

**NORME
INTERNATIONALE
INTERNATIONAL
STANDARD**

**CEI
IEC**

60493-1

Première édition
First edition
1974-01

**Guide pour l'analyse statistique de données
d'essais de vieillissement**

**Première partie:
Méthodes basées sur les valeurs moyennes
de résultats d'essais normalement distribués**

**Guide for the statistical analysis
of ageing test data**

**Part 1:
Methods based on mean values of normally
distributed test results**



Numéro de référence
Reference number
CEI/IEC 60493-1: 1974

Numéros des publications

Depuis le 1^{er} janvier 1997, les publications de la CEI sont numérotées à partir de 60000.

Publications consolidées

Les versions consolidées de certaines publications de la CEI incorporant les amendements sont disponibles. Par exemple, les numéros d'édition 1.0, 1.1 et 1.2 indiquent respectivement la publication de base, la publication de base incorporant l'amendement 1, et la publication de base incorporant les amendements 1 et 2.

Validité de la présente publication

Le contenu technique des publications de la CEI est constamment revu par la CEI afin qu'il reflète l'état actuel de la technique.

Des renseignements relatifs à la date de reconfirmation de la publication sont disponibles dans le Catalogue de la CEI.

Les renseignements relatifs à des questions à l'étude et des travaux en cours entrepris par le comité technique qui a établi cette publication, ainsi que la liste des publications établies, se trouvent dans les documents ci-dessous:

- «Site web» de la CEI*
- **Catalogue des publications de la CEI**
Publié annuellement et mis à jour régulièrement (Catalogue en ligne)*
- **Bulletin de la CEI**
Disponible à la fois au «site web» de la CEI* et comme périodique imprimé

Terminologie, symboles graphiques et littéraux

En ce qui concerne la terminologie générale, le lecteur se reportera à la CEI 60050: *Vocabulaire Electrotechnique International* (VEI).

Pour les symboles graphiques, les symboles littéraux et les signes d'usage général approuvés par la CEI, le lecteur consultera la CEI 60027: *Symboles littéraux à utiliser en électrotechnique*, la CEI 60417: *Symboles graphiques utilisables sur le matériel. Index, relevé et compilation des feuilles individuelles*, et la CEI 60617: *Symboles graphiques pour schémas*.

* Voir adresse «site web» sur la page de titre.

Numbering

As from 1 January 1997 all IEC publications are issued with a designation in the 60000 series.

Consolidated publications

Consolidated versions of some IEC publications including amendments are available. For example, edition numbers 1.0, 1.1 and 1.2 refer, respectively, to the base publication, the base publication incorporating amendment 1 and the base publication incorporating amendments 1 and 2.

Validity of this publication

The technical content of IEC publications is kept under constant review by the IEC, thus ensuring that the content reflects current technology.

Information relating to the date of the reconfirmation of the publication is available in the IEC catalogue.

Information on the subjects under consideration and work in progress undertaken by the technical committee which has prepared this publication, as well as the list of publications issued, is to be found at the following IEC sources:

- **IEC web site***
- **Catalogue of IEC publications**
Published yearly with regular updates (On-line catalogue)*
- **IEC Bulletin**
Available both at the IEC web site* and as a printed periodical

Terminology, graphical and letter symbols

For general terminology, readers are referred to IEC 60050: *International Electrotechnical Vocabulary* (IEV).

For graphical symbols, and letter symbols and signs approved by the IEC for general use, readers are referred to publications IEC 60027: *Letter symbols to be used in electrical technology*, IEC 60417: *Graphical symbols for use on equipment. Index, survey and compilation of the single sheets* and IEC 60617: *Graphical symbols for diagrams*.

* See web site address on title page.

**NORME
INTERNATIONALE
INTERNATIONAL
STANDARD**

**CEI
IEC**

60493-1

Première édition
First edition
1974-01

**Guide pour l'analyse statistique de données
d'essais de vieillissement**

**Première partie:
Méthodes basées sur les valeurs moyennes
de résultats d'essais normalement distribués**

**Guide for the statistical analysis
of ageing test data**

**Part 1:
Methods based on mean values of normally
distributed test results**

© IEC 1974 Droits de reproduction réservés — Copyright - all rights reserved

Aucune partie de cette publication ne peut être reproduite ni utilisée sous quelque forme que ce soit et par aucun procédé, électronique ou mécanique, y compris la photocopie et les microfilms, sans l'accord écrit de l'éditeur.

No part of this publication may be reproduced or utilized in any form or by any means, electronic or mechanical, including photocopying and microfilm, without permission in writing from the publisher.

International Electrotechnical Commission
Telefax: +41 22 919 0300

3, rue de Varembé Geneva, Switzerland
e-mail: inmail@iec.ch IEC web site <http://www.iec.ch>



Commission Electrotechnique Internationale
International Electrotechnical Commission
Международная Электротехническая Комиссия

CODE PRIX
PRICE CODE

R

Pour prix, voir catalogue en vigueur
For price, see current catalogue

SOMMAIRE

	Pages
PRÉAMBULE	4
PRÉFACE	4
Articles	
1. Objet	6
2. Introduction	6
3. Méthodes statistiques	8
3.1 Distributions et paramètres statistiques	8
3.2 Estimateurs des paramètres	8
3.3 Tests de signification	10
3.4 Limites de confiance	10
3.5 Distributions types	10
3.6 Tests d'égalité des variances	12
3.7 Régression linéaire	14
4. Traitement des résultats d'essais de vieillissement	22
4.1 Mesures non destructives et essais d'épreuve	24
4.2 Mesures destructives	24
ANNEXE A — Références	28
ANNEXE B — Liste des symboles	32
FIGURES	36

CONTENTS

	Page
FOREWORD	5
PREFACE	5
Clause	
1. Scope	7
2. Introduction	7
3. Statistical methods	9
3.1 Statistical distributions and parameters	9
3.2 Estimates of parameters	9
3.3 Significance tests	11
3.4 Confidence limits	11
3.5 Distribution types	11
3.6 Tests for equality of variances	13
3.7 Linear regression	15
4. Treatment of the results of ageing tests	23
4.1 Non-destructive measurements and proof tests	25
4.2 Destructive measurements	25
APPENDIX A — References	29
APPENDIX B — List of symbols	33
FIGURES	36

COMMISSION ÉLECTROTECHNIQUE INTERNATIONALE

**GUIDE POUR L'ANALYSE STATISTIQUE DE DONNÉES D'ESSAIS
DE VIEILLISSEMENT**

**Première partie : Méthodes basées sur les valeurs moyennes de résultats d'essais
normalement distribués**

PRÉAMBULE

- 1) Les décisions ou accords officiels de la CEI en ce qui concerne les questions techniques, préparés par des Comités d'Etudes où sont représentés tous les Comités nationaux s'intéressant à ces questions, expriment dans la plus grande mesure possible un accord international sur les sujets examinés.
- 2) Ces décisions constituent des recommandations internationales et sont agréées comme telles par les Comités nationaux.
- 3) Dans le but d'encourager l'unification internationale, la CEI exprime le vœu que tous les Comités nationaux adoptent dans leurs règles nationales le texte de la recommandation de la CEI, dans la mesure où les conditions nationales le permettent. Toute divergence entre la recommandation de la CEI et la règle nationale correspondante doit, dans la mesure du possible, être indiquée en termes clairs dans cette dernière.

PRÉFACE

La présente recommandation a été établie par le Sous-Comité 15B: Essais d'endurance, du Comité d'Etudes N° 15 de la CEI: Matériaux isolants.

Un premier projet fut discuté lors de la réunion tenue à Vienne en 1971. A la suite de cette réunion, un projet, document 15B(Bureau Central)27, fut établi et ensuite soumis à l'approbation des Comités nationaux suivant la Règle des Six Mois en août 1973.

Les pays suivants se sont prononcés explicitement en faveur de la publication:

Afrique du Sud (République d')	Norvège
Allemagne	Pologne
Autriche	Portugal
Belgique	Roumanie
Canada	Royaume-Uni
Corée (République démocratique populaire de)	Suède
Danemark	Suisse
Finlande	Tchécoslovaquie
France	Turquie
Israël	Union des Républiques Socialistes Soviétiques
Japon	Yougoslavie

INTERNATIONAL ELECTROTECHNICAL COMMISSION

GUIDE FOR THE STATISTICAL ANALYSIS OF AGEING TEST DATA

Part 1: Methods based on mean values of normally distributed test results

FOREWORD

- 1) The formal decisions or agreements of the IEC on technical matters, prepared by Technical Committees on which all the National Committees having a special interest therein are represented, express, as nearly as possible, an international consensus of opinion on the subjects dealt with.
- 2) They have the form of recommendations for international use and they are accepted by the National Committees in that sense.
- 3) In order to promote international unification, the IEC expresses the wish that all National Committees should adopt the text of the IEC recommendation for their national rules in so far as national conditions will permit. Any divergence between the IEC recommendation and the corresponding national rules should, as far as possible, be clearly indicated in the latter.

PREFACE

This recommendation has been prepared by Sub-Committee 15B, Endurance Tests, of IEC Technical Committee No. 15, Insulating Materials.

A first draft was discussed at the meeting held in Vienna in 1971. As a result of this meeting, a draft, document 15B(Central Office)27, was prepared and then submitted to the National Committees for approval under the Six Months' Rule in August 1973.

The following countries voted explicitly in favour of publication:

Austria	Norway
Belgium	Poland
Canada	Portugal
Czechoslovakia	Romania
Denmark	South Africa (Republic of)
Finland	Sweden
France	Switzerland
Germany	Turkey
Israel	Union of Soviet
Japan	Socialist Republics
Korea (Democratic People's	United Kingdom
Republic of)	Yugoslavia

GUIDE POUR L'ANALYSE STATISTIQUE DE DONNÉES D'ESSAIS DE VIEILLISSEMENT

Première partie : Méthodes basées sur les valeurs moyennes de résultats d'essais normalement distribués

1. Objet

Ce guide décrit les méthodes statistiques qui peuvent être appliquées pour l'analyse et l'évaluation des résultats d'essais de vieillissement.

Il couvre les méthodes numériques basées sur les valeurs moyennes de résultats d'essais normalement distribués.

Ces méthodes ne sont valables qu'en formulant des hypothèses relatives aux lois mathématiques et physiques que suivent les résultats d'essais. Des tests statistiques permettant de vérifier la validité de quelques-unes de ces hypothèses sont également donnés.

D'autres parties concerneront les autres méthodes statistiques telles que celles basées sur :

- un dépouillement graphique des résultats d'essais;
- les valeurs médianes des résultats d'essais;
- des distributions tronquées de résultats;
- la statistique des valeurs extrêmes.

2. Introduction

Des méthodes permettant d'estimer les propriétés de vieillissement sont décrites dans des méthodes d'essais spécifiques ou sont couvertes par des documents généraux décrivant les méthodes suivant lesquelles sont réalisés des vieillissements sous l'effet d'une contrainte d'environnement spécifique (par exemple température, radiations, décharges partielles).

Dans de nombreux cas, une propriété donnée est déterminée en fonction du temps sous différentes contraintes de vieillissement et l'on détermine, pour chaque contrainte de vieillissement, un temps jusqu'à dégradation basé sur un critère de fin de vie déterminé. Un tracé des variations du temps jusqu'à dégradation, en fonction de la contrainte de vieillissement, peut être utilisé pour obtenir une estimation du temps jusqu'à dégradation d'éprouvettes similaires exposées à une contrainte donnée, ou pour obtenir une estimation de la valeur de la contrainte pour laquelle la dégradation est obtenue en un temps donné.

Les lois physiques et chimiques qui gouvernent les phénomènes de vieillissement peuvent souvent conduire à l'hypothèse d'une relation linéaire reliant la propriété examinée et la durée du vieillissement sous des contraintes de vieillissement déterminées, ou entre des fonctions mathématiques de la propriété et de la durée de vieillissement, par exemple la racine carrée ou le logarithme. De même, il peut y avoir une relation linéaire entre le temps jusqu'à dégradation et la contrainte de vieillissement, ou des fonctions mathématiques de ces variables.

Les méthodes décrites au paragraphe 3.7 de ce guide s'appliquent à de telles relations linéaires. Ces méthodes sont illustrées par l'exemple du vieillissement thermique où, dans le cas d'un simple processus chimique, il peut être supposé que la dégradation suit la loi d'Arrhenius, c'est-à-dire où le logarithme du temps jusqu'à dégradation est une fonction linéaire de l'inverse de la température thermodynamique.

Des exemples numériques illustrant l'utilisation des méthodes dans ce cas sont donnés dans la Publication 216-3 de la CEI (à l'étude).

Il est à remarquer que des programmes de calcul existent pour beaucoup de procédures mises en jeu (détermination de la valeur moyenne, variance, coefficients de régression) et qu'un programme informatique complet peut être facilement établi.

Les méthodes décrites dans ce guide sont traitées dans la plupart des manuels de statistiques. Des références aux méthodes particulières figurent dans l'annexe A avec des références aux tables de distributions statistiques à utiliser pour les tests statistiques décrits dans ce guide.

GUIDE FOR THE STATISTICAL ANALYSIS OF AGEING TEST DATA

Part 1: Methods based on mean values of normally distributed test results

1. Scope

This guide gives statistical methods which may be applied to the analysis and evaluation of the results of ageing tests.

It covers numerical methods based on mean values of normally distributed test results.

These methods are only valid under specific assumptions regarding the mathematical and physical laws obeyed by the test data. Statistical tests for the validity of some of these assumptions are also given.

Other parts will cover other statistical methods such as those based on:

- graphical evaluation of test results;
- median values of test results;
- truncated data;
- extreme value statistics.

2. Introduction

Procedures for estimating ageing properties are described in specific test procedures, or are covered by the general documents on test procedures for ageing tests with a specific environmental stress (e.g. temperature, radiation, partial discharges).

In many cases, a certain property is determined as a function of time at different ageing stresses, and a time to failure based on a chosen end-point criterion is found at each ageing stress. A plot of time to failure versus ageing stress may be used to obtain an estimate of the time to failure for similar specimens exposed to a specified stress, or to obtain an estimate of the value of stress which will cause failure in a specified time.

The physical and chemical laws governing the ageing phenomena may often lead to the assumption that a linear relationship exists between the property examined and the ageing time at fixed ageing stresses, or between certain mathematical functions of property and ageing time, e.g. square root or logarithm. Also there may be a linear relationship between time to failure and ageing stress, or mathematical functions of these variables.

The methods described in Sub-clause 3.7 of this guide apply to such cases of linear relationship. The methods are illustrated by the example of thermal ageing, where in the case of a simple chemical process it may be assumed that the degradation obeys the Arrhenius law, i.e. the logarithm of time to failure is a linear function of the reciprocal thermodynamic temperature.

Numerical examples demonstrating the use of the methods in this case are given in IEC Publication 216-3 (under consideration).

It should be noted that computer programmes exist for many of the procedures involved (determination of mean value, variance, regression coefficients) and that a complete computer programme may be easily established.

The methods described in this guide are treated in most textbooks on statistics. References on the individual methods are given in Appendix A, together with references to tables of the statistical distributions to be used in connection with the statistical tests described in this guide.

Dans certains cas, les calculs nécessaires pour le dépouillement des résultats d'essais peuvent être remplacés par des méthodes graphiques, plus aisées à manipuler, bien que moins précises. Des références à de telles méthodes sont données dans l'annexe A.

Note. — Dans certains cas, le terme « fin de vie » est utilisé au lieu de ce qui est appelé ici « dégradation », et « durée de vie » au lieu de « temps jusqu'à dégradation ». Il est recommandé de ne pas utiliser le mot « vie » dans ce contexte pour éviter une confusion avec la « vie en service » du matériel lui-même.

3. Méthodes statistiques

3.1 Distributions et paramètres statistiques

La distribution d'une variable aléatoire X est décrite par la fonction de distribution:

$$F(x) = P(X \leq x) \quad (3.1.1)$$

où $P(X \leq x)$ est la probabilité que la valeur de X soit $\leq x$. Donc $F(x)$ varie de 0 à 1 et est une fonction jamais décroissante de x . Si $F(x)$ est une fonction continue de x , la densité de probabilité est déterminée par:

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx} \quad (3.1.2)$$

La distribution peut être caractérisée par des paramètres dont les plus importants sont:

— la valeur moyenne:

$$\xi = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx \quad (3.1.3)$$

— la valeur médiane $\tilde{\xi}$, déterminée par:

$$F(\tilde{\xi}) = \int_{-\infty}^{\tilde{\xi}} f(x) dx = 0,5, \text{ et} \quad (3.1.4)$$

— la variance:

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \xi)^2 f(x) dx \quad (3.1.5)$$

La médiane sépare la distribution en deux parties égales, de sorte que la moitié de la population a $X \leq \tilde{\xi}$. Si la distribution est symétrique autour de ξ , alors $\tilde{\xi} = \xi$.

La racine carrée de la variance est appelée l'écart quadratique moyen σ .

3.2 Estimateurs des paramètres

A partir d'un échantillon de n éprouvettes aléatoirement indépendantes d'une population peuvent être déterminés des estimateurs des paramètres de la population (voir le paragraphe 3.1).

Un estimateur de la valeur moyenne de la population (3.1.3) est constitué par la moyenne des valeurs individuelles de l'échantillon:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \quad (3.2.1)$$

où:

x_i = les valeurs individuelles de l'échantillon ($i = 1, 2, \dots, n$)

Si les valeurs de l'échantillon sont rangées par valeurs croissantes:

$$(x_{(1)}, x_{(2)}, \dots, x_{(n)}),$$

la valeur centrale de l'échantillon (c'est-à-dire la valeur du milieu si n est impair ou la moyenne des deux valeurs les plus proches du milieu si n est pair) est un estimateur de la médiane de la population $\tilde{\xi}$ suivant l'équation (3.1.4)

$$\tilde{x} = x_{\frac{n+1}{2}} \quad (n \text{ impair}) \text{ ou} \quad (3.2.2a)$$

$$\tilde{x} = \frac{1}{2} x_{\frac{n}{2}} + \frac{1}{2} x_{\frac{n}{2}+1} \quad (n \text{ pair}) \quad (3.2.2b)$$

In some cases, the calculations involved in the evaluation of the test results may be replaced by graphical procedures, which may be easier to perform, although less accurate. References to such methods are given in Appendix A.

Note. — In some cases, the term “end of life” is used instead of what is here termed “failure”, and “life-time” instead of “time to failure”. It is advisable not to use “life” in this context in order to avoid confusion with “service life” of actual equipment.

3. Statistical methods

3.1 Statistical distributions and parameters

The distribution of a stochastic variable X is described by the distribution function:

$$F(x) = P(X \leq x) \quad (3.1.1)$$

where $P(X \leq x)$ is the probability that the value of X is $\leq x$. Here $F(x)$ goes from 0 to 1 and is a never-decreasing function of x . If $F(x)$ is a continuous function of x , then the probability density is determined as:

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx} \quad (3.1.2)$$

The distribution may be characterized by parameters, of which the most important are:

— the mean value:

$$\xi = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx \quad (3.1.3)$$

— the median value $\tilde{\xi}$, determined by:

$$F(\tilde{\xi}) = \int_{-\infty}^{\tilde{\xi}} f(x) dx = 0.5, \text{ and} \quad (3.1.4)$$

— the variance:

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \xi)^2 f(x) dx \quad (3.1.5)$$

The median bisects the distribution in equal parts, so that half the population has $X \leq \tilde{\xi}$. If the distribution is symmetric about $\tilde{\xi}$, then $\tilde{\xi} = \xi$.

The square root of the variance is termed the standard deviation σ .

3.2 Estimates of parameters

From a sample of n stochastic independent specimens from a population, estimates of the parameters of the population (see Sub-clause 3.1) may be derived.

An estimate of the mean value of the population (3.1.3) is calculated as the average of the individual sample values:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \quad (3.2.1)$$

where:

x_i = the individual sample values ($i = 1, 2, \dots, n$)

If the sample values are arranged in ascending order of magnitude:

$$(x_{(1)}, x_{(2)}, \dots, x_{(n)}),$$

the central value of the sample (i.e. the middle value for n odd or the average of the two values nearest the middle for n even) is an estimate of the population median $\tilde{\xi}$ according to equation (3.1.4)

$$\tilde{x} = x_{\frac{n+1}{2}} \text{ (} n \text{ odd) or} \quad (3.2.2a)$$

$$\tilde{x} = \frac{1}{2} x_{\frac{n}{2}} + \frac{1}{2} x_{\frac{n}{2}+1} \text{ (} n \text{ even)} \quad (3.2.2b)$$

Un estimateur de la variance de la population (3.1.5) est la variance de l'échantillon :

$$\begin{aligned} s^2 &= \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n - 1} \\ &= \frac{\sum x_i^2 - \frac{(\sum x_i)^2}{n}}{n - 1} \\ &= \frac{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}{n(n - 1)} \end{aligned} \quad (3.2.3)$$

$n - 1 = f$ est appelé le nombre de degrés de liberté de s^2 .

3.3 Tests de signification

Lorsqu'une hypothèse a été établie sur la valeur correcte d'un paramètre ε de la population, cette hypothèse peut être contrôlée par un test statistique, dans lequel un estimateur du paramètre relatif à l'échantillon e est comparé à la valeur choisie par hypothèse. La gamme des valeurs possibles de l'estimateur e est divisée en deux parties, dont l'une contient les valeurs les moins probables d'après l'hypothèse, ce qui correspond à une probabilité totale α (par exemple 0,05) d'obtenir une valeur de e dans cette gamme si l'hypothèse est exacte, et dont l'autre réunit les valeurs les plus probables, suivant cette hypothèse, ce qui correspond à une probabilité de $1 - \alpha$.

La gamme des valeurs les moins probables s'appelle la gamme de réjection; si l'échantillon donne un estimateur dans cette gamme, l'hypothèse est rejetée. L'autre gamme s'appelle la gamme d'acceptation et si l'estimateur de l'échantillon est dans cette gamme, l'hypothèse est acceptée. Cela implique que si l'hypothèse est exacte, la probabilité de prendre une décision correcte en acceptant l'hypothèse est de $1 - \alpha$ (par exemple 95%) et la probabilité de prendre une décision erronée en rejetant l'hypothèse bien qu'elle soit exacte est α (par exemple 5%).

La décision d'accepter ou de rejeter l'hypothèse est dite prise avec le niveau de signification α .

3.4 Limites de confiance

L'estimateur d'un paramètre de la population (appelé aussi estimateur ponctuel) donne seulement la meilleure évaluation de la valeur du paramètre, mais ne donne pas d'information sur l'incertitude probable sur cette valeur. C'est pourquoi on peut être amené à calculer des limites de confiance.

A partir de l'estimateur e d'un échantillon, on calcule dans chaque cas les limites e_1 et e_2 qui, avec une probabilité (confiance) donnée $1 - \alpha$, englobent la vraie valeur du paramètre ε ; on peut avoir $e_1 = -\infty$, ou $e_2 = +\infty$. Cela implique que dans $100(1 - \alpha)\%$ (par exemple 95%) des cas, l'intervalle de e_1 à e_2 comprend effectivement la vraie valeur ε , tandis que dans $100\alpha\%$ (par exemple 5%) des cas, il ne la comprend pas.

Les limites de confiance peuvent être bilatérales ou unilatérales.

Des limites de confiance bilatérales $(1 - \alpha)$ e_1 et e_2 sont les deux valeurs situées de part et d'autre de e qui, avec un niveau de confiance $1 - \alpha$, englobent la vraie valeur ε .

Une limite de confiance unilatérale inférieure $(1 - \alpha)$ e_1 est une valeur (inférieure à e) qui, avec un niveau de confiance $1 - \alpha$, est inférieure à la vraie valeur ε (dans ce cas $e_2 = +\infty$).

Une limite de confiance unilatérale supérieure $(1 - \alpha)$ e_2 est une valeur (supérieure à e) qui, avec un niveau de confiance $(1 - \alpha)$, est supérieure à la vraie valeur ε (dans ce cas $e_1 = -\infty$).

3.5 Distributions types

3.5.1 Distribution normale

La distribution normale (Gaussienne) est définie par:

$$f(x) = \frac{\exp \left\{ -\frac{(x - \xi)^2}{2\sigma^2} \right\}}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \quad (3.5.1)$$

et est complètement définie par sa valeur moyenne ξ et sa variance σ^2 .

La distribution normale réduite:

$$f(u) = \frac{\exp \left\{ -\frac{u^2}{2} \right\}}{\sqrt{2\pi}} \quad (3.5.2)$$

où:

$$u = \frac{x - \xi}{\sigma} \quad (3.5.3)$$

et la fonction de distribution correspondante $F(u)$ ont été mises sous forme de table.

An estimate of the variance of the population (3.1.5) is the sample variance:

$$\begin{aligned}
 s^2 &= \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n - 1} \\
 &= \frac{\sum x_i^2 - \frac{(\sum x_i)^2}{n}}{n - 1} \\
 &= \frac{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}{n(n - 1)}
 \end{aligned} \tag{3.2.3}$$

$n - 1 = f$ is called the number of degrees of freedom of s^2 .

3.3 Significance tests

When a hypothesis has been established about the correct value of a population parameter ε , this hypothesis may be tested by a statistical test, where a sample estimate of the parameter, e , is compared with the hypothetical value. The range of possible values of the estimate e is divided into two parts, one containing the values which are least probable under the hypothesis, corresponding to a total probability α (e.g. 0.05) of getting a value of e in this range if the hypothesis is true, and one containing the values most possible under the hypothesis, corresponding to a probability of $1 - \alpha$.

The range of the least probable values is called the rejection range; if the sample yields an estimate within this range, the hypothesis is rejected. The other range is called the acceptance range, and if the sample estimate is within this range, the hypothesis is accepted. This implies that if the hypothesis is true, the probability of making a correct decision by accepting the hypothesis is $1 - \alpha$ (e.g. 95%) and the probability of making a false decision by rejecting the hypothesis although true is α (e.g. 5%).

The decision whether to accept or reject the hypothesis is said to be made on significance level α .

3.4 Confidence limits

The estimate of a population parameter (also called point estimate) gives only an optimal evaluation of the parameter value, but no information on the probable uncertainty in this value. For this purpose, confidence limits may be calculated.

From the sample estimate e , limits e_1 and e_2 are calculated in each case, which, with a stated probability (confidence) $1 - \alpha$, include the true value of the parameter ε , where possibly either $e_1 = -\infty$, or $e_2 = +\infty$. This implies that in $100(1 - \alpha)\%$ (e.g. 95%) of the cases, the interval from e_1 to e_2 actually includes the true value ε , whereas in $100\alpha\%$ (e.g. 5%) of the cases, it does not.

Confidence limits may be bilateral or unilateral.

Bilateral $(1 - \alpha)$ confidence limits e_1 and e_2 are two values below and above e which, with confidence $1 - \alpha$, include the true value ε .

A lower unilateral $(1 - \alpha)$ confidence limit e_1 is a value (below e) which, with confidence $1 - \alpha$, is smaller than the true value ε (in this case $e_2 = +\infty$).

An upper unilateral $(1 - \alpha)$ confidence limit e_2 is a value (above e) which, with confidence $1 - \alpha$, is greater than the true value ε (in this case $e_1 = -\infty$).

3.5 Distribution types

3.5.1 The normal distribution

The normal (Gaussian) distribution is defined by:

$$f(x) = \frac{\exp \left\{ -\frac{(x - \xi)^2}{2\sigma^2} \right\}}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \tag{3.5.1}$$

and is completely characterized by its mean value ξ and variance σ^2 .

The standardized normal distribution:

$$f(u) = \frac{\exp \left\{ -\frac{u^2}{2} \right\}}{\sqrt{2\pi}} \tag{3.5.2}$$

where:

$$u = \frac{x - \xi}{\sigma} \tag{3.5.3}$$

and the corresponding distribution function $F(u)$ have been tabulated.

La valeur moyenne $\bar{x}$ d'un échantillon de n éprouvettes issue d'une distribution normale est elle-même une variable aléatoire normalement distribuée, dont la valeur moyenne est $\xi_{\bar{x}} = \xi$ et la variance $\sigma_{\bar{x}}^2 = \sigma^2/n$ et la variable correspondante réduite est:

$$\bar{u} = \frac{\bar{x} - \xi}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \quad (3.5.4)$$

3.5.2 Distribution des t

Si la variance vraie de la distribution normale σ^2 est inconnue, l'estimateur s^2 trouvé sur l'échantillon d'après l'équation (3.2.3) peut lui être substitué et la valeur moyenne réduite de l'échantillon devient:

$$t = \frac{\bar{x} - \xi}{\frac{s}{\sqrt{n}}} \quad (3.5.5)$$

La distribution de cette variable est appelée la distribution de t (ou t de Student) et dépend du paramètre $f = n - 1$ (le nombre de degrés de liberté de s^2). La distribution des valeurs de t a été classifiée pour différentes valeurs de f .

3.6 Tests d'égalité des variances

3.6.1 Hypothèses

Les hypothèses sous-entendues dans les tests qui vérifient l'égalité des variances sont que les observations, dont sont déduites les variances, sont aléatoirement indépendantes et constituent des échantillons pris au hasard issus de distributions normales.

3.6.2 Test de Fisher

Pour s'assurer si les variances de deux échantillons, déterminées sur deux échantillons différents, peuvent être raisonnablement considérées comme des estimateurs d'une même variance théorique (paramètre de la population), la variable de test suivante est calculée:

$$F = \frac{s_1^2}{s_2^2} \quad (3.6.1)$$

L'hypothèse est que s_1^2 et s_2^2 sont les estimateurs de la même variance théorique σ^2 .

Si l'hypothèse contraire est que la vraie valeur σ_1^2 est supérieure à σ_2^2 , la valeur calculée de F est comparée aux valeurs classifiées de $F(\alpha, f_1, f_2)$, qui dépendent du niveau de confiance choisi α (voir le paragraphe 3.3) et de f_1 et f_2 , les nombres de degrés de liberté respectifs du numérateur et du dénominateur, s_1^2 et s_2^2 respectivement.

L'hypothèse étudiée est acceptée si $F \leq F(\alpha, f_1, f_2)$ c'est-à-dire que la décision est prise avec le niveau de signification α .

Si les deux variances s_1^2 et s_2^2 sont considérées comme des estimateurs de la même variance théorique (l'hypothèse étudiée est acceptée), un estimateur pondéré de la variance est calculé par:

$$s^2 = \frac{f_1 s_1^2 + f_2 s_2^2}{f_1 + f_2} \quad (3.6.2)$$

avec $f = f_1 + f_2$ degrés de liberté.

3.6.3 Test de Bartlett

Pour déterminer si plusieurs variances d'échantillons, déterminées chacune sur un échantillon différent, peuvent être raisonnablement considérées comme les estimateurs de la même variance théorique, la variable de test suivante est calculée:

$$\chi^2 = \frac{2,3 (f \lg s^2 - \sum_{i=1}^k f_i \lg s_i^2)}{c} \quad (3.6.3)$$

où:

$$c = 1 + \frac{\left[\sum_{i=1}^k \frac{1}{f_i} \right] - \frac{1}{f}}{3(k-1)} \quad (3.6.4)$$

The mean value $\bar{x}$ of a sample of n specimens from a normal distribution is itself a normally distributed stochastic variable with mean value $\xi_{\bar{x}} = \xi$ and variance $\sigma_{\bar{x}}^2 = \sigma^2/n$ and the corresponding standardized variable is:

$$\bar{u} = \frac{\bar{x} - \xi}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \quad (3.5.4)$$

3.5.2 The t distribution

If the true variance of the normal distribution σ^2 is not known, the sample estimate s^2 from equation (3.2.3) may be substituted and the standardized sample mean value becomes:

$$t = \frac{\bar{x} - \xi}{\frac{s}{\sqrt{n}}} \quad (3.5.5)$$

The distribution of this variable is called the t distribution (or Student's t) and depends on the parameter $f = n - 1$ (the number of degrees of freedom for s^2). The t distribution has been tabulated for different values of f .

3.6 Tests for equality of variances

3.6.1 Assumptions

The assumptions underlying the following tests for equality of variances are that the observations from which the variances are computed are stochastically independent and constitute random samples from normal distributions.

3.6.2 Fisher's test

To test if two sample variances, determined from two different samples, may reasonably be considered to be estimates of the same theoretical variance (population parameter), the following test variable is calculated:

$$F = \frac{s_1^2}{s_2^2} \quad (3.6.1)$$

The test hypothesis is that s_1^2 and s_2^2 are estimates of the same theoretical variance σ^2 .

When the alternative to the test hypothesis is that the true value σ_1^2 is greater than σ_2^2 , the calculated value F is compared with tabulated values of $F(\alpha, f_1, f_2)$, which depend on the chosen significance level α (see Sub-clause 3.3) and on f_1 and f_2 , the number of degrees of freedom for the numerator s_1^2 , and the denominator s_2^2 respectively.

The test hypothesis is accepted if $F \leq F(\alpha, f_1, f_2)$, i.e. the decision is made on significance level α .

If the two variances s_1^2 and s_2^2 are considered estimates of the same theoretical variance (the test hypothesis is accepted), a pooled estimate of this variance may be calculated as:

$$s^2 = \frac{f_1 s_1^2 + f_2 s_2^2}{f_1 + f_2} \quad (3.6.2)$$

with $f = f_1 + f_2$ degrees of freedom.

3.6.3 Bartlett's test

To test if several sample variances, each determined from a different sample, may reasonably be considered to be estimates of the same theoretical variance, the following test variable is calculated:

$$\chi^2 = \frac{2.3 (f \lg s^2 - \sum_{i=1}^k f_i \lg s_i^2)}{c} \quad (3.6.3)$$

where:

$$c = 1 + \frac{\left[\sum_{i=1}^k \frac{1}{f_i} \right] - \frac{1}{f}}{3(k-1)} \quad (3.6.4)$$

k est le nombre de variances, s_i^2 la variance individuelle de l'échantillon ($i = 1, 2, \dots, k$) avec f_i degrés de liberté et $s^2 = \frac{\sum f_i s_i^2}{\sum f_i}$ est une variance pondérée avec $f = \sum f_i$ degrés de liberté.

L'hypothèse du test est que toutes les k variances s_i^2 sont des estimateurs de la même variance théorique σ^2 .

La valeur calculée χ^2 est comparée à la valeur classifiée $\chi^2(1 - \alpha, k - 1)$ qui est une fonction de $k - 1$, le nombre de degrés de liberté pour χ^2 et de α , le niveau de signification. Si $\chi^2 > \chi^2(1 - \alpha, k - 1)$, l'hypothèse est rejetée pour le niveau de signification α .

Le test de Bartlett est approximatif mais d'une bonne approximation si le nombre de degrés de liberté f_i de toutes les variances individuelles de l'échantillon s_i^2 est supérieur à 2.

Si l'hypothèse est acceptée, s^2 est pris comme estimation pondérée de la variance commune avec f degrés de liberté.

3.7 Régression linéaire

Le but de l'analyse de régression linéaire est de déterminer une fonction linéaire de x , par exemple une droite, $y = a + bx$, qui est la meilleure représentation de groupes d'observations d'une variable aléatoire (dépendante) y faites pour plusieurs valeurs d'une variable indépendante x . La détermination repose sur la méthode des moindres carrés.

Par exemple, dans le cas de l'équation d'Arrhenius, la variable aléatoire est le logarithme des temps jusqu'à dégradation observés pour des groupes d'éprouvettes à plusieurs températures et la variable indépendante est l'inverse de la température thermodynamique. Le but de l'analyse est alors de trouver les meilleurs estimateurs (basés sur la méthode des moindres carrés) des paramètres de la fonction linéaire qui exprime la relation reliant le logarithme du temps jusqu'à dégradation et l'inverse de la température thermodynamique.

3.7.1 Hypothèses

Les hypothèses sous-jacentes à l'analyse suivante par régression linéaire sont:

1. La relation qui lie la variable indépendante x et la variable dépendante y peut être représentée, avec une assez bonne approximation, par le modèle d'une relation linéaire dans toute la gamme d'intérêt, c'est-à-dire la gamme qui comprend à la fois tous les points expérimentaux et tous les points obtenus par extrapolation.
2. Les valeurs observées pour la variable dépendante y utilisée dans le calcul des coefficients de régression sont aléatoirement indépendantes. Chaque observation était faite sur une éprouvette séparée d'un échantillon prélevé au hasard sur la population intéressée.
3. Les erreurs de mesures sur la variable indépendante x sont négligeables, de sorte que la valeur x_i est supposée connue exactement et est la même pour toutes les observations y_{ij} prises à l'intérieur d'un ensemble où la valeur de i est la même.
4. Dans toute la gamme où l'hypothèse de linéarité 1. est vérifiée, la variable dépendante y présente une distribution normale.
5. La variance de la variable dépendante y est identique pour toutes les valeurs de la variable indépendante x prises dans la gamme de linéarité.

Si les résultats présentent de petits défauts de conformité à ces hypothèses, il n'est pas facile de les déceler. De tels défauts peuvent ne pas être graves pour certaines applications, tandis que pour d'autres, ils peuvent être suffisamment critiques pour conduire à des conclusions erronées. Pour une discussion des méthodes qui permettent de mettre en évidence et de tenir compte de ce que les hypothèses ne sont pas remplies de même que pour une discussion plus exhaustive des méthodes données dans ce guide, l'utilisateur est prié de se reporter aux ouvrages sur ce sujet et à l'avis d'un statisticien professionnel.

L'hypothèse de linéarité 1., figurant au paragraphe 3.7.3, peut être éprouvée au moyen du test de Fisher décrit au paragraphe 3.6.2. Il existe une caractéristique de l'essai de linéarité: plus le nombre d'observations N est élevé, plus grande est, en général, la possibilité d'obtenir une valeur significative F démontrant que la non-linéarité est probable. Cela est dû au fait que plus N est élevé, plus les écarts de linéarité qui peuvent être mis en évidence par l'essai sont petits. C'est pourquoi dans les cas où l'on peut tolérer de petits écarts de linéarité, il est raisonnable d'utiliser une valeur plus faible de α (le niveau de signification).

k is the number of variances, s_i^2 the individual sample variance ($i = 1, 2, \dots k$) with f_i degrees of freedom, and $s^2 = \frac{\sum f_i s_i^2}{\sum f_i}$ is a pooled variance with $f = \sum f_i$ degrees of freedom.

The test hypothesis is that all k variances s_i^2 are estimates of the same theoretical variance σ^2 .

The calculated value χ^2 is compared with the tabulated value $\chi^2(1 - \alpha, k - 1)$ which is a function of $k - 1$, the number of degrees of freedom for χ^2 and of α , the significance level. If $\chi^2 > \chi^2(1 - \alpha, k - 1)$, the hypothesis is rejected on significance level α .

Bartlett's test is an approximate test, but a good approximation if the number of degrees of freedom f_i of all the individual sample variances s_i^2 is greater than 2.

If the hypothesis is accepted, s^2 is taken as a pooled estimate of the common variance with f degrees of freedom.

3.7 Linear regression

The purpose of the linear regression analysis is to determine a linear function of x , e.g. a straight line, $y = a + bx$, which is a best fit of groups of observations of a stochastic (dependent) variable y at several values of an independent variable x . The determination is based on the method of least squares.

For instance, in the case of the Arrhenius equation, the stochastic variable is the logarithm of times to failure observed for groups of specimens at several temperatures and the independent variable is the reciprocal thermodynamic temperature. The aim of the analysis is then to find the best estimates (based on the method of least squares) of the parameters of the linear function which expresses the relation between the logarithm of time to failure and the reciprocal thermodynamic temperature.

3.7.1 Assumptions

The assumptions underlying the following linear regression analysis are:

1. The relationship between the independent variable x and the dependent variable y may be closely represented by a linear model over the range of interest, i.e. the range which includes all test points and all points to which extrapolation is to be made.
2. The observed values of the dependent variable y used in computing the regression coefficients are stochastically independent. Each observation was made on a separate specimen of a random sample from the population of interest.
3. The errors in measurement of the independent variable x are negligible, so that the value x_i is assumed to be known exactly and to be the same for all observations y_{ij} within a set with a fixed value of i .
4. In the range within which the hypothesis of linearity 1. holds, the dependent variable y is normally distributed.
5. The variance of the dependent variable y is the same at all values of the independent variable x within the range of linearity.

Small deviations of the data from these assumptions are not easily detected. For some applications, such deviations may not be serious, while for others they may be sufficiently critical to lead to erroneous conclusions. For a discussion of procedures for recognizing and correcting for departure from the assumptions and for a more comprehensive discussion of the methods given in this guide, the user is referred to the literature and to the advice of a professional statistician.

The assumption of linearity 1. may be tested as shown in Sub-clause 3.7.3 by using Fisher's test described in Sub-clause 3.6.2. It is characteristic for the test for linearity that the greater the number of observations N , the greater in general the possibility to get a significant value of F demonstrating the probability of non-linearity. This is because the greater N is the smaller the deviations from linearity which may be detected by the test. In cases where small deviations are unimportant, it is therefore reasonable to use a rather low value of α (the significance level).

Nous attirons l'attention sur le fait que, d'un point de vue statistique, la droite de régression calculée traduit la relation entre x et y seulement à l'intérieur de la gamme où sont effectuées les observations et que le test de linéarité s'applique uniquement à cette gamme. Les points extrapolés et les limites de confiance sur de tels points sont basés exclusivement sur l'hypothèse d'une linéarité s'étendant sur toute la gamme d'intérêt, y compris sur les points extrapolés; cette hypothèse ne peut être éprouvée par des méthodes statistiques. De plus, de petits défauts de linéarité situés dans la gamme des points expérimentaux, mais qui ne sont pas mis en évidence par le test de linéarité, peuvent également causer de grandes différences dans la gamme où s'effectue l'extrapolation.

Dans le cas où l'on établit l'hypothèse d'une courbe de régression non linéaire, il sera souvent possible de conduire une analyse de régression plus élaborée.

L'hypothèse 5. peut être éprouvée par le test de Bartlett (paragraphe 3.6.3).

Si la variance n'est pas constante mais proportionnelle à une fonction connue de la variable indépendante x , il est possible d'effectuer un autre type d'analyse de régression linéaire des données.

3.7.2 Les coefficients de régression

L'équation de la droite de régression s'écrit (voir le paragraphe 3.7):

$$y = a + bx \quad (3.7.1)$$

Les coefficients de régression a et b sont déterminés à partir de:

$$a = \bar{y} - b\bar{x} \quad (3.7.2)$$

$$b = \frac{\sum_{i=1}^k n_i (x_i - \bar{x}) (\bar{y}_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^k n_i (x_i - \bar{x})^2} = \frac{\sum_{i=1}^k n_i (x_i - \bar{x}) \bar{y}_i}{\sum_{i=1}^k n_i (x_i - \bar{x})^2} \quad (3.7.3)$$

$$\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^k n_i \bar{y}_i}{\sum_{i=1}^k n_i} \quad (3.7.4)$$

Dans ces équations:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^k n_i x_i}{\sum_{i=1}^k n_i} \quad (3.7.5)$$

$$\bar{y}_i = \frac{\sum_{j=1}^{n_i} y_{ij}}{n_i} \quad (3.7.6)$$

où y_{ij} est l'observation numéro j effectuée pour $x = x_i$ ($j = 1, 2, \dots, n_i$) et n_i est le nombre d'observations effectuées à $x = x_i$ ($i = 1, 2, \dots, k$).

Pour simplifier le calcul, les équations (3.7.2) et (3.7.3) peuvent être écrites de façon différente.

It is emphasized that, from a statistical point of view, the calculated regression line describes only the relationship of x and y within the range of observation and that the test of linearity applies only for this range. Extrapolated points and confidence limits on such points are based exclusively on the hypothesis of linearity over the whole range of interest including extrapolated points and this hypothesis cannot be tested by statistical methods. Also small deviations from linearity within the range of observations, which were not detected by the linearity test, may cause great differences in the range of extrapolation.

In the case of a hypothesis in the form of a non-linear regression curve, it will often be possible to conduct a more elaborate regression analysis.

The assumption 5. may be tested by Bartlett's test (Sub-clause 3.6.3).

If the variance is not constant, but proportional to a known function of the independent variable x , it is possible to conduct a modified linear regression analysis of the data.

3.7.2 The regression coefficients

The equation of the regression line is (see Sub-clause 3.7):

$$y = a + bx \quad (3.7.1)$$

The regression coefficients a and b are determined from:

$$a = \bar{y} - b\bar{x} \quad (3.7.2)$$

$$b = \frac{\sum_{i=1}^k n_i (x_i - \bar{x}) (\bar{y}_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^k n_i (x_i - \bar{x})^2} = \frac{\sum_{i=1}^k n_i (x_i - \bar{x}) \bar{y}_i}{\sum_{i=1}^k n_i (x_i - \bar{x})^2} \quad (3.7.3)$$

$$\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^k n_i \bar{y}_i}{\sum_{i=1}^k n_i} \quad (3.7.4)$$

In these equations:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^k n_i x_i}{\sum_{i=1}^k n_i} \quad (3.7.5)$$

$$\bar{y}_i = \frac{\sum_{j=1}^{n_i} y_{ij}}{n_i} \quad (3.7.6)$$

where y_{ij} is observation number j at $x = x_i$ ($j = 1, 2, \dots, n_i$) and n_i is the number of observations at $x = x_i$ ($i = 1, 2, \dots, k$).

To simplify the computation, equations (3.7.2) and (3.7.3) may be written in a somewhat different form.

Si (x_m, y_m) désigne une observation y_m et la valeur correspondante de la variable indépendante x_m et $N = \sum n_i$ représente le nombre total d'observations, on a :

$$a = \frac{\sum y_m - b \sum x_m}{N} \quad (3.7.2a)$$

$$b = \frac{\sum x_m y_m - \frac{\sum x_m \sum y_m}{N}}{\sum x_m^2 - \frac{(\sum x_m)^2}{N}} \quad (3.7.3a)$$

où toutes les sommations s'étendent de 1 à N .

S'il y a un nombre égal d'observations à chaque valeur de x ($n_1 = n_2 = \dots n_k = n$), $N = kn$, on a :

$$a = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n y_{ij} - b\bar{x} \quad (3.7.2b)$$

$$b = \frac{\sum_{i=1}^k (x_i - \bar{x}) (\bar{y}_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^k (x_i - \bar{x})^2} = \frac{\sum_{i=1}^k x_i \bar{y}_i - \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k x_i \sum_{j=1}^n y_{ij}}{\sum_{i=1}^k x_i^2 - \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k x_i^2} \quad (3.7.3b)$$

$$\bar{y} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \bar{y}_i = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n y_{ij} \quad (3.7.4b)$$

où :

$$\bar{x} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k x_i$$

Quand les coefficients de régression a et b sont déterminés, il est possible de calculer, à partir de l'équation (3.7.1), la valeur la plus probable de la variable aléatoire :

$$Y = a + bX \quad (3.7.7)$$

correspondant à une valeur donnée de la variable indépendante $x = X$.

Par exemple, dans le cas de l'équation d'Arrhenius, où $x = 1/\theta$ et $y = \log t$, on trouve le logarithme de temps correspondant à une valeur donnée de l'inverse de la température thermodynamique et à partir de là, on détermine la valeur probable du temps jusqu'à dégradation pour une température donnée.

En résolvant l'équation de régression par rapport à x , la valeur :

$$X = \frac{Y - a}{b} \quad (3.7.8)$$

de x correspondant à une valeur choisie $y = Y$ peut être calculée.

Dans le cas de l'équation d'Arrhenius, c'est ainsi qu'est déterminée la température qui donnerait très probablement un temps jusqu'à dégradation avoisinant la valeur choisie, par exemple 5 000 h.

3.7.3 Variances et tests de signification

A partir de chaque groupe d'observations y_{ij} ($j = 1, 2, \dots n_i$) à des valeurs fixes de x_i , on calcule les variances :

$$s_{1i}^2 = \frac{1}{n_i - 1} \sum_{j=1}^{n_i} (y_{ij} - \bar{y}_i)^2 \quad (i = 1, 2, \dots k) \quad (3.7.9)$$

avec $f_1 = n_i - 1$ degrés de liberté, suivant l'équation (3.2.3).

If (x_m, y_m) designates one observation y_m and the corresponding value of the independent variable x_m and $N = \sum n_i$ is the total number of observations, then:

$$a = \frac{\sum y_m - b \sum x_m}{N} \quad (3.7.2a)$$

$$b = \frac{\sum x_m y_m - \frac{\sum x_m \sum y_m}{N}}{\sum x_m^2 - \frac{(\sum x_m)^2}{N}} \quad (3.7.3a)$$

where all summations extend from 1 to N .

If there is an equal number of observations at each value of x ($n_1 = n_2 = \dots n_k = n$), $N = kn$, then:

$$a = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n y_{ij} - b\bar{x} \quad (3.7.2b)$$

$$b = \frac{\sum_{i=1}^k (x_i - \bar{x})(\bar{y}_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^k (x_i - \bar{x})^2} = \frac{\sum_{i=1}^k x_i \bar{y}_i - \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k x_i \sum_{i=1}^k \bar{y}_i}{\sum_{i=1}^k x_i^2 - \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k x_i^2} \quad (3.7.3b)$$

$$\bar{y} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \bar{y}_i = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n y_{ij} \quad (3.7.4b)$$

where:

$$\bar{x} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k x_i$$

When the regression coefficients a and b are determined, it is possible from equation (3.7.1) to calculate the most probable value of the stochastic variable.

$$Y = a + bX \quad (3.7.7)$$

corresponding to a given value of the independent variable $x = X$.

For example, in the case of the Arrhenius equation, where $x = 1/\theta$ and $y = \log t$, the logarithm of time corresponding to a given value of the reciprocal thermodynamic temperature is found and from this the probable time to failure at a given temperature is determined.

By solving the regression equation with respect to x , the value:

$$X = \frac{Y - a}{b} \quad (3.7.8)$$

of x corresponding to a chosen value $y = Y$ may be calculated.

In the case of the Arrhenius equation, this means the determination of the temperature which would most probably give a time to failure of about the chosen value, say 5 000 h.

3.7.3 Variances and tests of significance

From the individual sets of observations y_{ij} ($j = 1, 2, \dots n_i$) at fixed values of x_i , a set of variances:

$$s_{ii}^2 = \frac{1}{n_i - 1} \sum_{j=1}^{n_i} (y_{ij} - \bar{y}_i)^2 \quad (i = 1, 2, \dots k) \quad (3.7.9)$$

with $f_i = n_i - 1$ degrees of freedom is calculated according to equation (3.2.3).

L'égalité de ces variances peut être contrôlée par le test de Bartlett (paragraphe 3.6.3). Si les valeurs ne diffèrent pas de façon importante pour le niveau de signification α (par exemple 5%), une estimation pondérée est calculée à partir de:

$$s_1^2 = \frac{\sum f_i s_{1i}^2}{N - k} \quad (3.7.10)$$

avec $N - k$ degrés de liberté.

A partir de l'équation (3.7.1), on calcule les points qui correspondent sur la droite de régression:

$$Y_i = a + bx_i \quad (3.7.11)$$

aux k valeurs de x_i . Puis on détermine la variance:

$$s_2^2 = \frac{\sum_{i=1}^k n_i (\bar{y}_i - Y_i)^2}{k - 2} \quad (3.7.12)$$

avec $k - 2$ degrés de liberté.

Test de linéarité

Si s_2^2 est significativement plus grand que s_1^2 , la distance des points à la droite est plus grande que celle résultant de la dispersion de chaque groupe de valeurs et l'hypothèse d'une relation linéaire entre x et y doit être rejetée.

La variable du test $F = \frac{s_2^2}{s_1^2}$ pour $(k - 2, N - k)$ degrés de liberté est comparée à la valeur classifiée de F pour le niveau de signification α , par exemple 5% (voir le paragraphe 3.6.2).

Si F n'est pas significatif pour le niveau prévu, on calcule une estimation pondérée:

$$s^2 = \frac{(N - k) s_1^2 + (k - 2) s_2^2}{N - 2}$$

$$s^2 = \frac{1}{N - 2} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} (y_{ij} - Y_i)^2 \quad (3.7.13)$$

D'après les équations (3.7.2a) et (3.7.3a), cela peut s'écrire:

$$s^2 = \frac{\sum y_m^2 - N \bar{y}^2 + b (N \bar{x} \bar{y} - \sum x_m y_m)}{N - 2} \quad (3.7.13a)$$

et si $n_i = n$ pour toutes les valeurs de i , comme dans les équations (3.7.2b) et (3.7.3b), on a:

$$s^2 = \frac{\sum \sum y_{ij}^2 - N \bar{y}^2 + b (N \bar{x} \bar{y} - n \sum x_i \bar{y}_i)}{N - 2} \quad (3.7.13b)$$

3.7.4 Limites de confiance sur y

Lorsque la valeur Y , correspondant à une valeur choisie X de la variable indépendante, a été calculée suivant la formule (3.7.7), la variance sur Y est déterminée comme suit:

$$s_y^2 = s^2 \left(\frac{1}{N} + \frac{(X - \bar{x})^2}{\sum n_i (x_i - \bar{x})^2} \right) \quad (3.7.14)$$

avec $N - 2$ degrés de liberté.

Les limites de confiance symétriques sur y sont:

$$Y - t_s s_y \text{ (limite de confiance inférieure), et}$$

$$Y + t_s s_y \text{ (limite de confiance supérieure)}$$

où $t_s = t(1 - \alpha/2, N - 2)$ est tiré du tableau de distribution t (t de Student). t est une fonction du niveau de confiance $1 - \alpha$ (par exemple 95%, c'est-à-dire $\alpha = 5\%$, $1 - \alpha/2 = 97,5\%$) et du nombre de degrés de liberté $N - 2$.

Dans de nombreux cas, seule une limite de confiance inférieure est désirée. Dans ce cas, la limite de confiance est:

$$Y - t_a s_y \text{ (limite unilatérale inférieure de confiance)}$$

ici $t_a = t(1 - \alpha, N - 2)$ où $1 - \alpha$ est le niveau de confiance spécifié, par exemple 95%.

The equality of these variances may be tested by Bartlett's test (Sub-clause 3.6.3). If the values do not differ significantly at significance level α (for example 5%), a pooled estimate is calculated from:

$$s_1^2 = \frac{\sum f_i s_{1i}^2}{N - k} \quad (3.7.10)$$

with $N - k$ degrees of freedom.

From equation (3.7.1), the points on the regression line:

$$Y_i = a + bx_i \quad (3.7.11)$$

corresponding to the k values of x_i are calculated, and hence the variance:

$$s_2^2 = \frac{\sum_{i=1}^k n_i (\bar{y}_i - Y_i)^2}{k - 2} \quad (3.7.12)$$

with $k - 2$ degrees of freedom.

Test for linearity

If s_2^2 is significantly greater than s_1^2 , the variation about the line is greater than that which can be accounted for by the variation within the sets, and the hypothesis of linear relationship between x and y must be rejected. The test variable $F = \frac{s_2^2}{s_1^2}$ with $(k - 2, N - k)$ degrees of freedom is compared with the tabulated value of F on significance level α , for example 5% (see Sub-clause 3.6.2).

If F is not significant on the predetermined level, a pooled estimate is computed:

$$s^2 = \frac{(N - k) s_1^2 + (k - 2) s_2^2}{N - 2} \quad (3.7.13)$$

$$s^2 = \frac{1}{N - 2} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} (y_{ij} - Y_i)^2$$

In terms of equations (3.7.2a) and (3.7.3a), this can be written:

$$s^2 = \frac{\sum y_m^2 - N\bar{y}^2 + b(N\bar{x}\bar{y} - \sum x_m y_m)}{N - 2} \quad (3.7.13a)$$

and if $n_i = n$ for all values of i , as in equations (3.7.2b) and (3.7.3b), then:

$$s^2 = \frac{\sum \sum y_{ij}^2 - N\bar{y}^2 + b(N\bar{x}\bar{y} - n \sum x_i \bar{y}_i)}{N - 2} \quad (3.7.13b)$$

3.7.4 Confidence limits for y

When value Y , corresponding to a chosen value X of the independent variable, has been calculated according to formula (3.7.7), the variance of Y is determined as:

$$s_y^2 = s^2 \left(\frac{1}{N} + \frac{(X - \bar{x})^2}{\sum n_i (x_i - \bar{x})^2} \right) \quad (3.7.14)$$

with $N - 2$ degrees of freedom.

Symmetrical confidence limits for y are:

$$Y - t_s s_y \text{ (lower confidence limit), and}$$

$$Y + t_s s_y \text{ (upper confidence limit)}$$

where $t_s = t(1 - \alpha/2, N - 2)$ is taken from a table of the t distribution (Student's t). t is a function of the confidence level $1 - \alpha$ (for example 95%, i.e. $\alpha = 5\%$, $1 - \alpha/2 = 97.5\%$) and of the number of degrees of freedom $N - 2$.

In many cases, only a lower confidence limit is wanted. If so, the confidence limit is:

$$Y - t_a s_y \text{ (lower unilateral confidence limit)}$$

here $t_a = t(1 - \alpha, N - 2)$, where $1 - \alpha$ is the specified confidence level, for example 95%.

3.7.5 Limites de confiance sur x

Si une valeur de X , correspondant à une valeur choisie de Y , a été calculée suivant la formule (3.7.7), les grandeurs suivantes sont déduites :

$$b_r = b - \frac{t_s^2 s^2}{b \sum n_i (x_i - \bar{x})^2} \quad (3.7.15)$$

$$s_r^2 = s^2 \left(\frac{b_r}{Nb} + \frac{(X - \bar{x})^2}{\sum n_i (x_i - \bar{x})^2} \right) \quad (3.7.16)$$

où $t_s = t(1 - \alpha/2, N - 2)$ est la valeur, extraite de la table du coefficient de Student t avec $N - 2$ degrés de liberté correspondant à un niveau de confiance spécifié $1 - \alpha$ (par exemple 95%, c'est-à-dire $1 - \alpha/2 = 97,5\%$).

Les limites de confiance symétriques sur x sont :

$$\bar{x} + \frac{(Y - \bar{y}) - t_s s_r}{b_r} \text{ (limite de confiance inférieure), et}$$

$$\bar{x} + \frac{(Y - \bar{y}) + t_s s_r}{b_r} \text{ (limite de confiance supérieure)}$$

Il y a une probabilité $1 - \alpha$ pour que l'intervalle entre ces limites comprenne la valeur vraie de x , c'est-à-dire la valeur de x qui conduira à une valeur de $y = Y$.

Dans le cas de l'équation d'Arrhenius, une limite de confiance supérieure sur x (c'est-à-dire une limite de confiance inférieure sur la température $\Theta = 1/x$) est souvent seule désirée. Si c'est le cas, t_s dans la formule (3.7.15) est remplacé par $t_a = t(1 - \alpha, N - 2)$ correspondant au niveau de confiance spécifié $1 - \alpha$ (par exemple 95%) et la limite de confiance est :

$$\bar{x} + \frac{(Y - \bar{y}) + t_a s_r}{b_r} \text{ (limite unilatérale de confiance)}$$

Si $b_r \cong b$, les expressions pour les limites de confiance symétriques se réduisent à :

$$X - \frac{t_s s_y}{b} \text{ et } X + \frac{t_s s_y}{b}$$

et, pour la limite unilatérale de confiance, à :

$$X + \frac{t_a s_y}{b}$$

où, à partir de l'équation (3.7.14) :

$$s_y^2 = s^2 \left(\frac{1}{N} + \frac{(X - \bar{x})^2}{\sum n_i (x_i - \bar{x})^2} \right)$$

4. Traitement des résultats d'essais de vieillissement

Dans ce qui suit, on traite l'analyse statistique des résultats d'essais de vieillissement en utilisant l'exemple du vieillissement thermique. Dans les essais de vieillissement, on examine la variation en fonction du temps d'une certaine propriété du matériau sous diverses contraintes de vieillissement (par exemple différentes températures) soit par des mesures, soit par des essais d'épreuve. On détermine le temps jusqu'à dégradation sous chaque contrainte de vieillissement et l'on établit la régression du temps jusqu'à dégradation en fonction des contraintes de vieillissement. Le traitement est divisé en deux parties.

La première partie a trait aux cas où l'on utilise des essais d'épreuve ou des mesures non destructives pour la détermination des temps jusqu'à dégradation des échantillons.

La deuxième partie traite des cas où sont utilisées des mesures destructives. Des exemples numériques où sont décrites les différentes étapes du calcul sont donnés dans la Publication 216-3 de la CEI (à l'étude).

3.7.5 Confidence limits for x

If a value of X , corresponding to a chosen value of Y , has been calculated according to formula (3.7.7), the following quantities are computed:

$$b_r = b - \frac{t_s^2 s^2}{b \sum n_i (x_i - \bar{x})^2} \quad (3.7.15)$$

$$s_r^2 = s^2 \left(\frac{b_r}{Nb} + \frac{(X - \bar{x})^2}{\sum n_i (x_i - \bar{x})^2} \right) \quad (3.7.16)$$

where $t_s = t(1 - \alpha/2, N - 2)$ is the tabulated value of Student's t with $N - 2$ degrees of freedom corresponding to a specified confidence level $1 - \alpha$ (for example 95%, i.e. $1 - \alpha/2 = 97.5\%$).

The symmetrical confidence limits of x are:

$$\bar{x} + \frac{(Y - \bar{y}) - t_s s_r}{b_r} \text{ (lower confidence limit), and}$$

$$\bar{x} + \frac{(Y - \bar{y}) + t_s s_r}{b_r} \text{ (upper confidence limit)}$$

The probability is $1 - \alpha$ that the interval between these limits includes the true value of x , i.e. the value of x which will result in a value of $y = Y$.

In the case of the Arrhenius equation, often an upper confidence limit of x (i.e. a lower confidence limit of the temperature $\theta = 1/x$) only is wanted. If so, t_s in formula (3.7.15) is replaced by $t_a = t(1 - \alpha, N - 2)$ corresponding to the specified confidence level $1 - \alpha$ (for example 95%) and the confidence limit is:

$$\bar{x} + \frac{(Y - \bar{y}) + t_a s_r}{b_r} \text{ (unilateral confidence limit)}$$

If $b_r \cong b$, the expressions for the symmetrical confidence limits reduce to:

$$X - \frac{t_s s_y}{b} \text{ and } X + \frac{t_s s_y}{b}$$

and, for the unilateral confidence limit, to:

$$X + \frac{t_a s_y}{b}$$

where, from equation (3.7.14):

$$s_y^2 = s^2 \left(\frac{1}{N} + \frac{(X - \bar{x})^2}{\sum n_i (x_i - \bar{x})^2} \right)$$

4. Treatment of the results of ageing tests

In the following section, the statistical analysis of the results of ageing tests is treated, using the example of thermal ageing. In the ageing tests, the time dependence of a certain property of the material is investigated under different ageing stresses (e.g. different temperatures), either by measurements or by proof tests. The time to failure at each ageing stress is determined and the regression of time to failure upon ageing stress is determined. The treatment is divided into two parts.

The first part deals with cases where proof tests or non-destructive measurements are employed to determine the times to failure of the specimens.

The second part deals with cases where destructive measurements are used. Numerical examples demonstrating the analysis in detail are given in IEC Publication 216-3 (under consideration).

4.1 Mesures non destructives et essais d'épreuve

4.1.1 Contrôle continu

Si la propriété caractéristique est mesurée et enregistrée, soit de façon continue, soit par des relevés fréquents, le temps jusqu'à dégradation (c'est-à-dire le temps pour lequel la propriété dépasse pour la première fois un critère de fin de vie donné) peut être déterminé directement pour chaque éprouvette en essai. On obtient le même résultat si les éprouvettes sont exposées de façon continue à une contrainte d'épreuve égale au critère de fin de vie prescrit et si le temps jusqu'à dégradation est enregistré. Dans de tels cas, la contrainte d'épreuve peut faire partie des contraintes de vieillissement. Si n_i éprouvettes sont soumises à la contrainte de vieillissement (par exemple la température) θ_i un total de $N = \sum n_i$ temps jusqu'à dégradation t_{ij} est obtenu.

On effectue une analyse de régression linéaire, suivant le paragraphe 3.7, du temps jusqu'à dégradation, ou une fonction appropriée de ce temps $y = f_1(t)$ (souvent $\log t$) en fonction de la contrainte, ou une fonction appropriée de la contrainte $x = f_2(\theta)$ prise comme variable indépendante (dans les expériences de vieillissement thermique, la loi d'Arrhenius est souvent utilisée et l'on prend $x = 1/\theta$, où θ est la température thermodynamique).

A partir de la droite de régression, on peut calculer la valeur de x et les limites de confiance correspondant à une valeur choisie de t en introduisant $Y = f_1(t)$ dans les équations du paragraphe 3.7.5. La valeur correspondante de θ et ses limites de confiance sont alors trouvées au moyen de la fonction $x = f_2(\theta)$.

4.1.2 Essais d'épreuve ou des mesures périodiques

Lorsque des essais d'épreuve sont effectués périodiquement, les éprouvettes sont essayées à des temps déterminés à l'avance $t_1, t_2, \dots$ jusqu'à ce que se produise la dégradation (voir la figure 1, page 36). Si la dégradation a lieu au temps t_r , le temps jusqu'à dégradation pour cette éprouvette est pris égal à :

$$t_{ij} = \frac{t_r + t_{r-1}}{2}$$

c'est-à-dire à la valeur moyenne du temps pour lequel la dégradation a été constatée et du temps auquel l'éprouvette a tenu l'épreuve pour la dernière fois.

Lorsque des mesures non destructives sont effectuées périodiquement, les temps jusqu'à dégradation de chaque éprouvette peuvent être déterminés de la même façon comme la moyenne du premier temps de mesure pour lequel le critère de fin de vie est dépassé et du temps de mesure le précédant immédiatement.

Les $N = \sum n_i$ temps jusqu'à dégradation t_{ij} ainsi obtenus sont alors soumis à une analyse, comme il est indiqué au paragraphe 4.1.1.

Il est important que les intervalles de temps entre les essais soient suffisamment courts pour que les temps jusqu'à dégradation sous chaque contrainte de vieillissement soient répartis sur plusieurs intervalles, car en cas contraire l'écart quadratique moyen et par conséquent les limites de confiance sont affectés d'une grande incertitude.

Dans certains cas, il peut être avantageux de faire une détermination plus exacte des temps jusqu'à dégradation lorsqu'il s'agit de mesures non destructives. Cela peut être réalisé en traçant, pour chaque éprouvette, une courbe qui est la meilleure courbe ajustée sur les points expérimentaux sur un graphique donnant les variations de la propriété p exprimée en fonction du temps t ou de fonctions appropriées $v = f_4(p)$, $u = f_3(t)$ de ces variables.

L'ajustement de la courbe peut être fait par la méthode des moindres carrés. A partir de ces courbes, on détermine les temps individuels jusqu'à dégradation t_{ij} comme étant les intersections de ces courbes avec la droite représentant le critère de fin de vie.

4.2 Mesures destructives

Lorsque la mesure de la propriété observée nécessite la destruction de l'éprouvette (par exemple rigidité diélectrique), on ne peut utiliser la procédure décrite au paragraphe 4.1, puisqu'on n'obtient qu'une seule mesure sur chaque éprouvette individuelle.

Dans de tels cas, les mesures individuelles peuvent être relevées sur un graphique donnant les variations de la propriété p en fonction du temps t . Le temps jusqu'à dégradation t_i à une certaine contrainte de vieillissement θ_i est déterminé par le point d'intersection de la droite représentant le critère de fin de vie avec la courbe passant au mieux entre tous les points de mesure obtenus sous la contrainte θ_i , voir la figure 2, page 37.

Il est souvent possible de transformer en droites la courbe de la propriété en fonction du temps pour les différentes contraintes de vieillissement en utilisant des fonctions appropriées du temps $u = f_3(t)$ et de la propriété $v = f_4(p)$, voir la figure 3, page 38.

4.1 Non-destructive measurements and proof tests

4.1.1 Continuous recording

If the characteristic property is measured and recorded continuously or by frequent scanning, the time to failure (i.e. the time when the property first exceeds a given end-point criterion) can be determined directly for each specimen under test. The same applies if the specimens are exposed continuously to a proof stress equal to a prescribed end-point criterion and the time to failure recorded. In such cases, the proof stress may be part of the ageing influences. With n_i specimens at the ageing stress (for example, temperature) θ_i , a total of $N = \sum n_i$ times to failure t_{ij} is obtained.

A linear regression analysis is carried out, according to Sub-clause 3.7, of the time to failure, or a suitable function of that time $y = f_1(t)$ (often $\log t$) upon the ageing stress, or a suitable function of the stress $x = f_2(\theta)$ as independent variable (in thermal ageing experiments, often the Arrhenius law is used, so that $x = 1/\theta$, where θ is the thermodynamic temperature).

From the regression line, the value of x with confidence limits corresponding to a chosen value of t may be calculated by introducing $Y = f_1(t)$ in the equations of Sub-clause 3.7.5. The corresponding value of θ and its confidence limits are then found by means of the function $x = f_2(\theta)$.

4.1.2 Periodic proof tests or measurements

When proof tests are used periodically, the specimens are tested at predetermined times $t_1, t_2, \dots$ until failure occurs (see Figure 1, page 36). If failure occurs at time t_f , the time to failure for that specimen is taken as:

$$t_{ij} = \frac{t_f + t_{f-1}}{2}$$

i.e. the mean value of the time where failure occurred and the time when the proof test was last withstood.

When non-destructive measurements are carried out periodically, the times to failure for each specimen can be determined analogously, as the mean of the first measuring time at which the end point was exceeded and the immediately preceding measuring time.

The $N = \sum n_i$ times to failure t_{ij} thus obtained are then analysed as described in Sub-clause 4.1.1.

It is important that the time intervals between the tests are so short that the times to failure at each ageing stress will spread over several intervals, since otherwise the standard deviation and hence the confidence limits are very inexactly determined.

In some cases, it may be of advantage to make a more exact determination of the times to failure in the case of non-destructive measurements. This may be done by drawing, for each specimen, a curve which is a best fit of the experimental points in a diagram of the property p versus time t , or suitable functions $v = f_4(p)$, $u = f_3(t)$ of these variables.

The curve fitting may possibly be done by the method of least squares. From these curves, the individual times to failure t_{ij} are found by intersection with the straight line representing the end-point criterion.

4.2 Destructive measurements

When the measurement of the property examined necessitates destruction of the specimen (for example electric strength), the procedure of Sub-clause 4.1 cannot be used, since only one measurement is obtained on each individual specimen.

In such cases, the individual measurements may be plotted in a diagram of property p versus time t . The time to failure t_i at a certain ageing stress θ_i is determined by the intersection of a line representing the end-point criterion, and a curve which is a best fit of all measured points at the stress θ_i , see Figure 2, page 37.

It may often be possible to transform the curves of property versus time at the different ageing stresses into straight lines by means of appropriate functions of time $u = f_3(t)$ and property $v = f_4(p)$, see Figure 3, page 38.

L'ajustement de la courbe peut être fait soit graphiquement, soit par la méthode des moindres carrés, ce qui dans le cas d'une relation linéaire entre u et v équivaut à la détermination des coefficients de l'équation de régression $v = a + bu$ suivant la procédure décrite au paragraphe 3.7.2.

A partir des points d'intersection de la droite représentant le critère de fin de vie avec les courbes représentant la propriété en fonction du temps, on détermine k valeurs de temps jusqu'à dégradation t_i sous les contraintes θ_i ($i = 1, 2, \dots k$). Ces points peuvent être portés sur un graphique représentant le temps en fonction de la contrainte (température). Puis l'on détermine la régression entre les fonctions appropriées $y = f_1(t)$ et $x = f_2(\theta)$, par exemple comme indiqué au paragraphe 3.7 dans le cas où il existe une relation linéaire entre y et x . Comme on n'obtient ainsi qu'une seule valeur de t ou de y correspondant à chaque valeur de θ , il n'est pas possible d'appliquer le test de linéarité décrit au paragraphe 3.7.3 et la variance autour de la droite s_2^2 doit être utilisée comme un estimateur s_2 de σ_2 avec seulement $k - 2$ degrés de liberté, ce qui conduit à des limites de confiance relativement grandes dans ce cas.

Une estimation sommaire de la variance à l'intérieur des groupes s_{11}^2 de y peut être obtenue en supposant que les courbes de la propriété en fonction du temps pour les éprouvettes individuelles sous la contrainte θ_i sont parallèles à la courbe obtenue ci-dessus, au voisinage du point d'intersection de cette courbe avec la droite représentant le critère de fin de vie. A partir des points individuels portés sur le graphique de p en fonction de t (ou v en fonction de u) aux, par exemple, quatre temps de mesure les plus proches du point d'intersection, on trace des courbes parallèles à ladite courbe et les points d'intersection entre ces courbes et la droite sont pris comme temps jusqu'à dégradation t_{ij} des éprouvettes individuelles, (voir figure 3, page 38). Les calculs se font alors comme au paragraphe 3.7.

Nous devons cependant attirer l'attention sur le fait que cette méthode ne donne qu'une estimation sommaire de la variance et que, pour cette raison, les calculs sont seulement approchés.

The curve-fitting may be done graphically, or by the method of least squares, which in the case of linear relationship between u and v is equivalent to the determination of the coefficients in a regression equation $v = a + bu$ in accordance with the procedure described in Sub-clause 3.7.2.

From the intersections of the line representing the end-point criterion and the curves of property versus time, k values of time to failure t_i at stresses θ_i are determined ($i = 1, 2, \dots k$). These points may be plotted in a diagram of time versus stress (temperature), and the regression between appropriate functions $y = f_1(t)$ and $x = f_2(\theta)$ determined, for example, as described in Sub-clause 3.7 in case of linear relationship between y and x . Since there is only one value of t or y corresponding to each value of θ , it is not possible to make the test of linearity described in Sub-clause 3.7.3 and the variance about the line s_2^2 must be used as estimate s_2 of σ_2 , with only $k - 2$ degrees of freedom, which leads to relatively wide confidence limits in this case.

A rough estimate of the variance within sets s_{1i}^2 of y may be obtained by assuming that the curves of property versus time for the individual specimens at stress θ_i run parallel to the curve obtained above, in the vicinity of the intersection of this curve with the straight line representing the end-point criterion. From the individual measured points on the graph of p versus t (or v versus u) at, for example, the four measuring times nearest to the intersection point, curves are drawn parallel to the said curve, and the intersections between these curves and the straight line taken as the times to failure t_{ij} of the individual specimens (see Figure 3, page 38). The calculations then proceed as in Sub-clause 3.7.

It must be emphasized, however, that this gives only a rough estimate of the variance and that the calculations therefore are only approximate.

ANNEXE A

RÉFÉRENCES

- 1 A. Hald: Statistical Theory with Engineering Applications. Wiley, 1952.
- 2 A. Hald: Statistical Tables and Formulas. Wiley, 1952.
- 3 Lothar Sachs: Statistische Auswertungsmethoden. Springer, 1972.
- 4 William H. Beyer (ed.): Handbook of Tables for Probability and Statistics. The Chemical Rubber Co., 1968.
- 5 K. A. Brownlee: Industrial Experimentation. Her Majesty's Stationery Office, 1949.

Article	Sujet	Référence
2	Graphique normal de probabilité Graphique normal de log de probabilité	1 paragraphe 6.7 1 paragraphe 7.2
3.3	Tests de signification	1 paragraphe 9.4 3 paragraphe 145 5 chapitre II (c) et (d)
3.4	Limites de confiance	1 paragraphe 9.5 3 paragraphe 141 5 chapitre III (b)
3.5.1	Distribution normale Tables de distribution normale	1 chapitre 5 3 paragraphe 134 5 chapitre II (i) 2 tables I, II et III 4 partie II
3.5.2	Distribution des t Tables de distribution des t	1 chapitre 15 3 paragraphe 151 2 table IV 4 partie IV 5 table I
3.6.2	Test de Fisher, distribution des F ¹⁾ Tables de distribution des F	1 chapitre 14 3 paragraphe 35 5 chapitre IV (a) 2 table VII 4 partie VI 5 table III
3.6.3	Test de Bartlett Tables de distribution des χ^2	1 paragraphe 11.6 3 paragraphe 723 5 chapitre IV (c) 2 table V 4 partie V 5 table II
3.7	Régression linéaire	1 chapitre 18 3 chapitre 5 5 chapitre IX

¹⁾ Dans les références 1 et 2, la distribution des F est appelée la distribution des v^2 .

APPENDIX A

REFERENCES

- 1 A. Hald: Statistical Theory with Engineering Applications. Wiley, 1952.
- 2 A. Hald: Statistical Tables and Formulas. Wiley, 1952.
- 3 Lothar Sachs: Statistische Auswertungsmethoden. Springer, 1972.
- 4 William H. Beyer (ed.): Handbook of Tables for Probability and Statistics. The Chemical Rubber Co., 1968.
- 5 K. A. Brownlee: Industrial Experimentation. Her Majesty's Stationery Office, 1949.

Clause	Subject	Reference
2	Normal probability graph	1 Paragraph 6.7
	Log-normal probability graph	1 Paragraph 7.2
3.3	Significance tests	1 Paragraph 9.4 3 Paragraph 145 5 Chapter II (c) and (d)
3.4	Confidence limits	1 Paragraph 9.5 3 Paragraph 141 5 Chapter III (b)
3.5.1	Normal distribution	1 Chapter 5 3 Paragraph 134 5 Chapter II (i)
	Tables of the normal distribution	2 Tables I, II and III 4 Part II
3.5.2	t distribution	1 Chapter 15 3 Paragraph 151
	Tables of the t distribution	2 Table IV 4 Part IV 5 Table I
3.6.2	Fisher's test, F distribution ¹⁾	1 Chapter 14 3 Paragraph 35 5 Chapter IV (a)
	Tables of the F distribution	2 Table VII 4 Part VI 5 Table III
3.6.3	Bartlett's test	1 Paragraph 11.6 3 Paragraph 723 5 Chapter IV (c)
	Tables of the χ^2 distribution	2 Table V 4 Part V 5 Table II
3.7	Linear regression	1 Chapter 18 3 Chapter 5 5 Chapter IX

¹⁾ In references 1 and 2, the F distribution is termed the ν^2 distribution.

Utilisation des tables

Les tables statistiques de fonctions de distribution cumulées $F(x)$ d'une variable aléatoire X sont habituellement ordonnées de façon à donner une valeur de x qui, pour une probabilité P spécifiée, satisfasse la condition :

$$F(x, \delta) = P(X \leq x)$$

où δ représente des paramètres possibles qui ne peuvent être pris en considération par la loi réduite de la variable (paragraphe 3.5.1). Par exemple, dans le cas de la distribution des χ^2 , la table V de la référence 2 donne pour $P = 0,95$ et $f = 10$ une valeur de $\chi^2 = 18,3$. Cela s'applique également à la référence 4, table V.1, où, toutefois, les désignations F et n sont utilisées à la place de P et f . Cela signifie que lorsque $f = 10$, la probabilité d'obtenir une valeur de χ^2 égale ou inférieure à $\chi^2(P, f) = \chi^2(0,95, 10) = 18,3$, est de 95%, ou :

$$P(\chi^2 \leq 18,3) = 0,95 \quad f = 10$$

Exprimée de façon différente, $P = 95\%$ de la distribution des χ^2 est inférieure à 18,3 et $\alpha = 1 - P = 5\%$ au-dessus de cette valeur lorsque $f = 10$.

α peut être considéré comme un niveau de signification (paragraphe 3.3), c'est-à-dire si, en testant l'hypothèse, nous utilisons l'intervalle $18,3 < \chi^2 < +\infty$ comme intervalle de rejet de l'hypothèse, le risque de prendre une décision erronée en rejetant l'hypothèse cependant vraie est de 5%. Dans certains cas, α est utilisé comme entrée aux tables au lieu de P , par exemple à la référence 5, où dans la table II pour 10 degrés de liberté et une probabilité de 0,05, une valeur de $\chi^2 = 18,31$ signifie que la probabilité pour que χ^2 soit supérieur à 18,31 est de 5% :

$$P(\chi^2 > 18,31) = 0,05 \quad f = 10$$

S'il y a une relation simple entre les valeurs $x(P, f)$ et $x(1 - P, f)$ correspondant aux probabilités P et $1 - P$, par exemple avec la distribution t où $t(P, f) = -t(1 - P, f)$, les tables peuvent être aménagées pour un usage immédiat avec des intervalles de rejet symétriques et bilatéraux puisque :

$$P(t \leq t(P, f)) = P \implies$$

$$P(t > t(P, f)) = 1 - P \implies$$

$$P(|t| > t(P, f)) = 2(1 - P)$$

Cet aménagement du tableau des t est utilisé dans la référence 5, table I, où par exemple on a, avec 5 degrés de liberté et une probabilité de 0,05, une valeur de t égale à 2,57; cela signifie qu'avec des intervalles de rejet de : $-\infty < t < -2,57$ et $+2,57 < t < +\infty$, le niveau significatif est de 5%, donc :

$$P(|t| > 2,57) = \alpha = 0,05 \implies$$

$$P(t > 2,57) = \alpha/2 = 0,025 \implies$$

$$P(t \leq 2,57) = 1 - \alpha/2 = 0,975$$

Cela correspond à la valeur de t obtenue dans la référence 4, tableau IV.1, pour $F = 0,975$ et $n = 5$, soit $t = 2,571$.

Dans la référence 2, tableau IV, il y a deux entrées de probabilité, l'une pour P et l'autre pour $2(1 - P)$, conduisant à la même valeur de t . Par exemple $P = 0,975$ et $2(1 - P) = 0,05$ donnant tous deux $t = 2,571$ pour $f = 5$.

Use of the tables

Statistical tables of cumulative distribution functions $F(x)$ of a stochastic variable X are usually arranged in such a way that they give that value of x which, for a specified probability P , satisfies the condition:

$$F(x, \delta) = P(X \leq x)$$

where δ represents possible parameters, which cannot be taken care of by standardization of the variable (Sub-clause 3.5.1). For instance, in case of χ^2 distribution, Table V in Reference 2 gives for $P = 0.95$ and $f = 10$ a value of $\chi^2 = 18.3$. This also applies to Reference 4, Table V.1, where, however, the designations F and n are used instead of P and f . This means that when $f = 10$, the probability of getting a value of χ^2 equal to or less than $\chi^2(P, f) = \chi^2(0.95, 10) = 18.3$, is 95%, or:

$$P(\chi^2 \leq 18.3) = 0.95 \quad f = 10$$

Expressed in another way, $P = 95\%$ of the χ^2 distribution lies below 18.3, and $\alpha = 1 - P = 5\%$ above this value when $f = 10$.

α may be considered as a significance level (Sub-clause 3.3), for example, if by hypothesis testing we use the interval $18.3 < \chi^2 < +\infty$ as reject interval, the risk of making a false decision by rejecting the hypothesis although true is 5%. In some cases, α is used as entrance to the tables instead of P , for example, in Reference 5, where in Table II for 10 degrees of freedom and a probability of 0.05, a value of $\chi^2 = 18.31$ means that the probability of χ^2 being greater than 18.31 is 5%:

$$P(\chi^2 > 18.31) = 0.05 \quad f = 10$$

If there is a simple relation between the values $x(P, f)$ and $x(1 - P, f)$ corresponding to the probabilities P and $1 - P$, for example, as with the t distribution where $t(P, f) = -t(1 - P, f)$, the tables may be arranged for immediate use with symmetric, bilateral reject intervals, since:

$$\begin{aligned} P(t \leq t(P, f)) &= P & \implies \\ P(t > t(P, f)) &= 1 - P & \implies \\ P(|t| > t(P, f)) &= 2(1 - P) \end{aligned}$$

This arrangement of the t table is used in Reference 5, Table I, where, for example, one gets for 5 degrees of freedom and a probability of 0.05 a t value of 2.57, meaning that with reject intervals of:

$-\infty < t < -2.57$ and $+2.57 < t < +\infty$, the significance level is 5%, or:

$$\begin{aligned} P(|t| \geq 2.57) &= \alpha = 0.05 & \implies \\ P(t > 2.57) &= \alpha/2 = 0.025 & \implies \\ P(t \leq 2.57) &= 1 - \alpha/2 = 0.975 \end{aligned}$$

This corresponds to the value of t obtained in Reference 4, Table IV.1, for $F = 0.975$ and $n = 5$, viz. $t = 2.571$.

In Reference 2, Table IV, there are two probability entrances, one for P and one for $2(1 - P)$, leading to the same value of t . For example $P = 0.975$ and $2(1 - P) = 0.05$ both give $t = 2.571$ for $f = 5$.