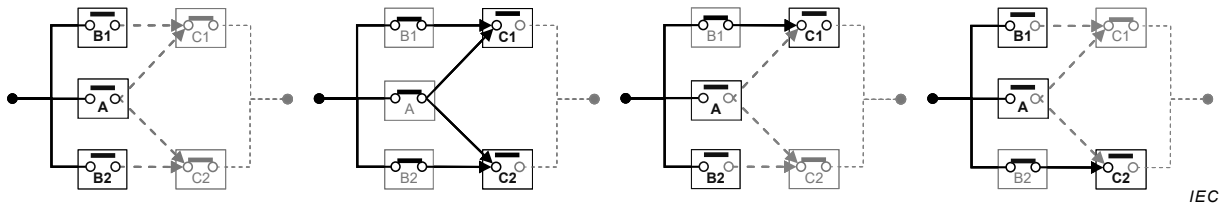


Figure B.3 – Exemples de coupes minimales

À la Figure B.3, une fermeture (c'est-à-dire une réparation) des interrupteurs ouverts ferme le circuit et mène à l'état de disponibilité du système. Tous les interrupteurs ouverts (c'est-à-dire les blocs indisponibles) sont nécessaires et suffisants pour entraîner l'état d'indisponibilité du système. Ces combinaisons sont minimales et sont appelées "coupes minimales".

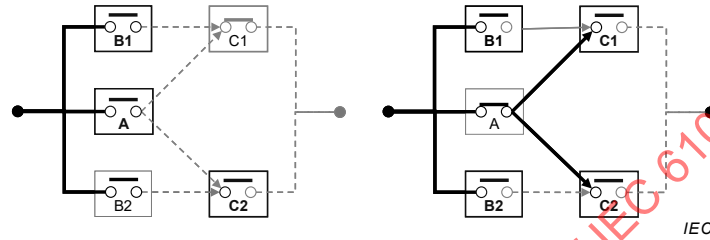


Figure B.4 – Exemples de coupes non minimales

À la Figure B.4, une fermeture des interrupteurs ouverts (C2 à gauche ou B2 à droite, par exemple) ne modifie pas l'état d'indisponibilité du système. Tous les interrupteurs ouverts (c'est-à-dire les blocs indisponibles) ne sont pas nécessaires pour entraîner l'état d'indisponibilité du système. Ces combinaisons ne sont pas minimales et sont appelées "coupes non minimales" (ou coupes tout court).

### B.3.2 Représentation série-parallel à l'aide d'ensembles de fermeture minimaux et de coupes minimales

L'application des propriétés de l'algèbre de Boole permet de représenter l'état de disponibilité du système,  $s$ , comme étant l'union des ensembles de fermeture minimaux ( $\Pi_i$ ) du BDF, et l'état d'indisponibilité du système,  $\bar{s}$ , comme étant l'union des coupes minimales ( $C_k$ ) du BDF.

Cela peut être appliqué à l'exemple précédent qui comporte quatre ensembles de fermeture minimaux:  $(b_1 \cdot c_1)$ ,  $(a \cdot c_1)$ ,  $(a \cdot c_2)$ ,  $(b_2 \cdot c_2)$ . Cela donne:

$$s = \bigcup_i \Pi_i = b_1 \cdot c_1 + a \cdot c_1 + a \cdot c_2 + b_2 \cdot c_2 \quad (\text{B.1})$$

Le même exemple comporte quatre coupes minimales  $(\bar{b}_1 \cdot \bar{a} \cdot \bar{b}_2)$ ,  $(\bar{c}_1 \cdot \bar{c}_2)$ ,  $(\bar{b}_1 \cdot \bar{a} \cdot \bar{c}_2)$ ,  $(\bar{b}_2 \cdot \bar{a} \cdot \bar{c}_1)$  et donne:

$$\bar{s} = \bigcup_j C_j = \bar{b}_1 \cdot \bar{a} \cdot \bar{b}_2 + \bar{c}_1 \cdot \bar{c}_2 + \bar{b}_1 \cdot \bar{a} \cdot \bar{c}_2 + \bar{b}_2 \cdot \bar{a} \cdot \bar{c}_1 \quad (\text{B.2})$$

Ces formules fournissent une "double" représentation du même système. La Formule (B.1) est axée sur le succès du système, alors que la Formule (B.2) est axée sur la défaillance du système.

La Formule (B.2) est équivalente à  $s = \overline{s} = \bigcup_j C_j = \overline{b_1 \cdot \bar{a} \cdot \bar{b}_2 + \bar{c}_1 \cdot \bar{c}_2 + \bar{b}_1 \cdot \bar{a} \cdot \bar{c}_2 + \bar{b}_2 \cdot \bar{a} \cdot \bar{c}_1}$ .

La transformation de la Formule (B.2) implique l'utilisation des lois de De Morgan:

$$\overline{a \cdot b} = \bar{a} + \bar{b}$$

$$\overline{a + b} = \bar{a} \cdot \bar{b}$$

Cela donne:

$$s = \overline{\bar{b}_1 \cdot \bar{a} \cdot \bar{b}_2 \cdot \bar{c}_1 \cdot \bar{c}_2 \cdot \bar{b}_1 \cdot \bar{a} \cdot \bar{c}_2 \cdot \bar{b}_2 \cdot \bar{a} \cdot \bar{c}_1} \text{ qui donne:}$$

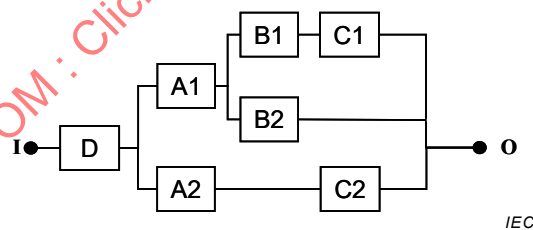
$$s = (b_1 + a + b_2) \cdot (c_1 + c_2) \cdot (b_1 + a + c_2) \cdot (b_2 + a + c_1) \quad (\text{B.3})$$

Finalement, deux représentations équivalentes de la formule logique représentant le BDF à l'état de disponibilité sont obtenues. La Formule (B.1) donne une représentation avec les chemins de succès, et la Formule (B.3) (voir la Figure 18) une représentation du BDF avec les coupes minimales (voir la Figure 19).

### B.3.3 Identification des coupes minimales et des ensembles de fermeture minimaux

Les coupes minimales et les ensembles de fermeture minimaux peuvent être obtenus par extension des formules logiques correspondant au BDF.

Cela peut être réalisé avec un BDF simple, comme indiqué ci-après avec le BDF tracé à la Figure B.5.



**Figure B.5 – Exemple de BDF avec ensembles de fermeture et coupes d'ordre différent**

La structure logique de ce BDF donne la formule logique suivante:

$$s = d \cdot \{ (a_2 \cdot c_2) + [a_1 \cdot (b_1 \cdot c_1) + a_1 \cdot b_2] \} \quad (\text{B.4})$$

L'extension de la Formule (B.4) donne:

$$s = d \cdot \{ (a_2 \cdot c_2) + [a_1 \cdot b_1 \cdot c_1 + a_1 \cdot b_2] \} \text{ et } s = d \cdot a_2 \cdot c_2 + d \cdot a_1 \cdot b_1 \cdot c_1 + d \cdot a_1 \cdot b_2.$$

Par conséquent, ce BDF comporte trois chemins de succès minimaux:  $(d \cdot a_2 \cdot c_2)$ ,  $(d \cdot a_1 \cdot b_2)$ ,  $(d \cdot a_1 \cdot b_1 \cdot c_1)$ .

Les coupes minimales peuvent être obtenues en complétant la Formule (B.4) et en utilisant les lois de De Morgan:

$$\bar{s} = \overline{d \bullet \{(a_2 \bullet c_2) + [a_1 \bullet (b_1 \bullet c_1) + a_1 \bullet b_2]\}}$$

$$\bar{s} = \bar{d} + \overline{(a_2 \bullet c_2) \bullet [a_1 \bullet (b_1 \bullet c_1) + a_1 \bullet b_2]} = \bar{d} + (\bar{a}_2 + \bar{c}_2) \bullet (\bar{a}_1 + \bar{b}_1 + \bar{c}_1) \bullet (\bar{a}_1 + \bar{b}_2)$$

$$\bar{s} = \bar{d} + \bar{a}_1 \bullet \bar{a}_2 + \bar{a}_1 \bullet \bar{c}_2 + \bar{a}_2 \bullet \bar{b}_1 \bullet \bar{b}_2 + \bar{a}_2 \bullet \bar{c}_1 \bullet \bar{b}_2 + \bar{c}_2 \bullet \bar{c}_1 \bullet \bar{b}_2 + \bar{c}_2 \bullet \bar{b}_1 \bullet \bar{b}_2$$

Enfin, sept coupes minimales sont déterminées:  $\bar{d}$ ,  $(\bar{a}_1 \bullet \bar{a}_2)$ ,  $(\bar{a}_1 \bullet \bar{c}_2)$ ,  $(\bar{a}_2 \bullet \bar{b}_1 \bullet \bar{b}_2)$ ,  $(\bar{a}_2 \bullet \bar{c}_1 \bullet \bar{b}_2)$ ,  $(\bar{c}_2 \bullet \bar{c}_1 \bullet \bar{b}_2)$ ,  $(\bar{c}_2 \bullet \bar{b}_1 \bullet \bar{b}_2)$ .

Les ensembles de fermeture minimaux et les coupes minimales représentent les mêmes informations, mais, du point de vue de l'analyse qualitative, les coupes minimales sont plus pertinentes, car les coupes minimales les plus courtes sont vraisemblablement plus probables que les autres coupes minimales.

Par conséquent, les coupes minimales du BDF à la Figure B.5 peuvent être triées par ordre (voir 3.18, Note 2 à l'article):

- ordre un,  $\bar{d}$  ;
- ordre deux,  $(\bar{a}_1 \bullet \bar{a}_2)$ ,  $(\bar{a}_1 \bullet \bar{c}_2)$  ;
- ordre trois,  $(\bar{a}_2 \bullet \bar{b}_1 \bullet \bar{b}_2)$ ,  $(\bar{a}_2 \bullet \bar{c}_1 \bullet \bar{b}_2)$ ,  $(\bar{c}_2 \bullet \bar{c}_1 \bullet \bar{b}_2)$ ,  $(\bar{c}_2 \bullet \bar{b}_1 \bullet \bar{b}_2)$ .

D'un point de vue qualitatif, le point faible de ce système est certainement la coupe minimale d'ordre un,  $\bar{d}$ .

Sauf dans les cas simples, les calculs ci-dessus ne sont pas faciles à résoudre à la main, mais de puissants algorithmes sont disponibles et mis en œuvre dans les logiciels de traitement des BDF. Les ensembles de fermeture minimaux et les coupes minimales peuvent être déterminés à l'aide, par exemple, des diagrammes de décision binaires expliqués dans la partie relative au calcul de probabilité de la présente norme.

## B.4 Principes des calculs

### B.4.1 Structures série

Soit un système composé de  $n$  blocs ( $B_i$ ) en série s'apparentant à celui présenté à la Figure 2. Pour ce système, il peut être constaté que le système global est disponible à condition que tous les blocs  $B_i$  le soient. En d'autres termes, l'expression booléenne pour le succès du système est donnée par

$$s = \bigcap_{i=1,n} b_i \equiv b_1 \bullet b_2 \bullet b_3 \bullet \dots \bullet b_n \quad (\text{B.5})$$

où  $b_i$  est une variable booléenne correspondant à l'état de disponibilité des blocs  $B_i$ .

Si les blocs sont indépendants, alors la probabilité que le système soit disponible est:

$$P_s = P_{b_1} \cdot P_{b_2} \cdot P_{b_3} \dots P_{b_n} = \prod_i P_{b_i} \quad (\text{B.6})$$

Par conséquent, le calcul de  $P_s$  ne présente aucun problème particulier dans le cas des structures série.

Néanmoins, si la structure série ci-dessus (B.5) appartient à un BDF plus volumineux, ce calcul peut être réalisé uniquement si aucun bloc de cette structure série n'est répété ailleurs dans le BDF en question. Sinon, il convient d'appliquer les techniques décrites aux Articles B.5 ou B.6.

#### B.4.2 Structures parallèles

Soit un système redondant actif à deux unités tel que celui décrit à la Figure 21. Pour ce système, il peut être constaté que le système global est disponible à condition que A ou B (ou les deux) le soient. En d'autres termes, l'expression booléenne pour le succès du système est donnée par

$$s = a \cup b \equiv a + b \quad (\text{B.7})$$

où  $a$  et  $b$  sont des variables booléennes correspondant respectivement aux états de disponibilité du bloc A et du bloc B.

Pour un instant  $t$ , il est tentant de remplacer  $P_a$  et  $P_b$  par  $a$  et  $b$  respectivement et de réécrire la Formule (B.7) sous la forme:

$$P_s = P_a + P_b \quad (\text{B.8})$$

La Formule (B.8) qui est censée fournir la probabilité  $P_s$  que le système est disponible est malheureusement incorrecte compte tenu du fait qu'elle est obtenue à partir d'une expression booléenne dans laquelle les variables se recouvrent (c'est-à-dire que  $a \cap b \equiv a \bullet b \neq \Phi$ ). Dans le cas général, elle ne fournit même pas une approximation acceptable de  $P_s$ . Par exemple,  $P_s = 1,2$  est obtenu avec  $P_a$  et  $P_b$  égaux à 0,6, ce qui est de toute évidence incorrect.

Par conséquent, la Formule (B.8) doit être complétée en:

$$P_s = P_a + P_b - P_a \cdot P_b \quad (\text{B.9})$$

Contrairement à la Formule (B.8), la Formule (B.9) donne le résultat exact dans tous les cas. Avec les chiffres précédents, cela donne:  $P_s = 0,6 + 0,6 - 0,36 = 0,84$ .

Une structure composée de  $n$  blocs ( $B_i$ ) en parallèle donne:

$$s = \bigcup_i^n b_i = b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_n$$

L'extension de la Formule (B.9) est connue comme étant la formule de Sylvester-Poincaré:

$$P_s = P\left(\bigcup_{i \leq n} b_i\right) = \sum_{i \leq n} P_{b_i} - \sum_{i < j \leq n} P_{b_i} \cdot P_{b_j} + \sum_{i < j < k \leq n} P_{b_i} \cdot P_{b_j} \cdot P_{b_k} - \text{etc.} \quad (\text{B.10})$$

Il s'agit d'une somme alternative des termes décroissants qui converge vers le résultat  $P_s$ . Le nombre de termes augmente de manière très importante lorsque  $n$  augmente, et la convergence est très lente lorsque les probabilités sont élevées. Cela est malheureusement

le cas ici, car les probabilités,  $P_{b_i}$ , que les blocs soient disponibles sont en principe proches de 1. Par conséquent, la Formule (B.10) n'est pas gérable pour évaluer  $P_s$ , car elle nécessite de prendre trop de termes en considération.

Heureusement, plusieurs alternatives peuvent être prises en considération. La première consiste à évaluer la probabilité que le système soit indisponible plutôt que disponible.

Par exemple, "l'état d'indisponibilité" du petit système (B.7) analysé ci-dessus est donné par  $\bar{s} = \bar{a} + \bar{b}$  qui, en appliquant les lois de De Morgan, donne la forme duale équivalente de l'expression booléenne,  $\bar{s} = \bar{a} \bullet \bar{b}$ .

Si  $a$  et  $b$  sont indépendants l'un de l'autre, il en est de même pour  $\bar{a}$  et  $\bar{b}$ . La probabilité que le système soit indisponible est donc donnée par:  $P_{\bar{s}} = P_{\bar{a}} \cdot P_{\bar{b}}$ .

Et enfin:  $P_s = 1 - P_{\bar{s}} = 1 - (1 - P_a) \cdot (1 - P_b)$ .

Cela peut être aisément étendu à  $n$  blocs en parallèle et  $s = \bigcup_{i=1,n} b_i \Leftrightarrow \bar{s} = \bigcap_{i=1,n} \bar{b}_i$  est obtenu en appliquant les lois de De Morgan.

$$\text{Et enfin: } P_s = P\left(\bigcup_i b_i\right) = 1 - P\left(\bigcap_{i=1,n} \bar{b}_i\right) = 1 - \prod_{i=1,n} P_{\bar{b}_i} = 1 - \prod_{i=1,n} (1 - P_{b_i}) \quad (\text{B.11})$$

La Formule (B.11), qui implique uniquement de simples produits, est plus facile à utiliser pour les structures parallèles que la formule de Sylvester-Poincaré analysée ci-dessus.

#### B.4.3 Mélange de structures séries et de structures parallèles

Les Formules (B.6) et (B.11) peuvent être combinées et cela peut être fait à la main dans les cas simples.

Par conséquent, en présence d'un système tel que décrit à la Figure 4, mais dont chaque branche contient uniquement trois entités, la probabilité de succès du système est:

$$P_s = P_{a1} \cdot P_{b1} \cdot P_{c1} + P_{a2} \cdot P_{b2} \cdot P_{c2} - P_{a1} \cdot P_{b1} \cdot P_{c1} \cdot P_{a2} \cdot P_{b2} \cdot P_{c2} \quad (\text{B.12})$$

De même, pour la Figure 5, l'équation suivante s'applique:

$$P_s = (P_{a1} + P_{a2} - P_{a1} \cdot P_{a2}) \cdot (P_{b1} + P_{b2} - P_{b1} \cdot P_{b2}) \cdot (P_{c1} + P_{c2} - P_{c1} \cdot P_{c2}) \quad (\text{B.13})$$

Pour la Figure 6 et la Figure 7, la probabilité de succès des équations du système est obtenue simplement en multipliant les Formules (B.12) et (B.13) par  $P_d$ .

Néanmoins et à l'exception des cas simples, les calculs ci-dessus (B.12) ou (B.13) ne sont pas faciles à résoudre à la main. Heureusement, de puissants algorithmes sont disponibles et mis en œuvre dans les logiciels de traitement des BDF. Ils reposent sur les techniques décrites aux Articles B.5, B.6 ou B.7.

#### B.4.4 Architectures $m$ sur $n$ (entités identiques)

Parmi les cas les plus simples, les formules liées à la probabilité de succès des systèmes correspondant à la Figure 8 (logiques 2/3) et à la Figure 9 (logiques 3/4) sont un peu plus compliquées que celles développées en B.4.3.

En observant le système 2/3 présenté à la Figure 8, la Formule (B.9) donne:

$$\begin{aligned} P_s &= P(x_1 \bullet x_2 + x_1 \bullet x_3 + x_2 \bullet x_3) = P(x_1 \bullet x_2 + x_1 \bullet x_3) + P(x_2 \bullet x_3) - P(x_1 \bullet x_2 \bullet x_3) \\ &= P(x_1 \bullet x_2) + P(x_1 \bullet x_3) - P(x_1 \bullet x_2 \bullet x_3) + P(x_2 \bullet x_3) - P(x_1 \bullet x_2 \bullet x_3) \\ &= P(x_1 \bullet x_2) + P(x_1 \bullet x_3) + P(x_2 \bullet x_3) - 2P(x_1 \bullet x_2 \bullet x_3) \end{aligned}$$

Ensuite, si les blocs sont indépendants et présentent la même probabilité de succès,  $p$ , la formule ci-dessus donne  $P_s = 3 \cdot p^2 - 2 \cdot p^3$ .

Elle peut être transformée en  $P_s = p^3 + 3 \cdot p^2 - 3 \cdot p^3$ , ce qui permet finalement d'obtenir l'équation

$$P_s = p^3 + 3 \cdot p^2 \cdot (1-p) \quad (\text{B.14})$$

La Formule (B.14) peut être généralisée en une structure logique  $m/n$  composée de  $n$  blocs identiques. Dans ce cas,  $m$  blocs sur  $n$  sont exigés pour le succès du système, et la probabilité de succès du système  $P_s$  est donnée par la formule générale:

$$P_s = \sum_{r=0}^{n-m} \binom{n}{r} \cdot p^{n-r} \cdot (1-p)^r \quad (\text{B.15})$$

L'application de la Formule (B.15) à la structure logique 2/4 présentée à la Figure 9 donne:

$$P_s = p^4 + 4 \cdot p^3 \cdot (1-p) + 6 \cdot p^2 \cdot (1-p)^2 = 3 \cdot p^4 - 8 \cdot p^3 + 6 \cdot p^2 \quad (\text{B.16})$$

Un système  $m/n$  a besoin de  $m$  blocs disponibles pour être lui-même disponible. Donc, il a besoin de  $(n-m+1)$  blocs indisponibles pour être lui-même indisponible. Par conséquent, un système  $m/n$  vis-à-vis de la disponibilité est un système  $(n-m+1)/n$  vis-à-vis de l'indisponibilité, et la probabilité de défaillance d'un système  $m/n$  est donnée en échangeant  $m \leftrightarrow (n-m+1)$  et  $p \leftrightarrow (1-p)$  dans la Formule (B.15):

$$P_s = \sum_{r=0}^{m-1} \binom{n}{r} \cdot (1-p)^{n-r} \cdot p^r \quad (\text{B.17})$$

#### Cas particuliers

- Si  $m = n - 1$  (par exemple 2/3, 3/4, etc.), la Formule (B.15) est réduite à:

$$P_s = n \cdot p^m + m \cdot p^n \quad (\text{B.18})$$

- Si  $n = 2m - 1$ , les systèmes sont symétriques quant au succès et aux défaillances: le système est disponible si  $m$  blocs le sont et est indisponible si  $m$  blocs le sont. C'est le cas pour les structures logiques 1/1, 2/3, 3/5, etc. Compte tenu de cette propriété, la

structure 2/3 est largement utilisée dans l'industrie pour concevoir des systèmes de sécurité.

Si les  $n$  entités ne sont pas identiques, l'utilisation d'une procédure plus générale est recommandée (voir 11.8.2).

## B.5 Utilisation de la formule de Sylvester-Poincaré pour des BDF volumineux et des blocs répétés

### B.5.1 Généralités

Si des blocs répétés sont mis en œuvre, les formules développées à l'Article B.3 peuvent être appliquées uniquement pour les parties du BDF qui ne contiennent pas de blocs répétés. Pour les autres parties du BDF, les blocs répétés doivent être correctement pris en compte.

Les BDF équivalents composés de chemins de succès (ensembles de fermeture minimaux) ou de combinaisons de défaillances (coupes minimales) sont des BDF typiques avec ce type de blocs répétés. C'est la raison pour laquelle ils sont analysés ci-après.

### B.5.2 Formule de Sylvester-Poincaré avec ensembles de fermeture

L'état de succès d'un système composé de  $n$  chemins de succès (ensembles de fermeture minimaux),  $(\Pi_i)$ , peut être écrit:

$$s = \bigcup_i \Pi_i$$

Les ensembles de fermeture minimaux,  $\Pi_i$ , ne sont pas indépendants les uns des autres, la formule de Sylvester-Poincaré correspondante prenant donc la forme suivante:

$$P_s = P\left(\bigcup_{i=1}^n \Pi_i\right) = \sum_i P(\Pi_i) - \sum_{i < j} P(\Pi_i \bullet \Pi_j) + \sum_{i < j < k} P(\Pi_i \bullet \Pi_j \bullet \Pi_k) - \text{etc.} \quad (\text{B.19})$$

$$= SP_i - SP_{ij} + SP_{ijk} - \text{etc.}$$

La Formule (B.19) exprime que la probabilité d'union des ensembles de fermeture est égale à

- 1) la somme de la probabilité des ensembles de fermeture (terme  $SP_i$ ),
- 2) moins la somme des probabilités des intersections des ensembles de fermeture  $2 \times 2$  (terme  $SP_{ij}$ ),
- 3) plus la somme des probabilités des intersections des ensembles de fermeture  $3 \times 3$  (terme  $SP_{ijk}$ ),
- 4) moins la somme des probabilités des intersections des ensembles de fermeture  $4 \times 4$  (terme  $SP_{ijkl}$ ),
- 5) etc.

Les ensembles de fermeture ne sont pas indépendants, le même événement pouvant se produire dans plusieurs ensembles de fermeture. Par conséquent, toutes les intersections des ensembles de fermeture doivent être analysées avant de procéder aux calculs de probabilité, afin de les simplifier si elles contiennent des événements identiques.

Cela peut être montré avec l'exemple développé à l'Article 8 qui contient 4 ensembles de fermeture minimaux:  $\Pi_1 = b_1 \bullet c_1$ ,  $\Pi_2 = a \bullet c_1$ ,  $\Pi_3 = a \bullet c_2$ ,  $\Pi_4 = b_2 \bullet c_2$ .

La mise en œuvre de la Formule (B.19) donne les calculs suivants.

a) Premier terme  $SP_i$  :

$$\sum_i P(\Pi_i) = P_{b_1} \cdot P_{c_1} + P_a \cdot P_{c_1} + P_a \cdot P_{c_2} + P_{b_2} \cdot P_{c_2}$$

b) Deuxième terme  $SP_{ij}$  :

$$\begin{aligned} \sum_{i < j} P(\Pi_i \bullet \Pi_j) &= P(\Pi_1 \bullet \Pi_2) + P(\Pi_1 \bullet \Pi_3) + P(\Pi_1 \bullet \Pi_4) + P(\Pi_2 \bullet \Pi_3) + P(\Pi_2 \bullet \Pi_4) + P(\Pi_3 \bullet \Pi_4) \\ &= P(b_1 \bullet c_1 \bullet a \bullet \phi_1) + P(b_1 \bullet c_1 \bullet a \bullet c_2) + P(b_1 \bullet c_1 \bullet b_2 \bullet c_2) + P(a \bullet c_1 \bullet \phi \bullet c_2) + P(a \bullet c_1 \bullet b_2 \bullet c_2) + P(a \bullet c_2 \bullet b_2 \bullet \phi_2) \\ &= P(b_1 \bullet c_1 \bullet a) + P(b_1 \bullet c_1 \bullet a \bullet c_2) + P(b_1 \bullet c_1 \bullet b_2 \bullet c_2) + P(a \bullet c_1 \bullet c_2) + P(a \bullet c_1 \bullet b_2 \bullet c_2) + P(a \bullet b_2 \bullet c_2) \\ &= P_{b_1} \cdot P_{c_1} \cdot P_a + P_{b_1} \cdot P_{c_1} \cdot P_a \cdot P_{c_2} + P_{b_1} \cdot P_{c_1} \cdot P_{b_2} \cdot P_{c_2} + P_a \cdot P_{c_1} \cdot P_{c_2} + P_a \cdot P_{c_1} \cdot P_{b_2} \cdot P_{c_2} + P_a \cdot P_{b_2} \cdot P_{c_2} \end{aligned}$$

c) Troisième terme  $SP_{ijk}$  :

$$\begin{aligned} \sum_{i < j < k} P(\Pi_i \bullet \Pi_j \bullet \Pi_k) &= P(\Pi_1 \bullet \Pi_2 \bullet \Pi_3) + P(\Pi_1 \bullet \Pi_2 \bullet \Pi_4) + P(\Pi_2 \bullet \Pi_3 \bullet \Pi_4) \\ &= P(b_1 \bullet c_1 \bullet a \bullet \phi_1 \bullet \phi \bullet c_2) + P(b_1 \bullet c_1 \bullet a \bullet \phi_1 \bullet b_2 \bullet c_2) + P(a \bullet c_1 \bullet \phi \bullet c_2 \bullet b_2 \bullet \phi_2) \\ &= P(b_1 \bullet c_1 \bullet a \bullet c_2) + P(b_1 \bullet c_1 \bullet a \bullet b_2 \bullet c_2) + P(a \bullet c_1 \bullet b_2 \bullet c_2) \\ &= P_{b_1} \cdot P_{c_1} \cdot P_a \cdot P_{c_2} + P_{b_1} \cdot P_{c_1} \cdot P_a \cdot P_{b_2} \cdot P_{c_2} + P_a \cdot P_{c_1} \cdot P_{b_2} \cdot P_{c_2} \end{aligned}$$

d) Quatrième terme  $SP_{ijkl}$  :

$$\begin{aligned} \sum_{i < j < k < l} P(\Pi_i \bullet \Pi_j \bullet \Pi_k \bullet \Pi_l) &= P(\Pi_1 \bullet \Pi_2 \bullet \Pi_3 \bullet \Pi_4) \\ &= P(b_1 \bullet c_1 \bullet a \bullet \phi_1 \bullet \phi \bullet c_2 \bullet b_2 \bullet \phi_2) = P(b_1 \bullet c_1 \bullet a \bullet c_2 \bullet b_2) = P_{b_1} \cdot P_{c_1} \cdot P_a \cdot P_{c_2} \cdot P_{b_2} \end{aligned}$$

Par conséquent, avec ces 4 ensembles de fermeture minimaux,  $4 + 6 + 3 + 1 = 14$  termes à calculer sont identifiés.

La probabilité des ensembles de fermeture,  $P(\Pi_i)$ , n'étant en principe pas faible comparée à 1, les probabilités de  $P(\Pi_i \bullet \Pi_j)$ ,  $P(\Pi_i \bullet \Pi_j \bullet \Pi_k)$  ne le sont pas également et ne peuvent pas être négligées.

Avec 3 événements présentant des probabilités élevées  $P_a = P_b = P_c = 0,9$ , les résultats suivants sont obtenus:

$$P(a + b + c) = P_a + P_b + P_c - (P_a \cdot P_b + P_a \cdot P_c + P_b \cdot P_c) + P_a \cdot P_b \cdot P_c$$

$$P(a + b + c) = 2,7 - 2,43 + 0,729 = 0,999$$

Par conséquent, aucun terme n'est négligeable et tous les termes doivent être pris en considération dans les calculs. La Formule (B.19) n'est donc pas réellement gérable, car beaucoup trop de termes sont nécessaires pour obtenir des approximations pertinentes.

### B.5.3 Formule de Sylvester-Poincaré avec les coupes

Le taux de défaillance d'un système composé de  $m$  chemins de défaillance (coupes minimales),  $(C_i)$  peut être écrit comme suit:

$$\bar{s} = \bigcup_i C_i$$

Cela donne la formule de Sylvester-Poincaré correspondante: